

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ  
ЗАДАЧ КРУЧЕНИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНО-АНИЗОТРОПНЫХ  
СТЕРЖНЕЙ

МАРТЫНОВИЧ В. Т., МАРТЫНОВИЧ Т. Л.

Теория и методы решения задач кручения изотропных стержней хорошо разработаны (см. [1, 2]). Методы решения задач о кручении анизотропных стержней, имеющих плоскость упругой симметрии, разработаны недостаточно. Современное состояние проблемы изложено в монографиях [3-5].

В публикуемой статье задача о кручении прямолинейно-анизотропного стержня сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода с регулярным ядром. Рассмотрен численный пример.

**1. Метод перемещений.** Рассмотрим чистое кручение прямолинейно-анизотропного призматического стержня. Предположим, что материал стержня имеет плоскость упругой симметрии, ортогональную образующей. Поперечное нормальное сечение стержня занимает область  $S$ , ограниченную простым замкнутым контуром  $L$ . Боковая поверхность стержня свободна от внешней нагрузки, а нагрузки, действующие по торцам, статически эквивалентны скручивающему моменту  $M$ .

Торцевую плоскость примем за координатную плоскость  $xOy$ , ось  $z$  направим параллельно образующим стержня (фиг. 1). За неизвестную функцию примем функцию кручения  $\varphi(x, y)$ , пропорциональную упругому перемещению  $W$ . Функция  $\varphi(x, y)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению [3]:

$$L\varphi = A_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2A_{45} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + A_{44} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (x, y \in S) \quad (1.1)$$

и граничному условию

$$A \operatorname{grad} \varphi = df(s)/ds \quad (s \in L) \quad (1.2)$$

$$A = \left( A_{55} \frac{dy}{ds} - A_{45} \frac{dx}{ds} \right) \mathbf{i} + \left( A_{45} \frac{dy}{ds} - A_{44} \frac{dx}{ds} \right) \mathbf{j} \quad (1.3)$$

$$f(s) = \frac{1}{2} (A_{44} x^2 - 2A_{45} xy + A_{55} y^2)$$

где  $A_{ij}$  — модули упругости [3],  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  — орты координатных осей  $x$  и  $y$ .

Следовательно, задача определения функции кручения  $\varphi(x, y)$  свелась к внутренней задаче Неймана для уравнения (1.1). Для разрешимости задачи Неймана (1.1), (1.2) требуется выполнение условия

$$\int_L \frac{d}{ds} f(s) ds = 0 \quad (1.4)$$

вытекающего из формулы Грина

$$\iint_S L\varphi dx dy = \int_L A \operatorname{grad} \varphi ds \quad (1.5)$$

Касательные напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  вычисляются по формулам [3]:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \nu \left[ A_{45} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right] + A_{55} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \right], \\ \tau_{yz} &= \nu \left[ A_{44} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) + A_{45} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \right]\end{aligned}\quad (1.6)$$

где  $\nu = \partial \omega_z / \partial z$  — относительный угол закручивания стержня.

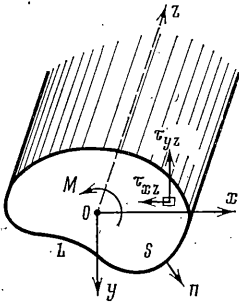
Решение краевой задачи Неймана для уравнения (1.1) ищется в виде логарифмического потенциала простого слоя с непрерывной плотностью  $\mu(s)$  [6]:

$$\varphi(M_0) = \int_L \mu(s) \ln \frac{1}{r_A} ds \quad (1.7)$$

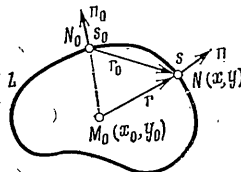
$$r_A = \left[ \frac{A_{44}}{A} (x-x_0)^2 - 2 \frac{A_{45}}{A} (x-x_0)(y-y_0) + \frac{A_{55}}{A} (y-y_0)^2 \right]^{1/2} \quad (1.8)$$

$$A = A_{44}A_{55} - A_{45}^2$$

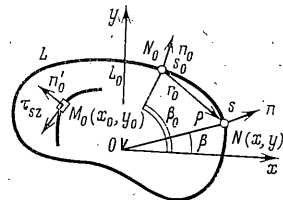
Для всякой точки  $M_0(x_0, y_0)$ , лежащей вне контура  $L$  (фиг. 2), функция (1.7) непрерывна, удовлетворяет уравнению (1.1), а на бесконечности,



