

УДК 624.07:534.1

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЛАГРАНЖА

СЕЙРАНЯН А. П.

Задача об отыскании распределения материала по оси стержня, максимизирующего значение критической силы потери устойчивости при заданном объеме и длине стержня, была поставлена Ж.-Л. Лагранжем [1], аналитическое решение этой задачи получено Т. Клаузенем [2] для случаев консольного и шарнирного закрепления стержня.

Е. Л. Николаи [3] обобщил это решение введением ограничения на минимально допустимое значение площади поперечного сечения стержня. В [4, 5] рассмотрены различные формы поперечного сечения, в [6] показано, что для выпуклых поперечных сечений оптимальный стержень имеет форму равностороннего треугольника, площадь которого изменяется по длине стержня подобно оптимальным стержням круглого сечения. Случай упругой заделки исследован в [7].

В [8] было получено аналитическое решение задачи Лагранжа для других видов граничных условий: защемление — шарнирное опирание и защемление — защемление. Однако в [9] показано, что решение, полученное в [8] для стержня, защемленного с обоих концов, неверно, поскольку этому решению отвечает более низкая критическая нагрузка и иная форма потери устойчивости. Показано также, что численное решение задачи Лагранжа в этом случае приводит к необходимости постановки задачи оптимизации с двукратной критической силой, при которой существуют две различные формы потери устойчивости стержня. Наличие кратности критической силы усложняет вывод условия оптимальности и решение задачи оптимизации. В то же время возникает вопрос о возможности построения оптимальных решений с кратной критической нагрузкой (несколькими формами потери устойчивости) и для других видов граничных условий.

Интерес к задаче Лагранжа не ослабевает (см., например, [10]).

В публикуемой работе показано, что из граничных условий типа шарнир — шарнир, защемление — шарнир, защемление — свободный конец, защемление — защемление лишь последний случай допускает кратность критической силы, причем кратность не превышает значения, равного двум. Этот результат справедлив для произвольного распределения материала стержня $h(x) > 0$.

Для различных видов формы поперечного сечения стержня получены аналитические решения задачи Лагранжа для стержней, защемленных с обоих концов. Эти решения характеризуются двумя различными формами потери устойчивости. Подробно исследованы свойства этих решений.

1. Основные соотношения. Рассмотрим прямой тонкий упругий стержень с переменными, но геометрически подобными и одинаково ориентированными сечениями при наличии сжимающей продольной силы P . Потеря устойчивости стержня описывается уравнением

$$(EIy''')'' + Py'' = 0 \quad (-1/2 < x < 1/2) \quad (1.1)$$

где E — модуль Юнга, $I(x)$ — момент инерции сечения относительно оси z , перпендикулярной к плоскости изгиба, $y(x)$ — прогиб стержня (фиг. 1). Штрихом обозначена операция дифференцирования по переменной x .

Момент инерции $I(x)$ и площадь поперечного сечения стержня $A(x)$ связаны зависимостью

$$I(x) = kA^\alpha(x) \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

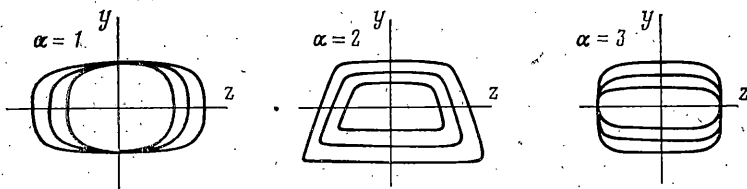
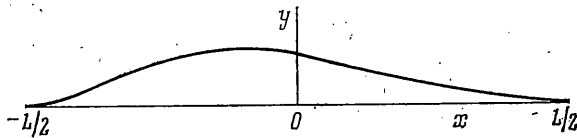
Это соотношение справедливо для геометрически подобных сечений, $\alpha = 1$ и $\alpha = 3$ описывают случаи, когда изменяется лишь один линейный размер сечения, а второй — фиксирован; случай $\alpha = 2$ соответствует изме-

нению обоих линейных размеров сечения (фиг. 1). Например, если стержень имеет прямоугольное сечение и варьируется только его высота $H(x)$, а ширина B фиксирована, то $I(x) = 1/12 BH^3(x)$, следовательно, в этом случае $\alpha=3$, $k=1/(12B^2)$. Если варьируется только ширина прямоугольного сечения, то $I(x) = 1/12 H^3 B(x)$ и $\alpha=1$, $k=1/12 H^2$. Для круглого поперечного сечения стержня имеем $I(x) = 1/4 \pi R^4(x) = A^2(x)/(4\pi)$, откуда $\alpha=2$, $k=1/(4\pi)$.

Объем стержня описывается интегралом

$$V = \int_{-L/2}^{L/2} A(x) dx \quad (1.3)$$

Введем для удобства безразмерные величины $x^\circ = x/L$, $y^\circ = y/L$, $h(x) = A(x)L/V$, $\lambda = PL^{2+\alpha}/(EkV^\alpha)$ и используем (1.2). В результате



Фиг. 1

уравнение (1.1) и соотношение (1.3) примут вид (полики над символами x° , y° здесь и ниже опускаем)

$$(h^\alpha y'')'' + \lambda y'' = 0 \quad (-1/2 < x < 1/2) \quad (1.4)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} h dx = 1 \quad (1.5)$$

Граничные условия для стержня, защемленного с обоих концов, описываются выражениями

$$y(-1/2) = y'(1/2) = 0, \quad y(1/2) = y'(-1/2) = 0 \quad (1.6)$$

Ниже будут рассмотрены и другие виды граничных условий.

