

УДК 539.376

## О РЕШЕНИИ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

ЦВЕЛОДУБ И. Ю., ШВАБ А. А.

Рассматривается процесс ползучести несжимаемого тела, находящегося в условиях плоской деформации. Общие деформации складываются из упругих и деформаций ползучести. При известных деформациях ползучести, которые представимы рядами Фурье по окружной координате с коэффициентами, зависящими от полярного радиуса, получено общее решение плоской задачи в полярной системе координат. Описана процедура численного решения. В качестве примера решена задача о концентрации напряжений при ползучести около круглого отверстия в толстой пластине, растягиваемой на бесконечности двумя взаимно перпендикулярными усилиями.

1. Рассмотрим процесс ползучести изотропного призматического тела, находящегося в условиях плоской деформации. Будем считать, что общие деформации складываются из упругих, подчиняющихся закону Гука, и деформаций ползучести, скорости которых определяются одним из известных законов ползучести [1] (конкретный вид закона пока не является существенным). Кроме того, предположим, что материал тела несжимаем как по упругим деформациям, так и при ползучести. Тогда для общих деформаций в некоторый момент времени  $t=t_1$  в цилиндрической системе координат, ось  $z$  которой совпадает с осью тела, будем иметь [1, 2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{3}{4}\sigma/E + \varepsilon_\theta^c, & \varepsilon_{r\theta} &= \frac{3}{4}\tau/E + \varepsilon_{r\theta}^c \\ \sigma &= \sigma_\theta - \sigma_r, & \tau &= 2\sigma_{r\theta} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $E$  — модуль Юнга, индексы  $r$  и  $\theta$  относятся к радиальному и окружному направлениям,  $\varepsilon_\theta^c$  и  $\varepsilon_{r\theta}^c$  — деформации ползучести.

Запишем соотношения (1.1) в безразмерном виде. Для этого значения всех напряжений отнесем к некоторой характерной величине  $P$ , значения всех деформаций — к  $\frac{3}{4}P/E$ , сохранив за безразмерными величинами прежние обозначения. Тогда уравнения (1.1) примут вид

$$\varepsilon_\theta = \sigma + \varepsilon_\theta^c, \quad \varepsilon_{r\theta} = \tau + \varepsilon_{r\theta}^c \quad (1.2)$$

Поле напряжений, возникающее в теле под действием внешних нагрузок, на любой момент времени должно удовлетворять уравнениям равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{x} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{x} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Компоненты общих деформаций выражаются через компоненты перемещений известными соотношениями [2]:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{x} + \frac{1}{x} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[ x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v}{x} \right) + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right]$$

где  $x$  — безразмерный радиус полярной системы координат,  $u$  и  $v$  — безразмерные радиальное и окружное перемещения. Из условий плоской деформации и несжимаемости получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u/x + 1/x \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (1.5)$$

Предположим, что в момент  $t=t_1$  в теле известны распределения деформаций ползучести (в начальный момент эти распределения задаются по условию задачи), причем величины  $\varepsilon_{\theta}^c$  и  $\varepsilon_{r\theta}^c$  могут быть представлены в виде рядов Фурье по окружной координате, коэффициенты которых являются функциями от  $x$ :

$$\varepsilon_{\theta}^c = \sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon_{\theta 1k}^c \cos k\theta + \varepsilon_{\theta 2k}^c \sin k\theta) \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_{r\theta}^c = \sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon_{r\theta 1k}^c \sin k\theta - \varepsilon_{r\theta 2k}^c \cos k\theta)$$

Покажем, что с использованием (1.6) можно построить общее решение рассматриваемой задачи на момент  $t=t_1$ , т. е. найти величины напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_{\theta}$ ,  $\sigma_{r\theta}$  и перемещений  $u$ ,  $v$  при условии, что последние являются периодическими функциями  $\theta$  с периодом, равным  $2\pi$ .

