МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1984

УДК 539.374

О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ РАСТУЩЕГО ТЕЛА

ТРИНЧЕР В. К.

Задача об определении напряженно-деформированного состояния растущего тела возникает при описании многих технологических процессов, таких, как возведение массивных тел относительно малыми блоками, нарастание твердой фазы из остывающего раствора, формирование деталей методом силовой намотки. Постановке задачи расчета растущих тел посвящено достаточно много работ, например [1–9], в которых имеются и обзоры по отдельным направлениям рассматриваемой проблемы [1].

В публикуемой работе предлагается постановка задачи об определении деформированного состояния растущего тела и пошаговый метод ее численного решения, применимые при произвольной модели среды и при общих для принимаемой модели условиях на растущей границе [2].

Основное отличие в постановке краевой задачи для твердого деформируемого тела, масса которого растет со стороны границы тела, от постановки задачи для нерастущего (т. е. постоянной массы) тела связано с формулировкой условий на растущей части границы. Непрерывный рост тела можно рассматривать как предельный случай сопряжения тел, расчет которого требует знания полного напряженно-деформированного состояния сопрягаемых тел в момент сопряжения. Следовательно, для непрерывно растущих тел с достаточно общими уравнениями состояния, определяемыми функциональными зависимостями между тензорами напряжений σ_{ij} и силовых деформаций e_{ij}, в каждой точке $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ растущей границы необходимо задавать шесть функций – компонент тензора $e_{ij}(\mathbf{x}, t)$ на некотором отрезке времени $[t^\circ, t_*]$, где $t_*=f(\mathbf{x})$ – момент присоединения к точке $\mathbf{x}$ границы материальной точки, $t^\circ=f^\circ(\mathbf{x})$ – момент времени, когда материальная точка, «подготавливаемая» для присоединения к растущему телу, находилась в исходном, недеформированном состоянии. С этой точки зрения условие «ненапряженности» растущей границы, например, вязкоупругого тела наследственного типа имеет вид $e_{ij}(\mathbf{x}, t)\equiv 0$ при $t\leqslant f(\mathbf{x})$.

При более простых моделях среды растущего тела «объем» граничных условий может уменьшаться. Для вязкоупругого тела с уравнениями состояния, имеющими вид конечных соотношений между тензорами σ_{ij}, e_{ij} и их производными по времени, на растущей границе вместо предыстории нагружения достаточно задание двенадцати, вообще говоря, независимых величин $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t_*)$ и $e_{ij}(\mathbf{x}, t_*)$. Если среди уравнений состояния такого тела есть конечные соотношения между тензорами σ_{ij} и e_{ij}, то число независимо задаваемых на границе условий соответственно уменьшается. Число граничных условий будет наименьшим для упругого тела, в точках растущей границы которого необходимо задание шести величин – компонент тензора σ_{ij} или e_{ij}.

Необходимые граничные условия должны определяться из технологии или физики роста тела, естественно, до решения краевой задачи. Например, две нетривиальные компоненты тензора напряжений на растущей границе цилиндра, формируемого методом силовой намотки, определяются двумя заданными технологией параметрами – усилием натяжения ленты и внешним давлением. Если намотка производится из вязкоупругой ленты, то на возникающее в детали напряженно-деформированное состояние влияют не только указанные факторы, но и, например, время Δt нахождения ленты в натянутом состоянии. Если модель среды растущего тела (в данном случае цилиндра) совпадает с моделью среды ленты, то можно принять, что деформированное состояние ленты в момент контакта с цилиндром является граничным значением для растущего тела. В случае, когда растущее тело является композитом

[1] См. также: *Арутюнян Н. Х.* Теория ползучести неоднородно стареющих тел.– Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1981, № 170, с. 19–25.

[2] Доложена на V Всес. съезде по теорет. и прикл. механике. Алма-Ата, май, 1981.

с моделью среды, существенно отличающейся от модели среды ленты (например, вследствие наличия значительных зазоров между слоями среды), конкретизация необходимых граничных условий на растущей границе, равно как и самой модели среды, по параметрам технологии представляет собой самостоятельную и часто достаточно сложную задачу.