Задача оптимизации (Лагранжа) заключается в отыскании неотрицательной функции площади поперечного сечения $h_0(x)$, максимизирующей критическую силу потери устойчивости (минимальное собственное значение λ задачи (1.4), (1.6)) и удовлетворяющей условию постоянства объема (1.5).

Из соотношений (1.4)–(1.6) легко видеть, что собственное значение λ и безразмерный объем $v = \int h dx$ являются однородными функционалами по $h(x)$ со степенями однородности $\gamma = \alpha$ и $\gamma = 1$ соответственно. Отсюда, используя результаты [11], заключаем, что решение $h_d(x)$ двойственной

задачи — минимизации объема стержня при фиксированной силе потери устойчивости $\lambda=1$ — отличается от решения сформулированной выше задачи $h_0(x)$ лишь постоянным множителем

$$h_d(x) = \lambda_0^{-1/\alpha} h_0(x), \quad h_0(x) = h_d(x) \int_{-1/2}^{1/2} h_d(x) dx, \quad \lambda_0 = V_d^{-\alpha}, \quad V_d = \int_{-1/2}^{1/2} h_d(x) dx \quad (1.7)$$

где λ_0 — минимальное собственное значение, соответствующее функции $h_0(x)$.

2. Сведение к уравнению второго порядка. Прежде всего заметим, что задача на собственные значения (1.4), (1.6) является самосопряженной и положительно-определенной для непрерывных положительных функций $h(x)$. Собственные значения этой задачи представляются выражением

$$\lambda = \int_{-1/2}^{1/2} h^\alpha y'^2 dx \bigg/ \int_{-1/2}^{1/2} y'^2 dx \quad (2.1)$$

Поэтому для рассматриваемых функций $h(x)$ имеет место теорема о дискретном спектре [12], $\lambda=0$ не является собственным значением этой задачи, что легко проверить. Это остается справедливым и для других видов граничных условий, рассмотренных в [8].

Для сведения задачи на собственные значения (1.4), (1.6) к задаче с уравнением второго порядка используем замену [8]: $M = h^\alpha y''$, где M имеет смысл изгибающего момента. Тогда уравнение (1.4) принимает вид

$$M'' + \lambda h^{-\alpha} M = 0 \quad (-1/2 < x < 1/2) \quad (2.2)$$

Граничные условия для функции M получим подставляя в (1.4) выражение для M и интегрируя полученное уравнение с учетом граничных условий (1.6) при $x = \pm 1/2$. В результате имеем

$$y'(x) = [M'(-1/2) - M'(x)]/\lambda, \quad y(x) = [(x+1/2)M'(-1/2) - M(x) + M(-1/2)]/\lambda \quad (2.3)$$

Используя условия (1.6) при $x = \pm 1/2$, из (2.3) получим граничные условия для функции $M(x)$ [8]. Эти условия для случая защемления стержня с обоих концов имеют вид

$$M(1/2) = M(-1/2) + M'(-1/2), \quad M'(-1/2) = M'(1/2) \quad (2.4)$$

Для случаев защемление — шарнирное опирание и защемление — свободный конец эти условия описываются соотношениями [8]:

$$M'(-1/2) + M(-1/2) = 0, \quad M(1/2) = 0 \quad (2.5)$$

$$M'(-1/2) = 0, \quad M(1/2) = 0 \quad (2.6)$$

Задача (2.2) с граничными условиями (2.4), (2.5) или (2.6) является самосопряженной. Граничные условия (2.5), (2.6) — условия типа Штурма, а (2.4) — пример смешанных граничных условий [13].

Таким образом, самосопряженная и положительно-определенная задача на собственные значения (1.4) с различными граничными условиями сводится к самосопряженной задаче на собственные значения (2.2) с граничными условиями (2.4), (2.5) или (2.6) с дифференциальным оператором второго порядка. Определив собственные функции $M(x)$ и собственные значения $\lambda \neq 0$, можно посредством (2.3) однозначно найти соответствующую функцию $y(x)$ и наоборот.

Тем не менее в случае граничных условий (2.4) и (2.5) указанные задачи на собственные значения не являются полностью эквивалентными. Причина отличия заключается в том, что задача (2.2), (2.4) имеет двукратное нулевое собственное значение с соответствующими собственными функциями $M=1$ и $M=x+1/2$, а задача (2.2),

(2.5) обладает однократным нулевым собственным значением с собственной функцией $M = 1/2 - x$.

В задаче (2.2), (2.6) $\lambda = 0$ не является собственным значением, поэтому указанные задачи в этом случае полностью эквивалентны.

Применяя к задаче (2.2) с граничными условиями (2.5) или (2.6) осцилляционную теорему Штурма [14, с. 263], получим, что существует бесконечное множество собственных значений, все собственные значения действительны и могут быть расположены в виде неограниченно возрастающей монотонной последовательности, каждое собственное значение имеет кратность 1 (таким образом, все собственные функции $M_n(x)$, соответствующие λ_n , отличаются лишь на постоянный множитель); каждая собственная функция M_n имеет в открытом интервале $(-1/2, 1/2)$ ровно n нулей. Заметим, что в случае (2.5) $\lambda_0 = 0, M_0 = 1/2 - x$.