Исключая из уравнений (1.3) величину гидростатического давления  $p = (\sigma_r + \sigma_{\theta})/2$ , нетрудно получить

$$x^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + 3x \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial \theta^2} = -2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} (x\sigma) \quad (1.7)$$

Компоненты перемещений будем искать в аналогичном (1.6) виде

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} (u_{1k} \cos k\theta + u_{2k} \sin k\theta) \quad (1.8)$$

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} (v_{1k} \sin k\theta - v_{2k} \cos k\theta)$$

Тогда согласно (1.2), (1.4) и (1.8) величины  $\sigma$  и  $\tau$  также будут представлены в виде рядов Фурье

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} (\sigma_{1k} \cos k\theta + \sigma_{2k} \sin k\theta) \quad (1.9)$$

$$\tau = \sum_{k=0}^{\infty} (\tau_{1k} \sin k\theta - \tau_{2k} \cos k\theta)$$

Подставляя (1.8) в (1.5) и приравнивая нулю  $k$ -е коэффициенты в получившемся ряду Фурье, найдем

$$v_k = -(u_k x)' / k \quad (1.10)$$

В (1.10) и всюду в дальнейшем индексы 1 и 2 у соответствующих величин опущены, поскольку в обоих случаях получаются идентичные соотношения; штрих означает дифференцирование по  $x$ . Из (1.2), (1.4)

найдем

$$\sigma = -\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_{\theta}^c, \quad \tau = \frac{1}{2} \left[ x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v}{x} \right) + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] - \varepsilon_{r\theta}^c \quad (1.11)$$

Подставляя (1.11) в (1.7) и используя (1.8), (1.6), (1.10), после несложных преобразований получим уравнение относительно  $u_k$ :

$$u_k^{(4)} x^4 + 6u_k''' x^3 + (5-2k^2) u_k'' x^2 - (2k^2+1) u_k' x + (k^2-1)^2 u_k = -2kx f_k$$

$$f_k(x) = x^2 \varepsilon_{r\theta k}^{c''} + 3x \varepsilon_{r\theta k}^{c'} + k^2 \varepsilon_{r\theta k}^c - 2k \varepsilon_{\theta k}^c - 2kx \varepsilon_{\theta k}^{c'}$$

или в эквивалентной форме

$$x^{k-1} \{ x^3 [ x^{1-2k} (x^{-1} (x^{k+1} u_k)') ]' \}' = -2k f_k(x) \quad (1.12)$$

Последовательно интегрируя (1.12) и используя очевидные соотношения типа

$$\begin{aligned} \int x^\lambda F' dx &= x^\lambda F - \lambda \int F x^{\lambda-1} dx \\ \int x^\lambda F'' dx &= x^\lambda F' - \lambda x^{\lambda-1} F + \lambda(\lambda-1) \int x^{\lambda-2} F dx \\ \int x^\lambda \left( \int F dx \right) dx &= \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} \int F dx - \frac{1}{\lambda+1} \int x^{\lambda+1} F dx \end{aligned}$$

справедливые для произвольной дважды дифференцируемой функции  $F=F(x)$ , найдем значение  $u_k$ :

$$u_k = \frac{k}{2} x (J_{1k} - J_{2k} - J_{3k} + J_{4k}) + c_{1k} x^{k-1} + k c_{2k} x^{k+1} + k c_{3k} x^{-k+1} + c_{4k} x^{-k-1} \quad (1.13)$$

$$J_{1k} = x^{k-2} \int_{\alpha} x^{1-k} \varepsilon_{1k} dx, \quad J_{2k} = x^k \int_{\alpha} x^{-1-k} \varepsilon_{1k} dx,$$

$$J_{3k} = x^{-k} \int_{\alpha} x^{k-1} \varepsilon_{2k} dx, \quad J_{4k} = x^{-k-2} \int_{\alpha} x^{1+k} \varepsilon_{2k} dx$$

$$\varepsilon_{1k} = \varepsilon_{r\theta k}^c - \varepsilon_{\theta k}^c, \quad \varepsilon_{2k} = \varepsilon_{r\theta k}^c + \varepsilon_{\theta k}^c$$

где  $c_{1k}, c_{2k}, c_{3k}, c_{4k}$  — константы интегрирования,  $\alpha$  — произвольное число.