1. Задача формулируется при следующих ограничениях: деформирование квазистатическое, перемещения и деформации малые, кинетика роста тела и температурное поле в нем не зависят от напряженного состояния в растущем теле и считаются заданными.

В целях конкретности изложения принимаем вязкоупругую модель среды типа

$$\sigma_{ij}'=A_{ijkl}(\sigma_{mn},\ e_{mn},\ T)\,e_{kl}'+\Phi_{ij}(\sigma_{kl},\ e_{kl},\ T) \tag{1.1}$$

где штрих означает частную производную по времени.

В начальном объеме $\Omega(0)$ при $t=0$ задано напряженно-деформированное состояние

$$\begin{gathered} u_i(\mathbf{x},\,0)=u_i^\circ(\mathbf{x})=0,\qquad p_{ij}(\mathbf{x},\,0)=p_{ij}^\circ(\mathbf{x})=0\\ e_{ij}(\mathbf{x},\,0)=e_{ij}^\circ(\mathbf{x}),\qquad \sigma_{ij}(\mathbf{x},\,0)=\sigma_{ij}^\circ(\mathbf{x}) \end{gathered} \tag{1.2}$$

где p_{ij} — тензор полных деформаций, u_i — вектор перемещений. На растущей части границы $\Gamma_1(t)$, заданной уравнением $t=f(\mathbf{x})$, граничные условия при модели среды (1.1) имеют вид

$$\begin{gathered} u_i(\mathbf{x},\,f(\mathbf{x}))=u_i^\circ(\mathbf{x})=0,\qquad p_{ij}(\mathbf{x},\,f(\mathbf{x}))=p_{ij}^\circ(\mathbf{x})=0\\ e_{ij}(\mathbf{x},\,f(\mathbf{x}))=e_{ij}^\circ(\mathbf{x}),\qquad \sigma_{ij}(\mathbf{x},\,f(\mathbf{x}))=\sigma_{ij}^\circ(\mathbf{x}) \end{gathered} \tag{1.3}$$

Тензор скоростей полных деформаций определяется известными соотношениями Коши через вектор скоростей перемещений

$$p_{ij}'(\mathbf{x},\,t)=\nabla_i u_j'+\nabla_j u_i' \tag{1.4}$$

Тензор температурных деформаций $\gamma_{ij}(\mathbf{x},\,t)$ предполагается известным, так как задано температурное поле $T(\mathbf{x},\,t)$. Тензоры скоростей полных и силовых деформаций связаны соотношением

$$e_{ij}'(\mathbf{x},\,t)=p_{ij}'(\mathbf{x},\,t)-\gamma_{ij}'(\mathbf{x},\,t) \tag{1.5}$$

Постановка задачи замыкается уравнениями равновесия и какими-либо стандартными граничными условиями на стационарной части границы Γ_2.

В силу того что величины $u_i(\mathbf{x},\,t)$ и $p_{ij}(\mathbf{x},\,t)$ входят в постановку (1.1)–(1.5) только через их частные производные по времени, их «начальные» значения $u_i^\circ(\mathbf{x})$ и $p_{ij}^\circ(\mathbf{x})$ не влияют на определение (расчет) величин $\sigma_{ij}(\mathbf{x},\,t)$, $e_{ij}(\mathbf{x},\,t)$, приращений перемещений $\Delta u_i(\mathbf{x},\,t)=u_i(\mathbf{x},\,t)-u_i^\circ(\mathbf{x})$ и полных деформаций $\Delta p_{ij}(\mathbf{x},\,t)=p_{ij}(\mathbf{x},\,t)-p_{ij}^\circ(\mathbf{x})$. Поэтому без снижения общности (при любой модели среды) можно принять как при $\mathbf{x}\in\Omega(0)$, так и при $\mathbf{x}\in\Delta\Omega(t)$ условия $u_i^\circ(\mathbf{x})=0$, $p_{ij}^\circ(\mathbf{x})=0$; при этом $\Delta u_i=u_i$, $\Delta p_{ij}=p_{ij}$. При экспериментальном решении задачи об определении напряженно-деформированного состояния как растущего, так и нерастущего тела величинам $u_i^\circ(\mathbf{x})$ и $p_{ij}^\circ(\mathbf{x})$ соответствуют несущественные начальные показания приборов-индикаторов перемещения и деформометров, а принятие этих величин нулевыми соответствует выведению на нуль начальных показаний этих приборов. Величины $\sigma_{ij}^\circ(\mathbf{x})$ и $e_{ij}^\circ(\mathbf{x})$, напротив, экспериментально определяются вполне однозначно.