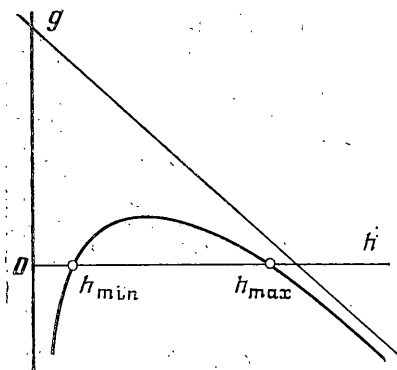
К задаче (2.2), (2.4) применима другая теорема [13, с. 265], согласно которой все собственные значения действительны и их совокупность может быть расположена в виде двух неограниченно возрастающих последовательностей $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ и $\lambda_1^0 < \lambda_2^0 < \lambda_3^0 < \dots$, причем $\lambda_n \leq \lambda_n^0 < \lambda_{n+1}$. Если $\lambda_n = \lambda_n^0$, то это число представляет собой собственное значение кратности 2. Если $\lambda_n < \lambda_n^0$, то каждое из этих чисел есть простое собственное значение, т. е. все собственные функции $M_n(x)$, соответствующие λ_n , отличаются постоянным множителем, и то же самое справедливо для $M_n^0(x)$, соответствующих λ_n^0 . Если $N(n)$ означает число лежащих на полуоткрытом интервале $-1/2 < x \leq 1/2$ нулей собственных функций M_n, M_n^0 , соответствующих собственным значениям λ_n, λ_n^0 , то $N(n)$ равно $2n - 2$ или $2n - 1$. Заметим, что в данном случае $\lambda_1 = \lambda_1^0 = 0, M_1 = 1, M_1^0 = x + 1/2$.

Таким образом, кратность собственных значений (критической силы потери устойчивости) может возникать лишь в случае граничных условий (2.4), т. е. для стержня, заземленного с обоих концов, причем эта кратность не превышает значения 2. Этот результат справедлив для произвольного распределения материала $h(x) > 0, x \in [-1/2, 1/2]$.

3. Условия оптимальности. Рассмотрим сформулированную в п. 1 задачу максимизации критической силы потери устойчивости стержня заданного объема, заземленного с обоих концов, используя задачу на собственные значения (2.2), (2.4) в качестве исходной. С учетом результатов п. 2

задача оптимизации сводится к максимизации второго собственного значения λ_2 задачи (2.2), (2.4) с изопериметрическим условием (1.5). Варьируемой функцией служит $h(x)$, α — параметр задачи ($\alpha = 1, 2, 3$).

Решение этой задачи, полученное в [8] и основанное на предположении об однократности оптимального собственного значения, оказалось неверным, поскольку существует более низкое значение критической силы потери устойчивости [9]. Решение той же задачи, полученное численно в [9] при предположении об однократности критической нагрузки и представленное на фиг. 2 в [9], также не является оптимальным, поскольку ему отвечают две



Фиг. 2

линейно-независимые формы потери устойчивости $y_1(x)$ и $y_1(1-x)$. Это противоречит первоначальному предположению об однократности критической силы.

Таким образом, все решения задачи оптимизации, основанные на предположении об однократной критической силе потери устойчивости для стержня, заземленного с обоих концов, приводят к противоречию с исходным предположением, либо обладают более низким значением критической силы потери устойчивости (случай $\alpha = 1$ является особым и будет рассмотрен ниже).

Поэтому рассмотрим задачу оптимизации, предполагая двукратность максимизируемого собственного значения. Основная трудность при этом заключается в выводе необходимого условия экстремума. Видно, что условие экстремума, полученное в [9], не является инвариантным относительно линейного преобразования собственных функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$,

отвечающих двукратному собственному значению λ [9, формула (13)]. Действительно, любая линейная комбинация этих функций также является собственной функцией, отвечающей тому же значению λ . Подстановка линейной комбинации $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в формулу (13) в [9] приводит к другому условию экстремума.

Недавно в [15] были получены необходимые условия экстремума для задач оптимизации собственных значений с учетом их кратности. Эти условия применительно к рассматриваемой задаче оптимизации имеют вид

$$\delta_1 M_1^2 + \delta_2 M_2^2 + \delta_3 M_1 M_2 = \delta_0 h^{\alpha+1} \quad (\delta_1 \delta_2 \geq \delta_3^2/4) \quad (3.1)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} h^{-\alpha} M_i M_j dx = \delta_{ij} \quad (i, j=1, 2) \quad (3.2)$$

где $\delta_i (i=0, 1, 2, 3)$ — константы, $M_1(x)$, $M_2(x)$ — собственные функции, отвечающие двукратному собственному значению λ , δ_{ij} — символ Кронекера.

Заметим, что всегда можно выбрать базисные функции M_1 и M_2 таким образом, чтобы в (3.1) отсутствовал член $\delta_3 M_1 M_2$. Действительно, пусть существуют собственные функции M_1 , M_2 и константы δ_i , удовлетворяющие (3.1), (3.2). Сделаем преобразование базиса:

$$M_1^* = M_1 \cos \eta - M_2 \sin \eta, \quad M_2^* = M_1 \sin \eta + M_2 \cos \eta \quad (3.3)$$

где η — некоторое число. Условие (3.2) при этом преобразовании выполняется при любых η . Выразим M_1 , M_2 через M_1^* , M_2^* посредством (3.3) и подставим в (3.1). В результате получим выражение для новой константы $\delta_3^* = (\delta_1 - \delta_2) \sin 2\eta + \delta_3 \cos 2\eta$. Отсюда следует $\delta_3^* = 0$ при $\eta = 1/2 \arctg[\delta_3 / (\delta_2 - \delta_1)]$.

