

УДК 539.376+532.135

САМОРАЗОГРЕВ НЕУПРУГИХ КОМПОЗИТОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

ВИКТОРОВА И. В., ОСОКИН А. Е., СУВОРОВА Ю. В.

Как известно, причиной как циклического, так и статического разрушения является критическое накопление микротрещин с последующим увеличением магистральной трещины. Однако вибрационное нагружение сопровождается еще и саморазогревом материала, влияющим на прочностные характеристики и в результате этого меняющим картину разрушения в целом. Наиболее сильно эти эффекты проявляются для пластмасс и композитов — материалов с относительно низкой теплопроводностью и высокой степенью диссипации энергии. Хорошо известен факт теплового разрушения этих материалов, когда при циклическом деформировании происходит явление «теплового взрыва» [1—3].

Исследование виброразогрева полимерных и композитных материалов сопряжено с решением связанной задачи термовязкоупругости. В общей постановке эта задача сформулирована в [4, 5], где функция диссипации строится на основании термодинамических законов. Из-за сложности решения конкретных задач о саморазогреве разного рода неупругих материалов при циклическом деформировании, как правило, делаются некоторые дополнительные упрощающие предположения о виде функции диссипации [1, 3, 6, 7].

Эти функции выбираются так, чтобы наилучшим образом описывать наблюдаемые в экспериментах эффекты и характерные особенности кривых роста температуры во времени: выход на стационарный уровень, зависимость типа кривой от параметров процесса нагружения, возможность возникновения теплового взрыва и т. д. При этом следует подчеркнуть, что некоторые характерные особенности кривых роста температуры во времени, как, например, условия существования стационарного режима, могут быть получены из самых общих соображений [5].

В публикуемой работе сделана попытка на основании модели, предложенной в [8, 9], исследовать процесс виброразогрева неупругих композитов (на примере органопластика), выявить характерные особенности процесса и показать возможность работы модели сопоставлением расчетов с экспериментальными результатами. Преимущество такого подхода состоит в том, что нет необходимости делать упрощающие предположения о виде функции диссипации. Она может быть вычислена непосредственно по площади петли гистерезиса.

1. Следуя [9], рассмотрим определяющее уравнение

$$E\varepsilon = \sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau) f[T(t)] \sigma(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

Здесь σ — напряжение, ε — деформация, E — модуль упругости, $f[T]$ — функция температурного влияния, $K(t-\tau)$ — ядро наследственности. В [8] показано, что для аппроксимации деформационных характеристик исследуемого материала функцию $f[T]$ удобно выбрать в виде $f[T] = [T(t)]^\alpha$. Как оказалось, такой вид функции температурного влияния позволяет достаточно полно провести аналитическое исследование ряда задач теории виброразогрева (в том числе задачи о «тепловом взрыве» в одномерном образце) [12]. Эта функция используется далее.

Функция диссипации, построенная в [8], имеет вид

$$W = D_+ / \rho c, \quad D_+ = \mu \omega Q / \xi 2\pi, \quad Q = Q_0 T^\alpha$$

$$Q_0 = \frac{\omega}{2\pi} \left\{ \frac{2\sigma_0 \sigma_*}{E} - \left[\frac{\sigma_* \sigma_0 k \omega}{E(1-\alpha)} \int_{-\pi/\omega}^{t^{(1-\alpha)}} \sin \omega t dt + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma_0^2 k \pi \sin[1/2\pi(1-\alpha)] \Gamma(1-\alpha)}{2E\omega^{(1-\alpha)}} \right\}^{-\pi/\omega} \quad (1.2)$$

Здесь D_+ — интенсивность тепловыделения, ρ — плотность, c — теплоемкость, ξ — механический эквивалент тепла, μ — доля механической энергии, переходящей в тепло, ω , σ_0 , σ_* — параметры нагружения, описываемого по закону $\sigma(t) = \sigma_0 + \sigma_* \sin(\omega t)$.