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

вообще говоря, неограничена (имеет логарифмическую особенность) [7]. Функция (1.7) непрерывна и при переходе через кривую  $L$ , если она является кривой Ляпунова, а выражение  $A \text{ grad } \varphi$  терпит конечный разрыв непрерывности [7]. Предельные значения выражения  $A \text{ grad } \varphi$  при приближении точки  $M_0$  к  $N_0$ , лежащей на кривой Ляпунова  $L$  соответственно с внутренней и внешней стороны кривой  $L$ , вычисляются по формулам

$$[A^\circ \text{ grad}_0 \varphi(N_0)]_i = \int_L \mu(N) \frac{r_0^2}{r_A^2} \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0} ds + \pi \sqrt{A} \mu(N_0) \quad (1.9)$$

$$[A^\circ \text{ grad}_0 \varphi(N_0)]_e = \int_L \mu(N) \frac{r_0^2}{r_A^2} \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0} ds - \pi \sqrt{A} \mu(N_0) \quad (1.10)$$

где  $\mathbf{n}_0$  — внешняя нормаль к контуру  $L$  в фиксированной точке  $N_0$  (фиг. 2):  $r_0^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$ .

На основании выражений (1.2) и (1.9) получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода с регулярным ядром относительно плотности  $\mu(s)$ :

$$\mu(s_0) + \frac{1}{\pi \sqrt{A}} \int_L \mu(s) \frac{r_0^2}{r_A^2} \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)}{r_0} ds = \frac{1}{\pi \sqrt{A}} \frac{d}{ds_0} f(s_0) \quad (1.11)$$

Пусть замкнутый контур  $L$  задается параметрическим уравнением (фиг. 3):

$$x=x(\alpha), \quad y=y(\alpha), \quad \beta=\arctg(y/x) \quad (0 \leq \alpha \leq 2\pi) \quad (1.12)$$

Интегральное уравнение (1.11) с учетом (1.12) преобразуем к виду

$$\mu(\alpha_0) + \int_0^{2\pi} K_1(\alpha_0, \alpha) \mu(\alpha) d\alpha = f_1(\alpha_0) \quad (1.13)$$

$$K_1(\alpha_0, \alpha) = \frac{1}{\pi \sqrt{A}} \times \\ \times \frac{[x(\alpha) - x(\alpha_0)]y'(\alpha_0) - [y(\alpha) - y(\alpha_0)]x'(\alpha_0)}{r_A^2} \sqrt{\frac{x'(\alpha)^2 + y'(\alpha)^2}{x'(\alpha_0)^2 + y'(\alpha_0)^2}} \quad (1.14)$$

$$f_1(\alpha_0) = \frac{1}{\pi \sqrt{A}} \frac{(A_{44}x_0 - A_{45}y_0)x'(\alpha_0) + (A_{55}y_0 - A_{44}x_0)y'(\alpha_0)}{\sqrt{x'(\alpha_0)^2 + y'(\alpha_0)^2}}$$

Для ортогонного тела, отнесенного к главным осям упругости  $x$  и  $y$  ( $A_{45}=0$ ), выражения (1.14) примут вид

$$K_1(\alpha_0, \alpha) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\alpha_0} \left\{ \arctg \frac{x(\alpha) - x(\alpha_0)}{\sqrt{g}[y(\alpha) - y(\alpha_0)]} \right\} \sqrt{\frac{x'(\alpha)^2 + y'(\alpha)^2}{x'(\alpha_0)^2 + y'(\alpha_0)^2}} \quad (1.15)$$

$$f_1(\alpha_0) = \frac{1}{\pi \sqrt{g}} \frac{x(\alpha_0)x'(\alpha_0) + gy(\alpha_0)y'(\alpha_0)}{\sqrt{x'(\alpha_0)^2 + y'(\alpha_0)^2}}, \quad g = \frac{A_{55}}{A_{44}}, \quad A_{44} = G_1, \quad A_{55} = G_2$$