В новом базисе выражение (3.1) принимает вид

$$\delta_1 M_1^2 + \delta_2 M_2^2 = \delta_0 h^{\alpha+1} \quad (\delta_1 \delta_2 \geq 0), \quad \int_{-1/2}^{1/2} h^{-\alpha} M_i M_j dx = \delta_{ij} \quad (i, j=1, 2) \quad (3.4)$$

Звездочки над символами здесь и ниже опускаем. Поскольку константы δ_1 и δ_2 согласно (3.4) имеют одинаковые знаки, то ввиду положительности функции $h(x)$ константа δ_0 имеет тот же знак, что δ_1 , δ_2 . Поэтому, введя обозначение $M_1^{\sim} = (\delta_1 / \delta_0)^{1/2} M_1$, $M_2^{\sim} = (\delta_2 / \delta_0)^{1/2} M_2$, придем к условию экстремума, которым будет пользоваться в дальнейшем (галочки над символами здесь и ниже опускаем)

$$M_1^2 + M_2^2 = h^{\alpha+1} \quad (3.5)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} h^{-\alpha} M_1 M_2 dx = 0 \quad (3.6)$$

Выпишем также остальные соотношения, необходимые для решения задачи оптимизации:

$$M_1'' + \lambda M_1 h^{-\alpha} = 0, \quad M_2'' + \lambda M_2 h^{-\alpha} = 0 \quad (-1/2 < x < 1/2) \quad (3.7)$$

$$M_i'(-1/2) = M_i'(1/2), \quad M_i'(-1/2) + M_i(-1/2) = M_i(1/2) \quad (i=1, 2) \quad (3.8)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} h dx = 1 \quad (3.9)$$

Из соотношений (3.5) — (3.9) можно определить функции $h(x)$, $M_1(x)$, $M_2(x)$ и собственное значение λ , реализующие решение задачи максимизации критической силы потери устойчивости стержня заданного объема, защемленного с обоих концов.

4. **Решение задачи оптимизации**¹. Умножим первое уравнение (3.7) на M_1' , а второе — на M_2' и сложим их почленно. В результате имеем $1/2(M_1'^2 + M_2'^2)' + 1/2\lambda(M_1^2 + M_2^2)' / h^\alpha = 0$. С учетом условия (3.5) получим первый интеграл

$$M_1'^2 + M_2'^2 + \lambda(\alpha + 1)h = C_1 = \text{const} \quad (4.1)$$

где C_1 — константа интегрирования. Для получения второго интеграла умножим первое уравнение (3.7) на M_2 , а второе — на M_1 и вычтем одно из другого. Таким образом получим второй интеграл системы уравнений (3.7)

$$M_1''M_2 - M_2''M_1 = (M_1'M_2 - M_2'M_1)' = 0 \quad (4.2)$$

$$M_1'M_2 - M_2'M_1 = C_2 = \text{const}$$

Заметим, что константа C_2 не равна нулю. Действительно, в противном случае, интегрируя (4.2), придем к линейной зависимости собственных функций M_1 и M_2 , что исключается условием ортогональности (3.6).

Перейдем к интегрированию уравнений (4.1), (4.2). Поскольку функции M_1 , M_2 , h связаны соотношением (3.5), то удобно воспользоваться заменой

$$M_1 = h^{1/2(\alpha+1)}(x) \sin \theta(x), \quad M_2 = h^{1/2(\alpha+1)}(x) \cos \theta(x) \quad (4.3)$$

при которой (3.5) выполняется тождественно. Подставляя (4.3) в (4.1) и (4.2) и выполняя несложные преобразования, получим уравнения относительно функций $h(x)$ и $\theta(x)$:

$$1/4(\alpha+1)^2 h^{\alpha-1} h'^2 + h^{\alpha+1} \theta'^2 + \lambda(\alpha+1)h = C_1' \quad (4.4)$$

$$h^{\alpha+1} \theta' = C_2 \quad (4.5)$$

Выразив θ' из (4.5) и подставив в (4.4), получим

$$1/4(\alpha+1)^2 h^{\alpha-1} h'^2 + C_2^2 h^{-(\alpha+1)} + \lambda(\alpha+1)h = C_1 \quad (4.6)$$

Из этого выражения следует, что функция $h(x)$, реализующая решение задачи оптимизации с двукратной критической нагрузкой, на замкнутом отрезке $[-1/2, 1/2]$ в нуль не обращается, поскольку выше было показано, что $C_2 \neq 0$. Из (4.6) также следует $C_1 > 0$.

Из уравнения (4.6) имеем

$$h' = \pm 2\sqrt{C_1 h^{\alpha+1} - \lambda(\alpha+1)h^{\alpha+2} - C_2^2} / [h^\alpha(\alpha+1)] \quad (4.7)$$

Интегрируя это уравнение, получим x как функцию от h :

$$x - x_0 = \pm \left(\frac{\alpha+1}{2} \right) \int_{h_0}^h \frac{t^\alpha dt}{\sqrt{C_1 t^{\alpha+1} - \lambda(\alpha+1)t^{\alpha+2} - C_2^2}} \quad (4.8)$$

где h_0 — значение функции h при $x = x_0$, $x_0 \in [-1/2, 1/2]$. Функция, стоящая справа в (4.8), представляет собой эллиптический интеграл при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$.

Определив функцию $h(x)$, из уравнения (4.5) найдем

$$\theta(x) - \theta_0 = C_2 \int_{x_0}^x \frac{ds}{h^{\alpha+1}(s)}, \quad \theta_0 = \theta(x_0) \quad (4.9)$$

Угол θ можно выразить как функцию h . Действительно, из (4.5) имеем $\theta' = (d\theta/dh)(dh/dx) = C_2/h^{\alpha+1}$. Подставив сюда выражение (4.7) и про-

¹ Результаты п. 4 получены совместно с Н. М. Гура.