Постановка (1.1)–(1.5) относится, естественно, и к нерастущему телу (при замене (1.3) стандартными граничными условиями). При этом для нерастущего тела (и для объема $\Omega(0)$ растущего тела) из соотношений Коши в первичной форме (1.4) следует их справедливость при малых деформациях и для приращений перемещений и деформаций. Для области $\Delta\Omega(t)=\Omega(t)/\Omega(0)$ растущего тела это неверно (см. ниже).

Как видно, в силу самой постановки краевой задачи условия на растущей границе не могут быть разделены на типы, аналогичные типам граничных условий на нерастущей границе.

2. Покажем, что из обобщенных граничных условий (1.3) следуют стандартные граничные условия второго рода относительно компонент тензора σ_{ij}'. Для наглядности вывода примем систему координат (x_1, x_2, x_3), такую, что одно из семейств координатных поверхностей, например $x_1=$ $=\mathrm{const}$, включает в себя семейство растущих граничных поверхностей. В этой «естественной» для растущего тела системе координат уравнение растущей границы тела имеет вид $t=f(x_1)$.

Дифференцируя последние из соотношений (1.3) по координатам и подставляя их в уравнения равновесия, получаем три равенства

$$\sigma_{1i}'(\mathbf{x},\ f(\mathbf{x}))=[\operatorname{div}\sigma_{kl}{}^\circ(\mathbf{x})+F_i(\mathbf{x},\ f(\mathbf{x}))]/(h_1(\mathbf{x})\,df/dx_1)=\Phi_i(\mathbf{x}) \qquad (2.1)$$

где h_1 — один из коэффициентов Ламе принятой системы координат.

Как видно, соотношения (2.1) представляют собой выражения скорости изменения вектора напряжений на растущей границе через заданные на границе функции. Отметим, что необходимые условия «ненапряженности» границы $\sigma_{ij}{}^\circ(\mathbf{x})=0$ приводят к условиям $\sigma_{1i}'(\mathbf{x},\ f(\mathbf{x}))=0$ только при отсутствии массовых сил.

Сформулированная в п. 1 постановка задачи может быть теперь записана в следующем эквивалентном виде:

$$\operatorname{div}\sigma_{kl}'+F_i'=0, \qquad \sigma_{ij}'=A_{ijkl}e_{kl}'+\Phi_{ij}$$

$$e_{ij}'=p_{ij}'-\gamma_{ij}', \quad p_{ij}'=\nabla_i u_j'+\nabla_j u_i' \qquad (2.2)$$

$$\sigma_{1i}'(\mathbf{x},\ t)=\Phi_i(\mathbf{x}) \quad (t=f(\mathbf{x})), \quad u_i'(\mathbf{x},\ t)=\varphi_i'(\mathbf{x},\ t) \quad (\mathbf{x}\in\Gamma_2) \qquad (2.3)$$

$$u_i(\mathbf{x},t)=\int\limits_{f(\mathbf{x})}^{t} u_i'(\mathbf{x},\tau)\,d\tau, \qquad e_{ij}(\mathbf{x},t)=\int\limits_{f(\mathbf{x})}^{t} e_{ij}'(\mathbf{x},\tau)\,d\tau+e_{ij}{}^\circ(\mathbf{x})$$

$$(2.4)$$

$$p_{ij}(\mathbf{x},t)=\int\limits_{f(\mathbf{x})}^{t} p_{ij}'(\mathbf{x},\tau)\,d\tau, \qquad \sigma_{ij}(\mathbf{x},t)=\int\limits_{f(\mathbf{x})}^{t} \sigma_{ij}'(\mathbf{x},\tau)\,d\tau+\sigma_{ij}{}^\circ(\mathbf{x})$$

Система уравнений (2.2) отличается от соответствующей системы п. 1 тем, что уравнения равновесия записаны в продифференцированном по времени виде. На нерастущей границе в (2.3) записано одно из возможных стандартных условий в продифференцированном по времени виде, в то время как на растущей границе всегда имеют место граничные условия второго рода. Соотношения (2.4) относятся к точкам $\mathbf{x}\in\Delta\Omega(t)$; для области $\Omega(0)$ нижний предел в интегралах этих соотношений следует заменить на нуль.