В качестве $K(t-\tau)$ используется ядро Абеля $K(t-\tau) = k/(t-\tau)^\alpha$, определяемое параметрами k и α . Соответственно [3, 5] величина μ , как правило, изменяется в интервале от 0,7 до 0,8. При таком виде функции W связанная задача термовязкоупругости распадается на задачу определения напряженно-деформированного состояния и задачу теплопроводности.

При анализе процесса саморазогрева образца при вибрационном нагружении необходимо учитывать теплоотвод с его поверхности, для описания которого воспользуемся уравнением [10]:

$$D_- = -\beta_1 S(T - T_0) / V = -\beta(T - T_0) \quad (1.3)$$

Здесь D_- — удельная мощность теплоотдачи, т. е. мощность, отнесенная к объему единицы длины образца, S и V — площадь поверхности и объем единицы длины образца, T_0 — температура окружающей среды, β — коэффициент теплоотдачи, зависящей от характеристик охлаждаемой поверхности. В первом приближении можно считать, что β — константа, не зависящая от T .

Суммируя D_+ и D_- , получим общую мощность тепловыделения $D(T) = D_+ + D_-$:

$$D(T) = \frac{\mu\omega}{2\pi\xi} Q_0 T^\gamma - \beta(T - T_0) = Q_1 \left(\frac{T}{T_0}\right)^\gamma - \beta_0 \left(\frac{T}{T_0} - 1\right) \quad (1.4)$$

$$Q_1 = \mu\omega Q_0 T_0^\gamma / 2\pi\xi, \quad \beta_0 = \beta T_0$$

Уравнение теплопроводности, основанное на законе теплопроводности Фурье, имеет вид

$$\partial T / \partial t - a \Delta T = W \quad (1.5)$$

где Δ — оператор Лапласа, t — время, a — коэффициент температуропроводности, связанный с теплопроводностью κ , плотностью ρ и теплоемкостью c соотношением $a = \kappa / \rho c$.

Считаем, что изменением температуры по сечению образца можно пренебречь вследствие хорошей теплоизоляции его боковой поверхности, и теплотокки вдоль оси образца от его середины к захватам испытательной машины существенно превышают теплотокки, перпендикулярные боковой поверхности. Ситуация, когда теплотокки вдоль оси образца можно пренебречь, подробно исследована в [1]. При названных предположениях уравнение (1.5) примет вид

$$\partial T(t, x) / \partial t - a \partial^2 T(t, x) / \partial x^2 = D(T) / \rho c \quad (1.6)$$

Пространственная координата x изменяется в пределах $-x_0 \leq x \leq x_0$, так что длина образца равна $2x_0$. Начальные и граничные условия примем в виде

$$T(x, 0) = T_0, \quad T(-x_0, t) = T(x_0, t) = T_0 \quad (1.7)$$

т. е. считаем, что оба конца стержня находятся в одинаковых условиях. Это предположение не уменьшает общности дальнейших рассуждений и соответствует действительным условиям эксперимента.

Дальнейший анализ удобнее вести в безразмерных переменных:

$$x^\circ = x/x_0, \quad t^\circ = at/x_0^2, \quad T^\circ = T/T_0, \quad \delta^\circ = Q_1 x_0^2 / \kappa T_0, \quad \beta^\circ = \beta_0 x_0^2 / \kappa T_0 \quad (1.8)$$

Поскольку в экспериментах длина образца $2x_0$ и температура воздуха T_0 не менялись, параметр β° пропорционален коэффициенту теплоотвода, а δ° зависит от величины Q_1 , которая определяется условиями испытаний — частотой ω , амплитудой динамической составляющей σ_* и средним статическим уровнем напряжений σ_0 , а также параметрами определяющего уравнения материала (параметром функции температурного влияния γ и др.).