Напряжения  $\tau_{sz}$  в каждой точке поперечного сечения стержня  $M_0(x_0, y_0)$  по направлению касательной к линии  $L_0$ , проходящей через эту точку, вычисляются по формуле [1]:

$$\tau_{sz} = \tau_{xz} \cos(s_0 x_0) + \tau_{yz} \cos(s_0 y_0) \quad (1.16)$$

которую с учетом представлений (1.6), (1.7) преобразуем к виду

$$\tau_{sz}(M_0) = \nu \int_L \mu(s) \frac{[(x-x_0)dx_0/ds_0 + (y-y_0)dy_0/ds_0]}{r_A^2} ds + \\ + \nu \left[ (A_{45}x_0 - A_{55}y_0) \frac{dx_0}{ds_0} + (A_{44}x_0 - A_{45}y_0) \frac{dy_0}{ds_0} \right] \quad (1.17)$$

$$dx_0/ds_0 = -\cos(n'_0 y_0), \quad dy_0/ds_0 = \cos(n'_0 x_0)$$

где  $n'_0$  — внешняя нормаль к линии  $L_0$  в фиксированной точке  $M_0(x_0, y_0)$ .

Величина крутящего момента  $M$  вычисляется по формуле [1, 3]:

$$M = \iint_S (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y) dx dy \quad (1.18)$$

Формула (1.18) с учетом (1.6) и (1.7) принимает вид

$$M = -\nu \iint_S \left[ \int_L \mu(s) \frac{xy_0 - yx_0}{r_A^2} ds \right] dx_0 dy_0 + \nu (A_{44}J_{yy} - 2A_{45}J_{xy} + A_{55}J_{xx}) \quad (1.19)$$

где  $J_{ij}$  — моменты инерции сечения стержня. Жесткость стержня при кручении  $C = M/\nu$ .

2. Метод напряжений. Введем неизвестную функцию напряжений при кручении  $\psi(x, y)$  при помощи соотношений [1, 3]:  $\tau_{xz} = \nu \partial \psi / \partial y$ ,  $\tau_{yz} = -\nu \partial \psi / \partial x$ .

Функция  $\psi(x, y)$  удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению [3]:

$$L\psi = A_{55} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2A_{45} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + A_{44} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2A \quad (2.1)$$

и граничному условию  $\psi|_L = C$ .

В случае многосвязной области  $S$  постоянные  $C$  различны на разных контурах  $L_k$ , а в случае односвязной области  $S$  постоянную  $C$  можно принять равной нулю.

Общее решение уравнения (2.1) представим в виде

$$\psi = \psi_1 + \psi_0 \quad (2.2)$$

$$\psi_0(x, y) = -1/2 [A_{44}x^2 - 2A_{45}xy + A_{55}y^2] \quad (2.3)$$

где  $\psi_0$  — частное решение уравнения (2.1). Решение однородного уравнения (2.1)  $\psi_1(x, y)$  на контуре  $L$  удовлетворяет граничному условию  $\psi_1|_L = C - \psi_0$ .

Таким образом, задача определения функции напряжения  $\psi_1(x, y)$  свелась к внутренней задаче Дирихле для однородного уравнения (2.1). Решение краевой задачи Дирихле для однородного уравнения (2.1) будем искать в виде потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью  $\mu(s)$ :

$$\psi_1(M_0) = \int_L \mu(N) \frac{r^2}{r_A^2} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds, \quad r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к контуру  $L$  в точке  $N(x, y)$  (фиг. 2); величина  $r_A$  дается формулой (1.8).

Функция (2.4) удовлетворяет однородному уравнению (2.2) в каждой точке  $M_0(x_0, y_0)$ , не лежащей на  $L$ , стремится к нулю на бесконечности, а при переходе через контур  $L$  терпит конечный скачок [7].