Запись выражений для тензоров σ_{ij} и p_{ij} в форме (2.4) может быть использована для обоснования ранее высказанных утверждений.

Подставляя выражения для тензора $\sigma_{ij}(\mathbf{x},\ t)$ из (2.4) в левые части уравнений равновесия, получим

$$\operatorname{div}\sigma_{kl}+F_i=\operatorname{div}\sigma_{kl}{}^\circ+\int\limits_{f(\mathbf{x})}^{t}\operatorname{div}\sigma_{kl}'\,d\tau-h_1\frac{df}{dx_1}\sigma_{1i}'(\mathbf{x},f(\mathbf{x}))+\int\limits_{f(\mathbf{x})}^{t}F_i'\,d\tau+F_i'(\mathbf{x},f(\mathbf{x}))$$

Данные выражения в области $\Delta\Omega(t)$ в силу (2.2), (2.3) обращаются в нуль при любых функциях $\sigma_{ij}{}^\circ(x)$; в области $\Omega(0)$ функции $\sigma_{ij}{}^\circ(\mathbf{x})$ должны удовлетворять уравнениям равновесия $\operatorname{div}\sigma_{kl}{}^\circ(\mathbf{x})+F_i(\mathbf{x},\ 0)=0$.

Дифференцируя по координатам выражения (2.4) для вектора $u_i(\mathbf{x},\ t)$ для областей $\Omega(0)$ и $\Delta\Omega(t)$, будем иметь

$$\frac{\partial u_i(\mathbf{x},t)}{\partial x_j}=\int\limits_0^t\frac{\partial u_i'(\mathbf{x},\tau)}{\partial x_j}d\tau, \qquad \frac{\partial u_i(\mathbf{x},t)}{\partial x_1}\neq\int\limits_{f(\mathbf{x})}^{t}\frac{\partial u_i'(\mathbf{x},\tau)}{\partial x_1}d\tau$$

откуда следует, что соотношения Коши относительно приращений перемещений и полных деформаций справедливы только в области $\Omega(0)$.

3. К постановке краевой задачи для растущего тела в форме (2.2)—(2.4) применима пошаговая процедура численного решения, аналогичная соответствующей процедуре для нерастущего тела. Пусть напряженно-деформированное состояние тела известно вплоть до момента времени $t=t_n$. Тогда система уравнений (2.2) и граничные условия (2.3) образуют корректную линейную краевую задачу относительно скоростей изменения напряженно-деформированного состояния σ_{ij}', e_{ij}', p_{ij}', u_i'. Характер краевой задачи на временном слое $t=t_n$ не изменится и при более общих моделях среды, например моделях наследственного типа; в последнем случае функции Φ_{ij} системы (2.2), являющиеся в пошаговой процедуре функциями координат, определяются не только по значениям напряженно-деформированного состояния при $t=t_n$, но и его предыдущими значениями. После решения такой краевой задачи напряженно-деформированное состояние растущего тела на временном слое $t=t_{n+1}=t_n+\Delta t_{n+1}$ в области $\Omega(t_n)$ определяется по стандартным соотношениям пошаговой процедуры типа

$$\begin{gathered}u_i(\mathbf{x}_k,\ t_{n+1})=u_i(\mathbf{x}_k,\ t_n)+u_i'(\mathbf{x}_k,\ t_n)\Delta t_{n+1}\\ \sigma_{ij}(\mathbf{x}_k,\ t_{n+1})=\sigma_{ij}(\mathbf{x}_k,\ t_n)+\sigma_{ij}'(\mathbf{x}_k,\ t_n)\Delta t_{n+1}\end{gathered}\tag{3.1}$$