Так как ниже встречаются только безразмерные параметры, верхний индекс над ними опускаем. В обозначениях (1.8) граничная задача (1.6), (1.7) приводится к виду

$$\begin{aligned} \partial T(t, x) / \partial t - \partial^2 T(t, x) / \partial x^2 &= \delta T^\gamma - \beta(T-1) \\ T(x, 0) &= 1, \quad T(-1, t) = T(1, t) = 1 \end{aligned} \quad (1.9)$$

2. Рассмотрим стационарный режим, когда задача (1.9) примет вид

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} = -\delta T(x)^\gamma + \beta[T(x)-1], \quad T(-1) = T(1) = 1 \quad (2.1)$$

Решение (2.1) должно быть симметрично относительно точки $x=0$ и, следовательно $dT(0)/dx=0$.

Обозначив $\Psi(T) = -\delta T^\gamma + \beta(T-1)$, получим

$$d^2 T(x) / dx^2 = \Psi[T(x)], \quad dT(0) / dx = 0, \quad T(1) = 1 \quad (2.2)$$

Общий интеграл (2.2), приведенный, например, в [11], дает

$$x(T) = \int J^{-1/2}(T) dT, \quad J(T) = -2 \int \Psi(T) dT \quad (2.3)$$

Из (2.3) следует

$$dT(x) / dx = \sqrt{J(T)} \quad (2.4)$$

Выясним теперь, при каких значениях δ, β, γ существуют ограниченные решения граничной задачи (2.2). Следуя [11], приведем ее к задаче Коши, полагая $T(0) = T_m \in [1, \infty)$. Параметр T_m выбирается так, чтобы выполнялось условие $T(1) = 1$. Введение T_m позволяет свести исследование существования ограниченного решения задачи (2.2) к изучению функционального уравнения, определяющего этот параметр.

Из (2.2), (2.3), (2.4) получаем

$$J(T) = -2 \int_T^{T_m} \Psi(T) dT = \frac{2\delta}{q} [T_m^q - T^q] + \beta(T - T_m)(T + T_m - 2), \quad q = 1 + \gamma \quad (2.5)$$

Подстановка $J(T)$ из (2.5) в (2.3) дает

$$x(T) = \int_T^{T_m} \left\{ \frac{2\delta}{q} [T_m^q - T^q] + \beta(T - T_m)(T + T_m - 2) \right\}^{-1/2} dT \quad (2.6)$$

Полагая в (2.6) $x(1) = 1$, получим функциональное уравнение, определяющее значение T_m . Если это уравнение имеет решение при некоторых значениях параметров δ, β, γ , то, следовательно, при этих значениях существует и ограниченное решение стационарного уравнения теплопроводности (2.2) с соответствующими граничными условиями, причем максимальное значение температуры и есть, очевидно, значение T_m , удовлетворяющее уравнению (2.6). В другом случае ограниченного стационарного решения нет, температура возрастает до сколь угодно больших значений и, естественно, значения параметра T_m , удовлетворяющего (2.6), не существует.

3. Анализ уравнения (2.6) проведем сначала для процесса саморазогрева образца с идеально теплоизолированной поверхностью ($\beta=0$), а затем перейдем к общему случаю. При $\beta=0$ из (2.6) получим

$$\sqrt{\frac{1+\gamma}{2\delta}} \int_x^{T_m} \frac{dT}{\sqrt{T_m^q - T^q}} = 1 \quad (3.1)$$

Решение (3.1) относительно δ дает ($\eta=T/T_m$):

$$\delta = \frac{1+\gamma}{2} \left\{ T_m^\xi \int_{1/T_m}^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^q}}, \quad \xi = \frac{1-\gamma}{2} \right. \quad (3.2)$$

Соотношение (3.2) позволяет установить зависимость T_m от δ , а также сделать качественные выводы о поведении решений рассматриваемой граничной задачи.

Покажем, что при $\gamma \geq 1$, $\beta=0$ существует критическое значение параметра $\delta = \delta_*(\gamma)$, такое, что при $\delta > \delta_*(\gamma)$ ограниченного решения стационарной граничной задачи не существует.