Из (1.10) определяется

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{x}{2} [-kJ_{1k} + (k+2)J_{2k} - (k-2)J_{3k} + kJ_{4k}] - \\ &- c_{1k} x^{k-1} - (k+2)c_{2k} x^{k+1} + (k-2)c_{3k} x^{-k+1} + c_{4k} x^{-k-1} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Из (1.11), (1.13) и (1.14) найдем значения коэффициентов в рядах (1.9)

$$\begin{aligned} \sigma_k &= -1/2 k(k-1) (J_{1k} + J_{3k}) + 1/2 k(k+1) (J_{2k} + J_{4k}) - (k-1)c_{1k} x^{k-2} - k(k+1)c_{2k} x^k + \\ &+ k(k-1)c_{3k} x^{-k} + (k+1)c_{4k} x^{-k-2} - \varepsilon_{\theta k}^c \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \tau_k &= -1/2 k(k-1) (J_{1k} - J_{3k}) + 1/2 k(k+1) (J_{2k} - J_{4k}) - (k-1)c_{1k} x^{k-2} - k(k+1)c_{2k} x^k - \\ &- k(k-1)c_{3k} x^{-k} - (k+1)c_{4k} x^{-k-2} \end{aligned}$$

Для нахождения величины гидростатического давления  $p$  необходимо воспользоваться уравнениями равновесия (1.3), которые могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\sigma}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \tau - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Из (1.15), (1.16) найдем коэффициенты ряда Фурье для  $p$ :

$$p = \frac{1}{2}(k+1)J_{2k} + \frac{1}{2}(k-1)J_{3k} - \frac{1}{2}\varepsilon_{0k}^c - (k+1)c_{2k}x^k - (k-1)c_{3k}x^{-k} \quad (1.17)$$

При известных значениях  $\sigma$ ,  $\tau$  и  $p$  величины напряжений  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_r$  и  $\sigma_{r\theta}$  определяются по формулам  $\sigma_\theta = p + \sigma/2$ ,  $\sigma_r = p - \sigma/2$ ,  $\sigma_{r\theta} = \tau/2$ , и на основании (1.15), (1.17) получим для коэффициентов рядов Фурье

$$\begin{aligned} \sigma_{0k} &= -\frac{1}{4}k(k-1)J_{1k} + \frac{1}{4}(k+1)(k+2)J_{2k} - \frac{1}{4}(k-1)(k-2)J_{3k} + \\ &+ \frac{1}{4}k(k+1)J_{4k} - \varepsilon_{0k}^c - \frac{1}{2}(k-1)c_{1k}x^{k-2} - \frac{1}{2}(k+1)(k+2)c_{2k}x^{k+2} + \\ &+ \frac{1}{2}(k-1)(k-2)c_{3k}x^{-k+1/2} + \frac{1}{2}(k+1)c_{4k}x^{-k-2} \\ \sigma_{rk} &= \frac{1}{4}k(k-1)J_{1k} - \frac{1}{4}(k+1)(k-2)J_{2k} + \frac{1}{4}(k-1)(k+2)J_{3k} - \frac{1}{4}k(k+1)J_{4k} + \\ &+ \frac{1}{2}(k-1)c_{1k}x^{k-2} + \frac{1}{2}(k+1)(k-2)c_{2k}x^{k-1/2} + \frac{1}{2}(k-1)(k+2)c_{3k}x^{-k-1/2} + \frac{1}{2}(k+1)c_{4k}x^{-k-2} \\ \sigma_{r\theta k} &= -\frac{1}{4}k(k-1)J_{1k} + \frac{1}{4}k(k+1)J_{2k} + \frac{1}{4}k(k-1)J_{3k} - \frac{1}{4}k(k+1)J_{4k} - \\ &- \frac{1}{2}(k-1)c_{1k}x^{k-2} - \frac{1}{2}k(k+1)c_{2k}x^{k-1/2} + \frac{1}{2}k(k-1)c_{3k}x^{-k-1/2} + \frac{1}{2}(k+1)c_{4k}x^{-k-2} \quad (k \geq 0, k \neq 1) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Не останавливаясь на выкладках, приведем окончательные выражения, аналогичные (1.13), (1.14) и (1.18), для случая  $k=1$ :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{x}{2}(-J_{21} + J_{41}) - \int_{\alpha}^x \varepsilon_{01}^c dx + c_1 \ln x + c_2 x^2 + c_3 + c_4 x^{-2} \\ v_1 &= \frac{x}{2}(3J_{21} + J_{41}) + \int_{\alpha}^x \varepsilon_{01}^c dx - c_1(\ln x + 1) - 3c_2 x^2 - c_3 + c_4 x^{-2} \\ \sigma_{01} &= \frac{3}{2}J_{21} + \frac{1}{2}J_{41} - \varepsilon_{01}^c - 3c_2 x + c_4 x^{-3} \\ \sigma_{r1} &= \frac{1}{2}J_{21} - \frac{1}{2}J_{41} + c_1 x^{-1} - c_2 x - c_4 x^{-3} \\ \sigma_{r\theta 1} &= \frac{1}{2}J_{21} - \frac{1}{2}J_{41} - c_2 x - c_4 x^{-3} \end{aligned}$$