интегрировав, получим

$$\theta - \theta_0 = \pm \left(\frac{\alpha + 1}{2} \right) C_2 \int_{h_0}^h \frac{dt}{t \sqrt{C_1 t^{\alpha+1} - \lambda(\alpha+1)t^{\alpha+2} - C_2^2}}$$

Эта функция также является эллиптическим интегралом при $\alpha=1$ и $\alpha=2$.

Перейдем теперь к выводу граничных условий для функций $h(x)$, $\theta(x)$. Для удобства последующих выкладок введем обозначения $h(-1/2) = h_-$, $h(1/2) = h_+$, $\theta(-1/2) = \theta_-$, $\theta(1/2) = \theta_+$.

Прежде всего из интеграла (4.1) и граничных условий (3.8) следует $h_- = h_+$, тогда из (4.5) получим $\theta_- = \theta_+$. С учетом этих равенств из (4.4) следует $h_-'^2 = h_+'^2$. Таким образом

$$h_- = h_+, \quad h_-'^2 = h_+'^2, \quad \theta_- = \theta_+ \quad (4.10)$$

Используем теперь граничные условия (3.8). Подставив в них выражения (4.3), будем иметь ($\kappa = 1/2(\alpha+1)$, $\gamma = 1/2(\alpha-1)$):

$$h_-^* \sin \theta_- + \kappa h_-'^* h_-'^* \sin \theta_- + h_-^* \cos \theta_- \theta_-'^* = h_+^* \sin \theta_+ \quad (4.11)$$

$$h_-^* \cos \theta_- + \kappa h_-'^* h_-'^* \cos \theta_- - h_-^* \sin \theta_- \theta_-'^* = h_+^* \cos \theta_+$$

Умножим первое уравнение (4.11) на $\cos \theta_-$, а второе — на $(-\sin \theta_-)$ и сложим их почленно. С учетом (4.10) получим

$$\theta_+'^* = \theta_-'^* = \sin(\theta_+ - \theta_-) \quad (4.12)$$

Теперь умножим первое уравнение (4.11) на $\sin \theta_-$, а второе — на $\cos \theta_-$ и сложим их. После несложных преобразований с учетом $h_+ = h_-$ придем ко второму граничному условию

$$h_-'^* = -(2h_-/\kappa) \sin^2 1/2(\theta_+ - \theta_-) < 0 \quad (4.13)$$

Последнее неравенство справедливо вследствие необращения в нуль $h(x)$ на замкнутом отрезке $[-1/2, 1/2]$ и неравенства $\sin^2 1/2(\theta_+ - \theta_-) \neq 0$, поскольку в противном случае согласно (4.12) $\theta_+'^* = 0$ и согласно (4.5) $C_2 = 0$, что невозможно. Итак, $h_-'^* < 0$.

Докажем теперь, что $h_+'^* = -h_-'^*$. Для этого надо показать, что второй случай $h_+'^* = h_-'^*$, допускаемый вторым условием (4.10), невозможен. Действительно, допустив этот случай, из граничных условий (3.8) с использованием соотношений (4.3) и условий (4.10) получим уравнения

$$\kappa h_-'^* h_-'^* (\sin \theta_+ - \sin \theta_-) = h_-^* \theta_-'^* (\cos \theta_- - \cos \theta_+) \quad (4.14)$$

$$\kappa h_-'^* h_-'^* (\cos \theta_+ - \cos \theta_-) = h_-^* \theta_-'^* (\sin \theta_+ - \sin \theta_-)$$

Перемножив эти уравнения почленно, придем к равенству

$$(\sin \theta_+ - \sin \theta_-) (\cos \theta_+ - \cos \theta_-) [\kappa^2 h_-^{\alpha-1} h_-'^2 + h_-^{\alpha+1} \theta_-'^2] = 0$$

Выражение в квадратных скобках в нуль не обращается, поскольку ввиду (4.5) $\theta_-'^* = \theta_+'^* \neq 0$ и вследствие (4.13) $h_-'^* < 0$.

Следовательно, либо $\sin \theta_+ = \sin \theta_-$, либо $\cos \theta_+ = \cos \theta_-$. Пусть, например, $\sin \theta_+ = \sin \theta_-$. Тогда из уравнений (4.14) следует $\cos \theta_+ = \cos \theta_-$. Аналогично, из равенства $\cos \theta_+ = \cos \theta_-$ следует $\sin \theta_+ = \sin \theta_-$. В том и другом случае это означает $\theta_+ = \theta_- + 2\pi k$ ($k=1, 2, \dots$). Отсюда $\sin(\theta_+ - \theta_-) = 0$ и согласно (4.12), (4.13) $\theta_+'^* = 0$, $h_-'^* = 0$. С учетом интеграла (4.5) отсюда следует $C_2 = 0$, что означает отсутствие двукратного собственного значения.

Таким образом, остается единственный случай $h_+'^* = -h_-'^*$. Из (4.13) тогда найдем

$$h_+'^* = (2h_+/\kappa) \sin^2 1/2(\theta_+ - \theta_-) > 0 \quad (4.15)$$

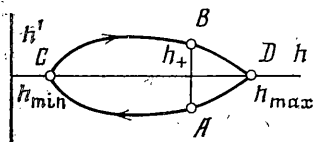
Выразим теперь постоянные C_1 и C_2 через значения h_+ , θ_+ , θ_- . Для этого подставим выражение для θ_+ из (4.12) в соотношение (4.5) при $x = -1/2$. В результате будем иметь

$$C_2 = h_+^{\alpha+1} \sin(\theta_+ - \theta_-) \quad (4.16)$$

Далее, используя соотношения (4.16) и (4.15) в (4.6), записанном при $x = 1/2$, и произведя несложные преобразования, получим выражение для C_1

$$C_1 = 4h_+^{\alpha+1} \sin^2 1/2(\theta_+ - \theta_-) + \lambda(\alpha+1)h_+ \quad (4.17)$$

Рассмотрим интеграл (4.6). Качественный вид функции $g(h) = -C_1 - \lambda(\alpha+1)h - C_2^2/h^{\alpha+1}$ при положительных h представлен на фиг. 2.