Действительно, так как для $\gamma \geq 1$ величина $T_m^\xi \leq 1$ при $T_m \in [1, \infty)$, а интеграл в правой части (3.2) ограничен

$$\int_{1/T_m}^1 [1-\eta^q]^{-1/2} d\eta \leq \int_0^1 [1-\eta^q]^{-1/2} d\eta$$

то при $1 \leq T_m < \infty$ правая часть (3.2) не превышает некоторого конечного максимального значения, которое и есть δ_* :

$$\delta_*(\gamma) = \max \left\{ \frac{1+\gamma}{2} \left[T_m^\xi \int_{1/T_m}^1 (1-\eta^q)^{-1/2} d\eta \right]^2 \right\} \quad (3.3)$$

В случае $\gamma < 1$ значение $T_m^\xi \rightarrow \infty$ при $T_m \rightarrow \infty$, поэтому из приведенного доказательства вытекает следующий вывод: при $\gamma < 1$, $\beta=0$ ограниченное решение стационарной граничной задачи (2.2) всегда существует.

Докажем теперь, что наличие теплоотвода с боковой поверхности образца не приводит к качественному изменению поведения решений граничной задачи (2.2). Покажем, что при $\gamma \geq 1$, $\beta > 0$ существует критическое значение параметра $\delta = \delta_*(\gamma, \beta)$, такое, что при $\delta > \delta_*(\gamma, \beta)$ решения стационарной граничной задачи не существует.

Для доказательства предположим сначала, что при $\gamma \geq 1$ для любого сколь угодно большого δ существует ограниченное решение задачи (2.2). Из (2.6) получим

$$I = \int_1^{T_m} \left[T_m^q - T^q + \frac{\beta q}{2\delta} (T - T_m) (T + T_m - 2) \right]^{-1/2} dT = \sqrt{\frac{2\delta}{q}} \quad (3.4)$$

Оценим левую и правую части (3.4) при $\delta \rightarrow \infty$, для чего перепишем левую часть

$$I = T_m^\xi \int_{1/T_m}^1 \left\{ 1 - \eta^q + \left[\beta \left(\frac{q}{2} \right) (\eta - 1) \left(1 + \eta - \frac{2}{T_m} \right) \right] \frac{T_m^{2\xi}}{\delta} \right\}^{-1/2} d\eta \quad (3.5)$$

Из (3.5) при $\delta \rightarrow \infty$ в силу того, что $T_m \in [1, \infty)$, следует оценка

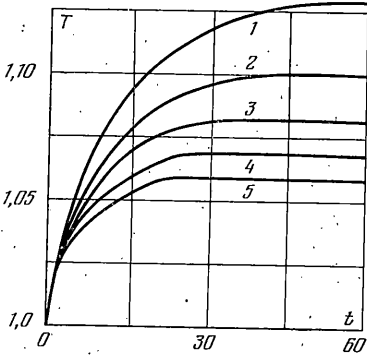
$$I = T_m^\xi \int_{1/T_m}^1 [1-\eta^q]^{-1/2} d\eta + O\left(\frac{T_m^{2\xi}}{\delta}\right)$$

и, следовательно

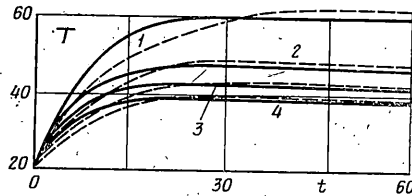
$$I \xrightarrow{\delta \rightarrow \infty} T_m^{\frac{1}{2}} \int_{1/T_m}^1 [1-\eta^q]^{-1/2} d\eta \leq \int_0^1 [1-\eta^q]^{-1/2} d\eta$$

Таким образом, при $\delta \rightarrow \infty$ правая часть (3.4) неограниченно возрастает, а левая не превышает некоторого конечного значения, следовательно, равенство (3.4) не может оставаться справедливым при достаточно больших значениях параметра δ . Полученное противоречие и доказывает утверждение.

При $\gamma < 1$ левая часть соотношения (3.4) неограниченно возрастает с увеличением T_m , поэтому уравнение (3.4) всегда разрешимо. Следова-



Фиг. 1



Фиг. 2

тельно, при $\gamma < 1$ и произвольном $\beta > 0$ граничная задача (2.2) всегда имеет ограниченное решение.