где величины  $J_{21}$  и  $J_{41}$  определяются согласно (1.13) при  $k=1$ .

Входящие в выражения для перемещений члены вида  $u = c_3 \cos \theta (\sin \theta)$ ,  $v = -c_3 \sin \theta (-\cos \theta)$  соответствуют жесткому смещению и не влияют на напряженно-деформированное состояние.

Таким образом, при известных деформациях ползучести  $\varepsilon_0^c$  и  $\varepsilon_{r\theta}^c$  на момент  $t=t_1$ , перемещения и напряжения определяются согласно (1.13), (1.14), (1.18). Неизвестные константы  $c_{1k}$ ,  $c_{2k}$ ,  $c_{3k}$ ,  $c_{4k}$  находятся из соответствующих граничных условий, если последние могут быть представлены в виде рядов Фурье. При этом, как видно из (1.19), выражения для напряжений при  $k=1$  в отличие от (1.18) содержат три константы, что соответствует требованию самоуравновешенности внешних нагрузок для этого случая [2].

Для определения деформаций ползучести на любой момент времени можно воспользоваться следующим приемом [3]. Считаем, что в течение малого промежутка времени  $\Delta t_1$  найденные выше напряжения остаются постоянными. Интегрируя соответствующие уравнения ползучести по времени от  $t_1$  до  $t_2 = t_1 + \Delta t_1$ , находим компоненты  $\varepsilon_0^c$  и  $\varepsilon_{r\theta}^c$  при  $t=t_2$ . Раскладывая последние в ряды Фурье и применяя затем описанную методику, определяем компоненты перемещений и напряжений при  $t=t_2$ . Фиксируя найденные напряжения в течение времени  $\Delta t_2$ , находим все величины на момент  $t_3 = t_2 + \Delta t_2$ . Далее процедура повторяется вплоть до необходимого момента времени.

2. В качестве примера рассмотрим задачу о концентрации напряжений при ползучести около кругового отверстия радиуса  $R_1$  в толстой пластине, растягиваемой на бесконечности двумя взаимно перпендикулярными усилиями. Граничные условия имеют вид [2, 3]:

$$\sigma_r(R_1) = \sigma_{r\theta}(R_1) = 0, \quad \sigma_r(R_2) = P(1 - \delta \cos 2\theta), \quad \sigma_{r\theta}(R_2) = P\delta \sin 2\theta \quad (2.1)$$

где  $R_2 \gg R_1$ ,  $P$ ,  $\delta$  — константы;  $P > 0$ , что с достаточной степенью точности соответствует указанной задаче. Условия (2.1) являются точными при

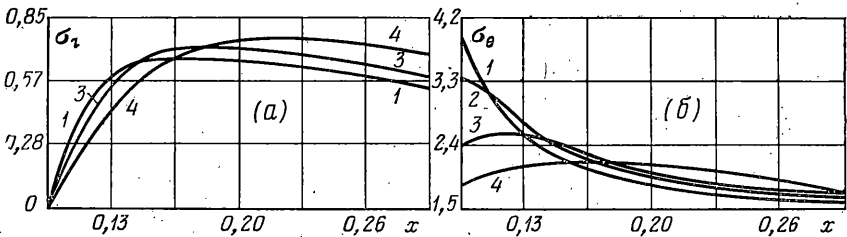
$R_2 \rightarrow \infty$ . Будем считать, что нагрузки (2.1) прикладываются в момент времени  $t=0$ , а при  $t < 0$  пластина находилась в естественном состоянии.