Фиг. 3

Из вида этой кривой следует, что $g(h)$ имеет два положительных корня h_{\min} и h_{\max} , $g(h) > 0$ при $h_{\min} < h < h_{\max}$. Принимая во внимание приведенные выше соображения, а также граничные условия $h(-1/2) = h_- = h_+ = h(1/2)$ и (4.13), (4.15), проиллюстрируем интегрирование (4.6) на фазовой плоскости h' , h (фиг. 3). Замкнутая кривая, изображенная на этой фигуре, симметрична относительно оси h . Тогда A соответствует значению $x = -1/2$, а точка B — значению $x = 1/2$. Интегрирование уравнения (4.6) от $x = -1/2$ до $x = 1/2$ соответствует движению по замкнутой кривой от точки A до точки B по часовой стрелке. Точки C и D соответствуют точкам переключения знаков производных в уравнениях (4.7), (4.8).

Число этих переключений нечетное, общее их число априори неизвестно. Из соотношений (4.7), (4.8) и симметрии граничных условий $h_+ = h_-$, $h_+' = -h_-'$ следует четность функции

$$h(x) = h(-x) \quad (x \in [-1/2, 1/2]) \quad (4.18)$$

Так как $h(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то $h'(0) = 0$. Следовательно, $h(0) = h_{\min}$ или $h(0) = h_{\max}$.

Рассмотрим теперь соотношение (4.9), положив $x_0 = 0$, $\theta_0 = \theta(0)$. Тогда функция

$$\varphi(x) = \theta(x) - \theta_0 = C_2 \int_0^x h^{-(\alpha+1)}(s) ds$$

являясь интегралом от четной функции, будет нечетной функцией. Удобно положить $\theta_0 = 0$, тогда $\theta(x)$ станет нечетной функцией. В этом случае $M_1 = -h^*(x) \sin \theta(x)$ и $M_2 = h^*(x) \cos \theta(x)$ станут соответственно нечетной и четной функциями и соотношение ортогональности (3.6), неиспользованное до сих пор, удовлетворится. Заметим, что граничные условия (4.12), (4.13), (4.15) и соотношения (4.16), (4.17) определяются лишь разностью $\theta_+ - \theta_-$ и не зависят от выбора постоянной интегрирования θ_0 . Таким образом

$$\theta(x) = C_2 \int_0^x h^{-(\alpha+1)}(s) ds, \quad \theta_- = -\theta_+ \quad (4.19)$$

Эта функция является строго монотонной.

Что касается изопериметрического условия постоянства объема (3.9), которое также не было использовано до сих пор, то удобно сначала положить $\lambda = 1$ и получить решение двойственной задачи — минимизации объема стержня при фиксированной критической силе потери устойчивости $\lambda = 1$, а затем произвести пересчет по формуле (1.7).

5. Результаты. Выпишем окончательные соотношения, необходимые для решения задачи, выразив их через две неизвестные постоянные h_+ и θ_+ :

$$\lambda=1 \quad (\alpha=1, 2, 3), \quad C_1=4h_+^{\alpha+1} \sin^2 \theta_+ + \lambda(\alpha+1)h_+, \quad C_2=h_+^{\alpha+1} \sin 2\theta_+ \quad (5.1)$$

$$g(h) = C_1 - \lambda(\alpha+1)h - C_2^2/h^{\alpha+1} = 4h_+^{\alpha+1} \sin^2 \theta_+ [1 - \cos^2 \theta_+ (h_+/h)^{\alpha+1}] + \lambda(\alpha+1)(h_+ - h) \quad (5.2)$$

Уравнение $g(h)=0$ при любых $h_+>0$, $\sin 2\theta_+ \neq 0$ имеет два вещественных положительных корня h_{\min} и h_{\max} , $0 < h_{\min} < h_+ < h_{\max}$. Заметим, что $\sin 2\theta_+ \neq 0$, так как $C_2 \neq 0$.

Выпишем формулы, по которым ведется интегрирование уравнения (4.6) с тремя точками переключения

$$x = -\frac{1}{2} + \int_h^{h_+} f(t) dt \quad (h_{\min} \leq h \leq h_+)$$

$$x = -\frac{1}{2} + \int_{h_{\min}}^{h_+} f(t) dt + \int_{h_{\min}}^h f(t) dt \quad (h_{\min} \leq h \leq h_{\max}) \quad (5.3)$$

$$x = -\frac{1}{2} + \int_{h_{\min}}^{h_+} f(t) dt + \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} f(t) dt + \int_h^{h_{\max}} f(t) dt \quad (h_{\min} \leq h \leq h_{\max})$$

$$x = -\frac{1}{2} + \int_{h_{\min}}^{h_+} f(t) dt + 2 \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} f(t) dt + \int_{h_{\min}}^h f(t) dt \quad (h_{\min} \leq h \leq h_+)$$

$$f(t) = \kappa t^\alpha / \sqrt{C_1 t^{\alpha+1} - \lambda(\alpha+1)t^{\alpha+2} - C_2^2} \quad (5.4)$$

При $x=1/2$ функция $h=h_+$; отсюда получается первое трансцендентное уравнение относительно h_+ , θ_+ :

$$1 = 2 \int_{h_{\min}}^{h_+} f(t) dt + 2 \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} f(t) dt \quad (5.5)$$