При малых β уравнение (3.4) с точностью до малых величин второго порядка приводится к виду

$$A(T_m) - \beta \delta^{-1} B(T_m) = \sqrt{2\delta/(1+\gamma)} \quad (3.6)$$

$$A(T_m) = \int_1^{T_m} \frac{dT}{\sqrt{T_m^q - T^q}}$$

$$B(T_m) = \frac{q}{4} \int_1^{T_m} \frac{(T-T_m)(T+T_m-2)}{\sqrt{[T_m^q - T^q]^3}} dT$$

Проведенный анализ показал, что параметр функции температурного влияния γ , являющийся константой материала, определяет и решение вопроса о существовании ограниченного стационарного решения граничной задачи (2.2). Для значений $\gamma \geq 1$ возможен нестационарный режим разогрева, приводящий к «тепловому взрыву».

4. При проведении конкретных расчетов необходимо знать критическое значение $\delta_*(\gamma, \beta)$. Для этого надо вычислить максимальное δ , удовлетворяющее уравнению (3.4) при $T_m \in [1, \infty)$, что было сделано численно. Зависимости $\delta = \delta_*(\gamma)$ при $\beta = 0$, определяющие возможность возникновения теплового взрыва в наиболее тяжелых для конструкции условиях (полное отсутствие теплоотвода), приведены ниже.

Для значений γ , равных

$$\gamma = 1,0; 1,1; 1,3; 1,5; 1,7; 1,9; 2,1; 2,3; 2,5$$

соответствующие значения $\delta_*(\gamma)$ будут следующими:

$$\delta_*(\gamma) = 2,646; 0,937; 0,622; 0,465; 0,369; 0,304; 0,257; 0,223; 0,192.$$

Величина δ_* резко возрастает с увеличением β . Так, например, при $\beta = 0,2$, $\gamma = 2,2$, $\delta_* = 12,2$.

Решение нестационарной задачи выполнялось численно, по неявной, безусловно, устойчивой разностной схеме

$$[T_j^{n+1} - T_j^n]/\Delta t = [T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}]/\Delta x^2 + W_j^n$$

где $T_j^n = T(n\Delta t, j\Delta x)$, а Δt и Δx — шаги разбиения по времени и пространственной координате. Схема имеет первый порядок точности по времени и второй — по пространственной координате. Программа составлена на языке ФОРТРАН, счет проводился на ЭВМ ЕС-1040. Результаты выводились в виде зависимости температуры от времени в центре образца.

На фиг. 1 приведены результаты счета, иллюстрирующие рост температуры в центре образца во времени при различных значениях безразмерного параметра β для $\gamma=2$, $\delta=0,6$. Кривым 1-5 соответствуют значения β , равные 0, 2, 4, 6 и 8.

Таблица 1

ω	σ_0	σ_*	δ	ω	σ_0	σ_*	δ
6	800	200	1,368	50	700	200	2,030
6	800	300	1,477	50	600	300	2,11
6	800	400	1,532	50	700	300	2,15
10	800	200	1,722	50	600	200	2,003
10	800	300	1,820				

Чтобы было проще сравнивать результаты теории и эксперимента, время t дано в размерных переменных — минутах. Пересчет к размерным переменным осуществлялся для образца, с которым проводились испытания.

Экспериментальная программа была осуществлена на образцах из органопласта с наполнителем из органических нитей СВМ и связующим эпоксифенольного типа. Испытывались образцы с прямоугольным сечением $1,5 \times 10$ мм. Прочность на растяжение этого материала равна 1400 МПа, модуль упругости при растяжении $E = 54\,000$ МПа, коэффициент теплопроводности $\lambda = 0,16$ Вт/м-град, коэффициент температуропроводности $a = 10^7$ м²/ч, плотность $\rho = 1,17$ г/см³, удельная теплоемкость $c = 1,25 \cdot 10^3$ м²кг/с²·кг °К.