Предельные значения потенциала двойного слоя (2.4) при приближении точки  $M_0$  к  $N_0$ , лежащей на кривой Ляпунова  $L$  соответственно с внутренней и внешней стороны контура  $L$ , вычисляются по формулам

$$[\psi_1(N_0)]_i = \int_L \mu(N) \frac{r_0^2}{r_A^2} \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{r_0} ds + \pi \sqrt{A} \mu(N_0) \quad (2.5)$$

$$[\psi_1(N_0)]_e = \int_L \mu(N) \frac{r_0^2}{r_A^2} \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{r_0} ds - \pi \sqrt{A} \mu(N_0) \quad (2.6)$$

В результате получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода с регулярным ядром относительно плотности  $\mu(s)$ :

$$\mu(s_0) + \frac{1}{\pi \sqrt{A}} \int_L \mu(s) \frac{r_0^2}{r_A^2} \frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{r_0} ds = \frac{1}{\pi \sqrt{A}} [C - \psi_0(s_0)] \quad (2.7)$$

Если замкнутый контур задается параметрическим уравнением (1.12), то интегральное уравнение (2.7) преобразовывается к виду

$$\mu(\alpha_0) + \int_0^{2\pi} K_2(\alpha_0, \alpha) \mu(\alpha) d\alpha = f_2(\alpha_0) \quad (2.8)$$

$$K_2(\alpha_0, \alpha) = \frac{1}{\pi \sqrt{A}} \frac{[x(\alpha) - x(\alpha_0)]y'(\alpha) - [y(\alpha) - y(\alpha_0)]x'(\alpha)}{r_A^2} \quad (2.9)$$

$$f_2(\alpha_0) = [1/2 (A_{44}x_0^2 - 2A_{45}x_0y_0 + A_{55}y_0^2) + C] / \pi \sqrt{A}$$

Для ортотропного тела, отнесенного к главным осям упругости  $x, y$  ( $A_{45}=0$ ), выражения (2.9) примут вид

$$K_2(\alpha_0, \alpha) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\alpha} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{g}[y(\alpha) - y(\alpha_0)]}{x(\alpha) - x(\alpha_0)} \right\} \quad (2.10)$$

$$f_2(\alpha_0) = (x_0^2 + gy_0^2 + 2C) / 2\pi\sqrt{g}, \quad g = A_{55}/A_{44}$$

Напряжения  $\tau_{sz}$  в каждой точке поперечного сечения стержня  $M_0(x_0, y_0)$  по направлению касательной к линии  $L_0$ , проходящей через эту точку, вычисляется по формуле [1]:

$$\tau_{sz} = -\nu n_0' \operatorname{grad}_0 \psi \quad (2.11)$$

$$\psi(M_0) = \int_L \mu(s) \frac{r^2}{r_A^2} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds + \psi_0(M_0) \quad (2.12)$$

где  $\mathbf{n}_0'$  — внешняя нормаль к линии  $L_0$  в фиксированной точке  $M_0$ .

Формулу (2.11) с учетом (2.12) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \tau_{sz}(M_0) = \nu \int_L \frac{\mu(s)}{r_A^4} & \left[ \frac{A_{44}}{A} (x-x_0)^2 \left( \frac{dx}{ds} \frac{dx_0}{ds_0} - \frac{dy}{ds} \frac{dy_0}{ds_0} - 2 \frac{A_{45}}{A_{44}} \frac{dy}{ds} \frac{dx_0}{ds_0} \right) + \right. \\ & + \frac{A_{55}}{A} (y-y_0)^2 \left( \frac{dy}{ds} \frac{dy_0}{ds_0} - \frac{dx}{ds} \frac{dx_0}{ds_0} - 2 \frac{A_{45}}{A_{55}} \frac{dx}{ds} \frac{dy_0}{ds_0} \right) + \\ & \left. + 2 \frac{A_{44}}{A} (x-x_0)(y-y_0) \left( \frac{dx}{ds} \frac{dy_0}{ds_0} - \frac{A_{55}}{A_{44}} \frac{dy}{ds} \frac{dx_0}{ds_0} \right) \right] ds + \\ & + \nu \left[ (A_{45}x_0 - A_{55}y_0) \frac{dx_0}{ds_0} + (A_{44}x_0 - A_{45}y_0) \frac{dy_0}{ds_0} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Величина крутящего момента  $M$  для  $(m+1)$ -связной области  $S$  вычисляется по формуле [1]:

$$M = 2\nu \iint_S \psi dx dy - 2\nu \sum_{h=1}^m C_h S_h \quad (2.14)$$

где  $S_h$  — площадь, ограниченная контуром  $L_h$ . На основании (1.5) и (2.1) находим формулу

$$\int_L A \operatorname{grad} \psi ds = -2AS \quad (2.15)$$

которая обобщает известную теорему Бредта [5] на прямолинейно-анизотропный стержень.

Для односвязной области  $S$  ( $C_h=0$ ) формулу для крутящего момента (2.14) с учетом (2.12) представим в виде

$$\begin{aligned} M = 2\nu \iint_S \left\{ \int_L \frac{\mu(s)}{r_A^2} \left[ (x-x_0) \frac{dy}{ds} - (y-y_0) \frac{dx}{ds} \right] ds \right\} dx_0 dy_0 - \\ - \nu [A_{44}J_{yy} - 2A_{45}J_{xy} + A_{55}J_{xx}] \end{aligned} \quad (2.16)$$

Жесткость стержня при кручении вычисляется по формуле  $C=M/\nu$ .

Задача изгиба поперечной силой прямолинейно-анизотропной консоли, имеющей плоскость упругой симметрии, решается аналогично.

**3. Пример.** В качестве примера рассмотрим кручение ортотропного ( $A_{45}=0$ ) стержня квадратного сечения с закругленными углами, контур которого  $L$  описыва-

ется уравнением

$$x=R(\cos \alpha+C_3 \cos 3 \alpha), \quad y=R(\sin \alpha-C_3 \sin 3 \alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq 2 \pi) \quad (3.1)$$

Координатные оси  $x$  и  $y$  параллельны главным направлениям упругости стержня. При положительном  $C_3$  вершины квадрата (закругленные) лежат на осях  $x$  и  $y$ , а при отрицательном  $C_3$  стороны квадрата параллельны осям координат.

Для решения рассматриваемой задачи воспользуемся методом перемещений. В данном случае ядро (1.15) равно

$$K_1(\alpha_0, \alpha) = -\frac{\sqrt{g}}{2\pi\Delta} [1+4C_3 \cos(\alpha+3\alpha_0) + 2C_3 \cos 2(\alpha-\alpha_0) - 3C_3^2(1+2 \cos(\alpha-\alpha_0))^2] \times$$

$$\times \left( \frac{1+9C_3^2-6C_3 \cos 4\alpha}{1+9C_3^2-6C_3 \cos 4\alpha_0} \right)^{1/2}$$

$$\Delta = \left[ \sin \frac{\alpha+\alpha_0}{2} + C_3 \sin 3 \frac{\alpha+\alpha_0}{2} (1+2 \cos(\alpha-\alpha_0)) \right]^2 +$$

$$+ g \left[ \cos \frac{\alpha+\alpha_0}{2} - C_3 \cos 3 \frac{\alpha+\alpha_0}{2} (1+2 \cos(\alpha-\alpha_0)) \right]^2 \quad (3.2)$$

$$f_1(\alpha_0) = -\frac{R}{2\pi\sqrt{g}} \frac{[(1+2C_3)(1-g) \sin 2\alpha_0 + 4C_3(1+g) \sin 4\alpha_0 + 3C_3^2(1-g) \sin 6\alpha_0]}{\sqrt{1+9C_3^2-6C_3 \cos 4\alpha_0}}$$