Аналогично описывается интегрирование с произвольным числом переключений K . При этом получается трансцендентное уравнение

$$1 = 2 \int_{h_{\min}}^{h_+} f(t) dt + (K-1) \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} f(t) dt \quad (K=1, 3, 5 \dots) \quad (5.6)$$

При интегрировании удобно воспользоваться четностью функции $h(x)$. Функция $\theta(x)$ определяется интегралом

$$\theta(x) = C_2 \int_0^x h^{-(\alpha+1)}(s) ds, \quad \theta(-x) = -\theta(x) \quad (5.7)$$

Второе трансцендентное уравнение относительно h_+ , θ_+ определяется условием

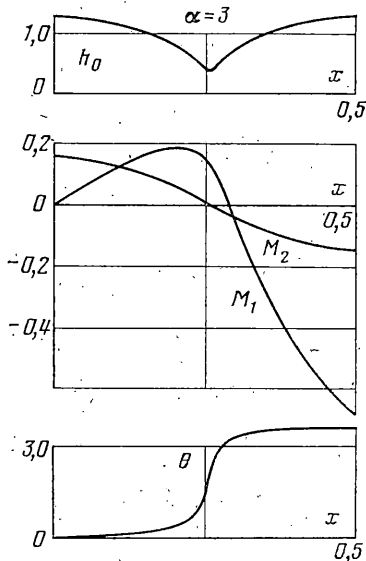
$$\theta_+ = C_2 \int_0^{1/2} h^{-(\alpha+1)}(s) ds \quad (5.8)$$

Так как согласно результатам п. 2 функции $M_1(x)$, $M_2(x)$ должны иметь два и три узла, то согласно (4.3) $\pi < \theta_+ < 3/2\pi$.

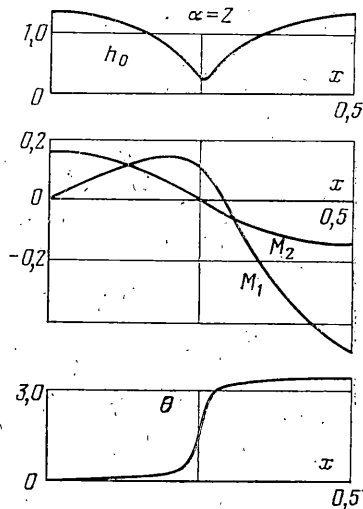
Опишем кратко алгоритм вычислений с фиксированным числом переключений K : задаются значения h_+ , θ_+ ; по формулам (5.4) вычисляются константы C_1 и C_2 ; с использованием (5.2) решается уравнение $g(h)=0$ и определяются h_{\min} и h_{\max} ; вычисляется функция (5.4), производится интегрирование согласно (5.3) и находится функция $h(x)$; из (5.7) определяется функция $\theta(x)$; вычисляется невязка уравнений (5.6), (5.8).

Далее производится выбор новых значений h_+ , θ_+ и осуществляется переход к первому шагу алгоритма и т. д.

Интегрирование уравнения (5.3) производилось по формуле Симпсона с использованием асимптотик в окрестности значений h_{\min} , h_{\max} , поскольку в этих точках



Фиг. 4



Фиг. 5

функция $f(t)$ имеет интегрируемую особенность типа $(t-h_{\min})^{-1/2}$, $(h_{\max}-t)^{-1/2}$. Интервалы интегрирования $[h_{\min}, h_+]$, $[h_{\min}, h_{\max}]$ разбивались на $N=100, 200, 500$ равных отрезков. Решение трансцендентных уравнений (5.6), (5.8) осуществлялось минимизацией квадратичной невязки уравнений с использованием метода покоординатного спуска. Все вычисления выполнялись с двойной точностью. Остановка численного алгоритма проводилась при достижении значения невязки $\epsilon \leq 10^{-7}$.

В результате вычислений были найдены распределения материала $h_0(x)$ для стержней минимального веса, обладающих значением критической силы $\lambda=1$. Число переключений оказалось равным трем. Решение исходной задачи оптимизации $h_0(x)$ было получено при помощи пересчета по формулам (1.7).

Результаты вычислений для $\alpha=3$ и $\alpha=2$ представлены на фиг. 4, 5. Функции $h(x)$, $M_2(x)$ — четные функции относительно $x=0$, а функции $M_1(x)$, $\theta(x)$ — нечетные. Функции $M_1(x)$ имеют три узла, а функции $M_2(x)$ — два узла на отрезке $[-1/2, 1/2]$. Заметим, что значения h_+ , h_{\max} мало различаются, а значение $\lambda_{\text{опт}}=52,3564$ при $\alpha=2$ с точностью до пяти знаков совпадает со значением $\lambda=52,3563$, полученным в [9], несмотря на различие в необходимых условиях экстремума ($\lambda_{\text{опт}}=54,8248$ при $\alpha=3$).

Случай $\alpha=1$ оказывается особым. Расчеты показывают, что при увеличении точности вычислений $h_{\min} \rightarrow 0$. Согласно (5.2), это соответствует $C_2 \rightarrow 0$, что означает отсутствие двукратного собственного значения. Решение задачи оптимизации при $\alpha=1$ оказывается однократным. Чтобы получить это решение, используем условие экстремума с простым собственным значением и необходимые условия Эрдмана — Вейерштрасса, приведенные в [16]. В результате приходим к решению (удобнее области $[-1/2, 1/2]$ перейти к области $[0, 1]$, что, конечно, не меняет сути дела)

$$\begin{aligned} h_0(x) &= 3/2(1-16x^2), \quad y=8x^2 \quad (0 \leq x \leq 1/4) \\ h_0(x) &= 3/2(-16x^2+16x-3), \quad y(x)=8x-8x^2-1 \quad (1/4 \leq x \leq 3/4) \\ h_0(x) &= 3/2(-16x^2+32x-15), \quad y(x)=8(1-x)^2 \quad (3/4 \leq x \leq 1) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Функция $y(x)$ определена с точностью до произвольного множителя. Функции $h_0(x)$, $y(x)$ являются четными функциями относительно $x=1/2$. В точках $x=1/4$, $x=3/4$ функция $h_0(x)$ обращается в нуль, кроме того, $h_{\max}=h(1/2)=h(0)=h(1)=3/2$. Собственное значение, соответствующее $h_0(x)$, равно $\lambda_{\text{opt}}=48$.