Параметры ядра наследственности α и k и показатель степени функции температурного влияния γ определялись по методике, описанной в [8] по двум диаграммам деформирования с постоянными скоростями роста напряжения $\sigma_1 = 0,1$ МПа/с, $\sigma_2 = 25$ МПа/с и диаграммам растяжения при температурах 333 °К и 373 °К. Эти диаграммы снимались на установке ИНСТРОН модели 1145. Были получены следующие значения параметров определяющего уравнения: $\alpha = 0,95$, $k = 0,075$ мин^{-(1- α)}, $\gamma = 2,2$.

Переменная нагрузка изменялась по синусоидальному закону. Режим нагружения — мягкий. Вибрационное нагружение с частотами от 5 до 10 Гц осуществлялось на установке МТС модели 311.21, а с частотой 50 Гц — на установке МТС модели 938.10. Испытания проводились как на открытом воздухе, так и с теплоизоляцией поверхности образца (теплоизолировалась только боковая поверхность, но не его торцы). Теплоизолятором служил листовой поролон толщиной 10 мм.

Значения параметров нагружения ω (Гц), σ_0 , σ_* (МПа), а также безразмерного параметра δ , соответствующего этим значениям, приведены в табл. 1. Вычисление параметра δ производилось по формулам (1.8). Далее по рассчитанному значению δ устранением невязки теоретического расчета с одной из экспериментальных кривых определялся параметр β , после чего рассчитывались и сопоставлялись с экспериментом остальные кривые. Результаты этого сопоставления даны на фиг. 2 (температура — °К, время, как и на фиг. 1, — мин). Штриховыми кривыми отмечены результаты расчета, сплошными — эксперимента. Оказалось, что при теплоизоляции боковой поверхности образца $\beta = 7,9$, а без нее $\beta = 8,8$. Отклонение

расчета от эксперимента не превышало 10%. Соответствие номеров кривых N на фиг. 2 и параметров нагружения приведено в табл. 2.

Изложенный подход позволил описать процесс саморазогрева образца из наследственно-упругого материала (органопластика) при циклическом деформировании, причем параметры определяющего уравнения были рассчитаны по данным экспериментов на изотермическое деформирование с постоянной скоростью нагружения. Кроме того, удалось провести теоретический анализ условий существования стационарного режима разогрева, при котором была выявлена определяющая роль величины γ — показателя степени функции температурного влияния.

Таблица 2

N	σ_0	σ_*	β
1	600	300	8,8
2	700	200	7,9
3	600	200	7,9
4	600	300	7,9

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Козырев Ю. И., Малилин Н. И., Павлов Д. Я., Шестериков С. А. О виброползучести полимерных материалов.— ПМТФ, 1965, № 5, с. 68—75.
2. Meinköhn D. Heat explosion theory and vibrational heating of polymers.— Internat. J. Heat and Mass Transfer, 1981, v. 24, No. 4, p. 645—649.
3. Тамуж В. П., Куксенко В. С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1978. 294 с.
4. Победря Б. Е. О связанных задачах механики сплошной среды.— В кн.: Упругость и неупругость. Вып. 2. М.: Изд-во МГУ, 1971, с. 224—253.
5. Москвитин В. В. Циклические нагружения элементов конструкций.— М.: Наука, 1981. 344 с.
6. Галин Л. А. О действии вибрационной нагрузки на полимерные материалы.— Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 6, с. 53—58.
7. Ван-Фо-Фы Г. А. Однородные и армированные пластики при периодических воздействиях.— Прикл. механика, 1966, т. 2, вып. 8, с. 94—102.
8. Суворова Ю. В. Учет температуры в наследственной теории упругопластических сред.— Проблемы прочности, 1977, № 2, с. 43—48.
9. Суворова Ю. В. Тепловыделение при циклическом деформировании наследственных сред.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 1, с. 108—112.
10. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Гостехиздат, 1952. 392 с.
11. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1947. 368 с.
12. Викторова И. В. О зависимости тепловыделения от параметров процесса циклического деформирования.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 4, с. 110—114.

Москва

Поступила в редакцию
12.XI.1982