$$g = \frac{A_{55}}{A_{44}}$$

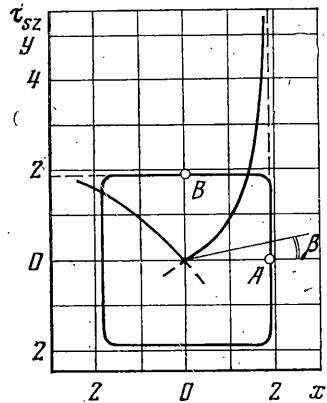
Для приближенного решения интегрального уравнения (1.13), используя квадратную формулу Гаусса, заменим его следующей конечной системой линейных алгебраических уравнений [8]:

$$\mu^{\sim}(\alpha_k) + \pi \sum_{i=1}^n A_i K_1(\alpha_k, \alpha_i) \mu^{\sim}(\alpha_i) = f_1(\alpha_k) \quad (k=1, n) \quad (3.3)$$

где  $\alpha_i = \pi(1+x_i)$ ,  $x_i$  — узлы Гаусса (нули полинома Лежандра),  $A_i$  — весовые коэффициенты Гаусса, составленные для интеграла  $(-1, 1)$  [9].

Решив систему уравнений (3.3), находим приближенные значения  $\mu^{\sim}(\alpha_i)$  искомой плотности  $\mu(\alpha_i)$  ( $i=1, n$ ) в отдельных точках. По этим значениям приближенно величины плотности  $\mu(\alpha)$  в остальных точках могут быть найдены интерполированием. В данном случае удобно воспользоваться равенством [8]:

$$\mu^{\sim}(\alpha) = f_1(\alpha) - \pi \sum_{i=1}^n A_i K_1(\alpha, \alpha_i) \mu^{\sim}(\alpha_i) \quad (3.4)$$



Фиг. 4

Решалась система уравнений (3.3) порядка  $96 \times 96$  при  $C = -1/9$ ,  $g = 0,1; 0,5; 1; 2; 5; 10$ , а по формуле (1.17) вычислялись напряжения  $\tau_{sz}$  в отдельных точках сечения стержня, достаточно близких к контуру  $L$ , и в точках, лежащих на координатных осях  $x$  и  $y$ .

Ниже приводятся численные значения касательного напряжения  $\tau_{sz}$  на средних сторон криволинейного квадратного сечения стержня и жесткость стержня  $C$  при кручении для некоторых значений  $g$  ( $C_3 = -1/9$ ),  $a = 9/16 \cdot R$  — длина стороны кри-

волинейного квадрата по осям  $x$  и  $y$

$g=A_{55}/A_{44}$	0,1	0,5	1	2	5	10
$\tau_{yz}^A a^3/M$	5,39	4,74	4,30	3,73	2,99	2,46
$\tau_{xz}^B a^3/M$	2,46	3,73	4,30	4,74	5,06	5,39
$C/A_{55}a^4$	0,408	0,208	0,151	0,105	0,059	0,041

Численные значения напряжения  $\tau_{sn}$  в некоторых точках, достаточно близких к сторонам сечения стержня, определялись для  $g=0,1$  ( $C_3=-1/9$ ,  $\beta$  — полярный угол)

$\beta$ , град	0	20,8	35,2	45	54,8	69,2	90
$\tau_{sn}a^3/M$	5,39	4,85	2,90	1,96	2,02	2,31	2,46

На фиг. 4 изображена эпюра изменения касательного напряжения вдоль осей симметрии сечения стержня для  $g=0,1$ ,  $C_3=-1/9$ .

В изотропном ( $g=1$ ) стержне с прямоугольным квадратным сечением  $\tau_{yz}^A = -\tau_{xz}^B = 4,804 Ma^{-3}$ ,  $C=0,141 Ga^4$  [1, 3].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
2. Мухомелишвили Н. Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
3. Лехницкий С. Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука, 1974. 240 с.
4. Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1976. 534 с.
5. Композиционные материалы. Т. 7. Ч. 1. Анализ и проектирование конструкций. М.: Машиностроение, 1978. 334 с.
6. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. 256 с.
7. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
8. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Гостехиздат, 1952. 695 с.
9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 830 с.

Львов

Поступила в редакцию  
22.XI.1982