Решение (5.9) приведено в [14], однако оно классифицируется авторами [14] как неоптимальное, так как подстановка кусочно-гладкой функции $v(x)$ в отношение Рейля, $v(x)=8x^2$ при $0 \leq x \leq 1/4$, $v(x)=1-2x$ при $1/4 \leq x \leq 3/4$, $v(x)=-8(1-x)^2$ при $3/4 \leq x \leq 1$, приводит, по их мнению, к значению отношения Рейля $q=27, 43$. Однако это утверждение неверно. Действительно, функция $v(x)$ не дифференцируема в точках $x=1/4$, $x=3/4$ в классическом смысле. Вторая производная этой функции описывается при помощи обобщенных функций типа δ -функции Дирака. Поэтому для корректного вычисления отношения Рейля используем допустимую непрерывно дифференцируемую функцию $v_\delta(x)$ (δ — малое положительное число):

$$\begin{aligned} v_\delta(x) &= 8x^2 \quad (0 \leq x \leq 1/4) \\ v_\delta(x) &= (3/\delta)(x-1/4)^2/(2\delta-1)+4(x-1/4)+1/2, \quad (1/4 \leq x \leq 1/4+\delta) \\ v_\delta(x) &= [6/(1-2\delta)-4](1/2-x) \quad (1/4+\delta \leq x \leq 1/2), \quad v_\delta(x) = -v_\delta(1-x) \quad (1/2 \leq x \leq 1) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Разность $|v_\delta(x)-v(x)| \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Подставляя эту функцию в отношение Рейля и переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, получим $q=120 > 48$. Подстановка кусочно-гладкой функции в отношение Рейля приводит к дополнительным положительным членам от особенностей в точках $x=1/4$, $x=3/4$. Нетрудно убедиться, что это справедливо лишь для $\alpha=1$, в случае $\alpha > 1$ эти члены стремятся к нулю при $\delta \rightarrow 0$. С точки зрения механического смысла это означает, что при $\alpha > 1$ обращение материала стержня в нуль во внутренней точке ($h(x_*)=0$, $x_* \in (0, 1)$) можно трактовать как появление внутреннего шарнира в этой точке, а при $\alpha=1$ этого делать нельзя. Ошибки, допускаемые при вычислении собственных значений, описаны в [17, § 24].

То, что (5.9) действительно реализует глобальный экстремум задачи оптимизации, доказывается методом, развитым в [18].

Автор искренне признателен А. Ю. Ишлинскому за внимание к работе и полезные обсуждения. Задача Лагранжа исследовалась А. Ю. Ишлинским в 1935 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lagrange J.-L. Sur la figure des colonnes.— In: Ouvres de Lagrange (Publ. de M. J.-A.: Serret). V. 2. Paris: Gauthier-Villars, 1868, p. 125—170.
2. Clausen T. Über die form architektonischer Säulen.— Bull. St.-Petersbourg, Acad. Sci. Phys.-Math. Cl., 1851, v. 9, p. 369—380.
3. Николаев Е. Л. Задача Лагранжа о наиболее выгодном очертании колонн.— Изв. Петерб. политехн. ин-та, 1907, т. 8, вып. 1, с. 255—288.
4. Ченцов Н. Г. Стойки наименьшего веса.— Тр. ЦАГИ, 1936, вып. 265. 48 с.
5. Смирнов А. Ф. Стержни и арки наименьшего веса при продольном изгибе.— Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1950, вып. 74, с. 3—40.
6. Keller J. B. The shape of the strongest column.— Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1960, v. 5, No. 4, p. 275—285.
7. Баничук Н. В. Оптимизация устойчивости стержня с упругой заделкой.— Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 4, с. 150—154.
8. Tadjbakhsh I., Keller J. B. Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1962, v. 29, No. 1, p. 159—164.
9. Olhoff N., Rasmussen S. H. On single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns.— Internat. J. Solids and Struct., 1977, v. 13, No. 7, p. 605—614.
10. Ashley H. On making things the best — aeronautical uses of optimization.— J. Aircraft, 1982, v. 19, No. 1, p. 5—28.
11. Seyranian A. P. Homogeneous functionals and structural optimization problems.— Internat. J. Solids and Struct., 1979, v. 15, No. 10, p. 749—759.
12. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
13. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
14. Olhoff N., Niordson F. I. Some problems concerning singularities of optimal beams and columns.— Z. angew. Math. und Mech., 1979, v. 59, H. 3, p. 16—26.
15. Братусь А. С., Сейранян А. П. Бимодальные решения в задачах оптимизации собственных значений.— ПИММ, 1983, т. 47, вып. 4, с. 546—554.
16. Banichuk N. V., Karikaloo B. L. On the solution of optimization problems with singularities.— Internat. J. Solids and Struct., 1977, v. 13, No. 8, p. 725—733.
17. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
18. Prager W., Taylor J. E. Problems of optimal structural design.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, v. 35, No. 1, p. 102—106.