Для простоты предположим, что компоненты скоростей деформаций ползучести определяются только компонентами напряжений и являются однородными степени  $n$  функциями последних, где  $n$  — нечетное натуральное число. Тогда для скоростей общих деформаций получим [1, 2]:

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{3}{4} \left[ \frac{\dot{\sigma}}{E} + B \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1} (\sigma^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sigma \right] \quad (2.2)$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{3}{4} \left[ \frac{\dot{\tau}}{E} + B \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1} (\sigma^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}(n-1)} \tau \right]$$

где  $B, n$  — коэффициент и показатель ползучести; точка означает дифференцирование по времени.



Фиг. 1

Запишем (2.2) в безразмерном виде, отнеся значения всех напряжений к  $P$ , значения деформаций — к  $\sqrt[3]{P/E}$  и введя безразмерное время  $\xi = BEP^{n-1} (\sqrt{3}/2)^{n-1} t$ :

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \dot{\sigma} + (\sigma^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sigma \quad (2.3)$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\theta} = \dot{\tau} + (\sigma^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}(n-1)} \tau$$

В (2.3) за безразмерными величинами сохранены прежние обозначения; точка означает дифференцирование по безразмерному времени  $\xi$ . Из условий симметрии задачи очевидно, что на любой момент времени напряжения  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_r$  будут представляться рядами Фурье по четным косинусам, а  $\sigma_{r\theta}$  — аналогичным рядом по четным синусам с коэффициентами, определенными в (1.18) при четных  $k$ . Неизвестные константы  $c_{1k}, c_{2k}, c_{3k}, c_{4k}$ , входящие в (1.18), находятся из граничных условий, которые согласно (2.1) имеют вид  $\sigma_{rk}(\alpha) = \sigma_{r\theta k}(\alpha) = 0$  при любом  $k$  ( $\alpha = R_1/R_2$ );  $\sigma_{r0}(1) = 1$ ,  $\sigma_{r\theta 0}(1) = 0$ ,  $\sigma_{r2}(1) = -\sigma_{r\theta 2}(1) = -\delta$ ,  $\sigma_{rk}(1) = \sigma_{r\theta k}(1) = 0$  при  $k > 2$ .

Деформаций ползучести в узлах выбранной сетки, т. е. в точках пересечения линий  $\theta = \text{const}$  и  $x = \text{const}$ , где  $x$  — безразмерный радиус ( $\alpha \leq x \leq 1$ ), рассчитывались описанным выше методом. Все интегралы, входящие в (1.18), вычислялись с использованием формулы Симпсона. Для разложения деформаций  $\varepsilon_\theta$  и  $\varepsilon_{r\theta}$  в ряды Фурье при фиксированных значениях  $x$  применялась процедура, которая описывается ниже для произвольной функции  $\theta$ . Брался отрезок ряда Фурье, состоящий из  $k$  гармоник, с неопределенными коэффициентами и приравнивался значению раскладываемой функции в  $2k+1$  узлах, в результате чего была получена линейная система относительно указанных  $2k+1$  коэффициентов. Полученная система решалась итерационным методом, описанным в [4], с применением на каждом шаге для вновь полученной системы метода Гаусса.