В приращенной за время Δt_{n+1} части объема состояние растущего тела определяется по соотношениям

$$\begin{gathered}u_i(\mathbf{x}_k,\ t_{n+1})=0,\ \ \sigma_{ij}(\mathbf{x}_k,\ t_{n+1})=\sigma_{ij}^\circ(\mathbf{x}_k),\ \ p_{ij}(\mathbf{x}_k,\ t_{n+1})=0,\ \ e_{ij}(\mathbf{x}_k,\ t_{n+1})=e_{ij}^\circ(\mathbf{x}_k)\\ (f(\mathbf{x}_k)=t_{n+1})\end{gathered}\tag{3.2}$$

в которых используются все граничные условия (2.3). Построением напряженно-деформированного состояния в области $\Omega(t_{n+1})$ по соотношениям (3.1) и (3.2) заканчивается цикл пошаговой процедуры численного решения краевой задачи для растущего тела.

4. Рассмотрим далее схему применения изложенной постановки задачи к описанию начального этапа роста тела, когда оно имеет вид оболочки. Будем считать, что рост массы тела происходит со стороны одной граничной поверхности; вторую стационарную граничную поверхность примем за базовую, на которой вводится система координат $\mathbf{y}=(x_1,\ x_2)$; координата $x_3\equiv z$ направлена по нормали к базовой поверхности. Толщина оболочки $h=\varphi(\mathbf{y},\ t)$ есть заданная функция (начальная толщина $\varphi(\mathbf{y},\ 0)$ может быть, в частности, нулевой), $t=\varphi^{-1}(\mathbf{y},\ h)\equiv f(\mathbf{y},\ h)$.

Деформации базовой поверхности $\varepsilon_{ij}(\mathbf{y},\ t)$ и $\varkappa_{ij}(\mathbf{y},\ t)$ $(i,\ j=1,\ 2)$ определяются обычными соотношениями через вектор перемещений $u_i(\mathbf{y},\ t)$ точек базовой поверхности, тензор полных деформаций — соотношениями $p_{ij}(\mathbf{x},\ t)=\varepsilon_{ij}(\mathbf{y},\ t)+z\varkappa_{ij}(\mathbf{y},\ t)$. В дальнейшем аргумент $\mathbf{y}$ будем опускать. Для тензора силовых деформаций имеем

$$e_{ij}(z,\ t)=e_{ij}^\circ(z)+p_{ij}(z,\ t)-p_{ij}(z,\ f(z)-\gamma_{ij}(z,\ t)+\gamma_{ij}(z,\ f(z))\quad {\scriptstyle (i,\ j=1,\ 2)}\tag{4.1}$$

Постановка замыкается уравнениями состояния, обычными соотношениями для интегральных усилий

$$T_{ij}(t)=\int\limits_0^{\varphi(t)}\sigma_{ij}(z,t)\,dz,\qquad M_{ij}(t)=\int\limits_0^{\varphi(t)}z\sigma_{ij}(z,t)\,dz$$

и уравнениями равновесия. Запишем, например, выражения для тензора напряжений при частном виде уравнений состояния, относящихся к типу (1.1)

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}(z,t)=[\sigma_{ij}^\circ(z)-Ee_{ij}^\circ(z)]\exp[\lambda(f(z)-t)]+\\ +E\left\{e_{ij}(z,t)-(\lambda-\mu)\int\limits_{f(z)}e_{ij}(z,\tau)\exp[\lambda(\tau-t)]d\tau\right\}\quad {\scriptstyle (i,j=1,2)}\end{gathered}\tag{4.2}$$

Здесь использовано уравнение состояния, имеющее вид (4.2) при $f(z)=0$, $\sigma_{ij}^\circ=\sigma_{ij}(0)$, $e_{ij}^\circ=e_{ij}(0)$ $(i, j=1, 2, 3)$. Для такой среды начальные значения тензоров σ_{ij} и e_{ij}, вообще говоря, не связаны соотношением $\sigma_{ij}^\circ=Ee_{ij}^\circ$ и являются независимыми. Соответственно функции $e_{ij}^\circ(x)$ и $\sigma_{ij}^\circ(x)$, входящие в соотношения (4.1), (4.2) при $i, j=1, 2$ и в уравнения равновесия при $i=3$, $j=1, 2, 3$, должны определяться из технологии роста оболочки как независимые функции.