Как показали расчеты на тестовых задачах, при разложении тригонометрических функций коэффициенты при каждой гармонике определялись с достаточно высокой точностью. Естественно, что такая процедура дает хорошие результаты для функции, представимой конечным рядом Фурье. В общем же случае необходимо исследовать погрешность, вносимую заменой бесконечного ряда его отрезком. Для этого в расчете варьировалось число гармоник и оценивалось влияние каждой из

них на конечный результат. Так, в рассматриваемой задаче максимальное число гармоник равнялось десяти. С другой стороны, описанную процедуру нахождения коэффициентов отрезка ряда Фурье можно трактовать как некорректно поставленную задачу, поскольку при решении системы линейных уравнений правая часть определена неточно, так как она соответствует сумме бесконечного ряда, т. е. точным значениям функции в  $2k+1$  точках. Поэтому, используя метод регуляризации [5], задачу можно свести к минимизации сглаживающего функционала

$$M^\beta[w, f_\Delta] = \|Aw - f_\Delta\|_{L_2}^2 + \beta \Omega(w) \quad (2.4)$$

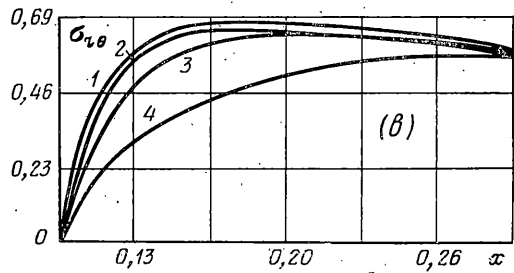
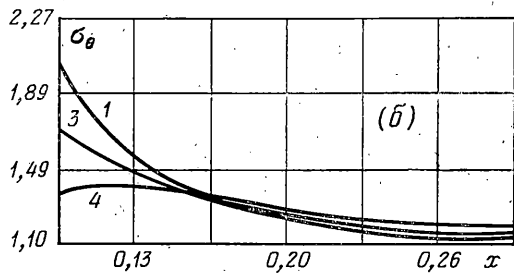
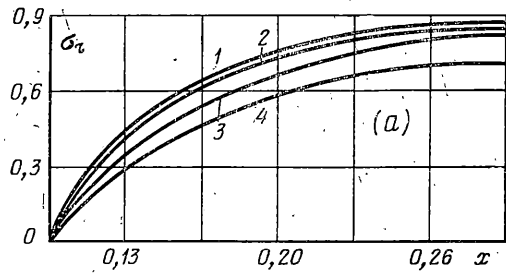
Здесь  $A$  — матрица системы,  $w$  — вектор решения,  $f_\Delta$  — вектор правой части уравнения,  $\beta$  — параметр регуляризации,  $\Omega(w)$  — стабилизирующий функционал. Последний выбирался таким образом, чтобы получить устойчивость суммирования второй производной ряда Фурье, т. е.  $\Omega(w) = a_0^2 + \sum_{i=1}^k i^6 (a_i^2 + b_i^2)$  ( $i=1 \dots k$ ), где  $a_i, b_i$  — коэффициенты ряда Фурье.

Параметр регуляризации определялся из условия  $\|Aw - f\|_{L_2} = \Delta$ , т. е.  $\beta = \beta(\Delta)$ , где  $\Delta$  — задаваемая заранее невязка, определенная наибольшей погрешностью в процессе вычисления правой части  $f$ . Как показали численные расчеты, при выбранной конкретной сетке величина  $\Delta$  была столь мала, что оба метода дают практически совпадающие результаты. Поэтому в расчете как наименее трудоемкий был использован первый метод. Тем не менее метод, основанный на минимизации (2.4), в общем случае предпочтительней, поскольку позволяет улучшить сходимость ряда. Численные методы, основанные на вычислении коэффициентов ряда Фурье через интегральные аналоги [6], при апробировании на тестовых задачах при том же количестве узлов дали значительно худшие результаты.

Необходимо заметить, что при вычислении напряжений по формулам (1.18) в случае малых  $\alpha$  значения  $J_{1k}, J_{2k}$  при  $k > 4$  будут столь велики, что ошибка в их вычислении, возникающая вследствие численного интегрирования, может иметь порядок величины  $\sigma_\theta$ . В силу этого, поскольку  $J_{1k}, J_{2k}$  входят в правую часть (1.18) в виде слагаемых, компоненты напряжений определяются с ошибкой, приводящей в дальнейшем к неверным результатам. Поэтому при расчете оценивалась относительная ошибка в определении  $J_{1k}, J_{2k}$ , а затем обнаружались те разряды в записи чисел  $J_{1k}, J_{2k}$ , которые содержат эту ошибку.

Коэффициенты  $c_{1k}, c_{2k}, c_{3k}, c_{4k}$  определяются из системы линейных уравнений четвертого порядка, соответствующей граничным условиям для  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  при  $x=\alpha$  и  $x=1$ . Нетрудно показать, что при малых  $\alpha$  и больших  $k$  матрица этой системы (по терминологии [7]) плохо обусловлена. Поэтому численное решение системы разбивалось на два этапа. На первом находилось решение методом Гаусса. На втором этапе система расщеплялась на две, соответствующие условиям при  $x=1$  и  $x=\alpha$ . Затем в первой возмущались коэффициенты  $c_{1k}, c_{2k}$  таким образом, чтобы удовлетворить правым частям. Найденные значения  $c_{1k}, c_{2k}$  подставлялись во вторую систему, в которой затем возмущались  $c_{3k}, c_{4k}$ . После этого весь процесс повторялся. Так, например, при  $\alpha=0,1$  и  $k=10$  достаточно было трех итераций, чтобы достигнуть заданной точности.

При расчете было принято  $n=7, \alpha=0,1, \delta=0,5$ , начальный шаг интегрирования  $\Delta\xi$  по безразмерному времени выбирался равным  $1,73 \cdot 10^{-4}$ , затем через 100 шагов был увеличен в 10 раз и после 200 — еще в 2,5 раза. При этом использовалась равномерная по  $x$  и по  $\theta$  сетка, содержащая 1540 узлов, причем шаг по  $x$  составлял  $6,4 \cdot 10^{-3}$ , а по  $\theta$  — 0,285. Как показал расчет, основное перераспределение напряжений



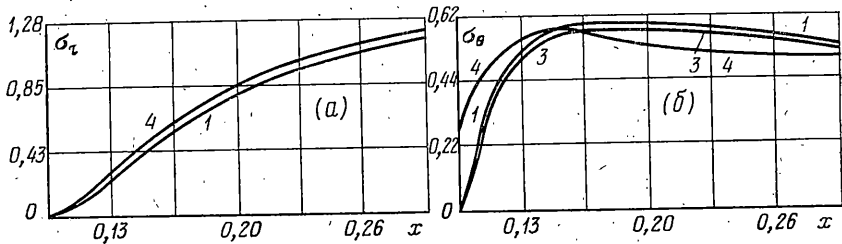
Фиг. 2

происходит непосредственно вблизи отверстия ( $0,1 \leq x \leq 0,3$ ). Соответствующие эпюры для  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_r$  и  $\sigma_{r\theta}$  представлены на фиг. 1–3.

Кривые, отмеченные цифрами 1–4, соответствуют 0, 10, 100, 300 шагам по безразмерному времени. Так, на фиг. 1, а, б представлены эпюры для  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  при значении  $\theta=0$ .

На фиг. 2, а, б, в изображены соответственно эпюры  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_{r\theta}$  при  $\theta=\pi/4$ , а на фиг. 3, а, б — для  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  при  $\theta=\pi/2$ . Из фиг. 1–3 видно, что наиболее интенсивное перераспределение напряжений  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_r$  происходит в начальный период времени, причем оно существенно меняется в зависимости от значения угла  $\theta$ .

Приведенное выше решение задачи ползучести для круговых областей является, видимо, наиболее удобным в силу простой численной реализации, при которой



Фиг. 3

удается избежать обращения матрицы большого порядка. С другой стороны, используя метод коллокаций, оно может быть применено и для областей с произвольной достаточно гладкой границей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Иелев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
3. Цвелодуб И. Ю., Шваб А. А. О решении некоторых задач теории ползучести методом малого параметра. — ПМТФ, 1982, № 2, с. 122–127.
4. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М.: Мир, 1969. 167 с.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
6. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 535 с.
7. Годунов С. К. Решение систем линейных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980. 177 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
26.V.1982