5. Рассмотрим в качестве примера растущий линейно-упругий круговой цилиндр при осесимметричном и плоском деформированном состоянии с нерастущей границей $r=R_1$ и растущей $r=r_*(t)=R_2+vt$. Примем при этом для упрощения выкладок, что среда изотропная, $\nu=0$, $\gamma_{ij}=\alpha T\delta_{ij}$.

Отметим, что задача о растущем цилиндре ранее широко исследовалась, в том числе и при более общих моделях среды. Однако полученное ниже аналитическое решение задачи для линейно-упругого растущего цилиндра при общих условиях на растущей границе отсутствовало.

Пусть на нерастущей границе имеем условие $b_1\sigma_r(R_1, t)=b_2u(R_1, t)+\varphi(t)$, а на растущей – примем общие для рассматриваемой задачи условия $\sigma_r(r_*(t), t)=\sigma_{r*}(t)$, $\sigma_\theta(r_*(t), t)=\sigma_{\theta*}(t)$. При этом соотношениям (2.1) соответствует условие $\sigma_r'(r_*(t), t)=d\sigma_{r*}(t)/dt+dr_*/dt(\sigma_{r*}(t)-\sigma_{\theta*}(t))/r_*(t)\equiv\Phi(t)$.

Система уравнений (2.2) с учетом равенств $\sigma_r'=E(\partial u'/\partial r-\alpha T')$, $\sigma_\theta'=E(u'/r-\alpha T')$ сводится к разрешающему уравнению относительно скорости перемещения

$$\partial^2u'/\partial r^2+\partial u'/r\partial r-u'/r^2=F(T'(r, t)) \tag{5.1}$$

Общее решение этого уравнения, как известно, имеет вид $u'(r, t)=A_1(t)r+A_2(t)r^{-1}+u^\circ(r, t)$, где u° – какое-либо частное решение, а функции $A_i(t)$ определяются согласно (2.3) из линейной алгебраической системы уравнений

$$(b_1E-b_2R_1)A_1(t)-(b_1E+b_2R_1)\frac{A_2(t)}{R_1^2}=$$

$$=b_2u^\circ(R_1, t)-b_1E\left(\frac{\partial u^\circ(R_1, t)}{\partial r}-\alpha T(R_1, t)\right)+\varphi'(t) \tag{5.2}$$

$$A_1(t)-A_2(t)/(R_2+vt)^2=\alpha T(r_*(t), t)+\Phi(t)$$

Соотношения (5.1), (5.2) сводят решения конкретных задач о растущем цилиндре к квадратурам. Рассмотрим, например, случай, качественно соответствующий случаю затвердевания слитка кругового сечения. Пусть $R_1=R_2=R$, $r_*(t)=R-vt$, $T=T^\circ+K(R-r-vt)$, т. е. начальный объем отсутствует, температура на растущей границе постоянна и уменьшается в направлении внешней нерастущей границы. На растущей границе затвердевающего металла граничные условия имеют вид $\sigma_{ij}^\circ=-p\delta_{ij}$, где p – давление в жидкой фазе в окрестности соответствующей точки границы.

На начальном этапе затвердевания тонкая корка металла прижата ферростатическим давлением к изложнице. Соответственно граничное условие на растущей границе при предположении о недеформируемости изложницы представляется соотношением $u(R, t)=0$, а система уравнений (5.2) имеет вид

$$A_1(t)+A_2(t)/R^2=0,\quad A_1(t)-A_2(t)/(R-vt)^2=-\alpha Kv$$

Следовательно

$$u=\alpha K\left(-r+\frac{R^2}{r}\right)\left[vt-R+r-R\left(\operatorname{arctg}\frac{vt-R}{R}+\operatorname{arctg}\frac{r}{R}\right)\right]\simeq\alpha Kz(h-z)$$

$$\frac{\sigma_r}{E}=\alpha K\left[R\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\left(\operatorname{arctg}\frac{vt-R}{R}+\operatorname{arctg}\frac{r}{R}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{R^2}{r^2}(R-r-vt)\right]-\frac{p}{E}\simeq\frac{\alpha K(vt-z)^2}{2R}-\frac{p}{E}$$

$$\frac{\sigma_\theta}{E}=\alpha K\left[R\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\left(\operatorname{arctg}\frac{vt-R}{R}+\operatorname{arctg}\frac{r}{R}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{R^2}{r^2}(R-r-vt)\right]-\frac{p}{E}\simeq\alpha K(vt-z)-\frac{p}{E}$$

Здесь приближенные равенства относятся к случаю, когда толщина корки $h=vt$ мала по сравнению с R, а $z=R-r$. В момент времени $t=t^\circ$, при котором $\sigma_r(R, t)=0$, происходит отслоение корки затвердевающего металла от изложницы. Пользуясь приближенным выражением для величин $\sigma_r(r, t)$, получаем $h^\circ=vt^\circ=(2pR/\alpha KE)^{1/2}$.

Например, при $E=10^2$ МПа, $K=20^\circ$ С/мм, $\alpha=10^{-5}$ 1/°С, $R=500$ мм, $p=5\cdot10^{-4}$ МПа имеем $h=5$ мм; при этом в соответствии с граничными условиями $\sigma_r(R-h^\circ, t^\circ)=\sigma_\theta(R-h^\circ, t^\circ)=-p$, а $\sigma_\theta(R, t^\circ)=0{,}1$ МПа$\gg p$. С момента отслоения условие на нерастущей границе имеет вид $\sigma_r(R, t)=0$, а система уравнений (5.2) приобретает форму

$$A_1(t)-A_2(t)/R^2=-\alpha Kv, \quad A_1(t)-A_2(t)/(R-vt)^2=-\alpha Kv$$

Следовательно, $u'(r, t)=-\alpha Kvr$, $\sigma_r'(r, t)=\sigma_\theta(r, t)=0$. Таким образом, при $t>t^\circ$ имеем

$$u=-\alpha Kvr(t-t^\circ)+u(r, t^\circ), \quad \sigma_{r,\theta}=\sigma_{r,\theta}(r, t^\circ) \quad (r\geqslant R-h^\circ)$$

$$u=-\alpha Kvr[t-(R-r)/v], \quad \sigma_{r,\theta}=-p \quad (r<R-h^\circ)$$

т. е. с момента отслоения напряжения во внешнем слое толщиной h° не меняются, а в дополнительно нарастающей части слитка имеем $\sigma_{ij}(r, t)=-p\delta_{ij}$ (при принятых прочностных и температурных параметрах). Таким образом, можно сделать вывод, что с момента отслоения затвердевающего металла от изложницы скорость возрастания напряжений в слитке резко замедляется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саусвелл Р. В.* Введение в теорию упругости. М.: Изд-во иностр. лит. 1948. 676 с.
2. *Рашба Э. И.* Определение напряжений в массивах от действия собственного веса с учетом порядка их возведения.– Тр. Ин-та строит. механ. АН СССР, 1953, № 18, с. 23–27.
3. *Дятловицкий Л. И.* Исследование напряжений в гравитационных плотинах.– Прикл. механика, 1956, т. 2, вып. 2, с. 167–184.
4. *Харлаб В. Д.* Линейная теория ползучести наращиваемого тела.– Тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та, 1966, вып. 49, с. 93–119.
5. *Пальмов В. А.* О напряжениях, возникающих при затвердевании материалов.– Изв. АН СССР. МТТ, 1967, № 4, с. 80–85.
6. *Дятловицкий Л. И., Вайнберг А. И.* Формирование напряжений в гравитационных плотинах. Киев: Наук. думка, 1975. 264 с.
7. *Арутюнян Н. Х.* Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела.– ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 783–789.
8. *Тарнопольский Ю. М., Портнов Г. Г., Вейль А. И.* Механика намотки композитов.– Изв. АН ЛатвССР, 1980, № 12, с. 80–97.
9. *Турусов Р. А., Давтян С. П., Шкадинский Н. С., Розенберг Б. А., Андреевская С. Д., Ениколопян Н. С.* Механические явления в условиях распространения фронта отверждения.– Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 1, с. 97–99.

Москва

Поступила в редакцию
20.VII.1981