

УДК 539.376

КОНКРЕТИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ В ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

ШЕСТЕРИКОВ С. А., ЮМАШЕВА М. А.

В теории ползучести в настоящее время принята концепция механического уравнения состояния. Поэтому большое внимание уделяется не столько построению общих соотношений для неупругих сред, сколько выбору конкретных зависимостей. Проблема заключается в том, чтобы определяющие уравнения не только достаточно хорошо описывали наблюдаемые в экспериментах явления, но и были обозримы при практическом использовании в расчетах. В теории ползучести существует несколько подходов построения общих соотношений. Одним из наиболее развитых как с точки зрения развития общей теории, так и по широте технических приложений является теория механического уравнения состояния, наиболее полно представленная в фундаментальной монографии Ю. Н. Работнова [1]. В этом варианте теории ползучести скорость деформации ползучести выражается в явном виде как функция напряжения, температуры и параметров, характеризующих структурные особенности материала. При этом проводится разделение склерономной и реономной составляющих неупругой деформации. Для первой используются соотношения, не зависящие от масштаба времени. Ниже предлагается вариант указанных соотношений, в котором зависимость от напряжений выделяется в виде дробно-линейной функции. Показано, что одновременное использование такого представления и выделение из полной деформации ползучести ограниченной части позволяет описывать экспериментальные данные в широком диапазоне нагрузок.

1. Рассмотрим простейший случай ползучести — нелинейно-вязкое течение. Для одноосного напряженного состояния имеем $\dot{p} = f(\sigma, T)$, где \dot{p} — скорость деформации ползучести, σ — напряжение, T — температура. Обычно [1–3] для f принимается либо степенной закон Бейли — Нортона

$$\dot{p} = A\sigma^n \quad (1.1)$$

либо экспоненциальный закон типа

$$\dot{p} = k p^{-\alpha} \exp(\sigma/B) \quad (1.2)$$

либо более сложные соотношения типа закона Гарофало [4] (гиперболический синус в степени n). Во всех случаях вводимые константы являются функциями T .

Необходимо отметить, что когда используются соотношения типа (1.1) или (1.2), то оказывается даже для постоянной температуры невозможно подобрать единые показатели n или B для всего диапазона напряжений, где ползучесть необходимо учитывать. Так, при обработке данных опытов, выполненных на образцах из дуралюмина [5], приходилось выбирать $n=5,15$ для $\sigma < 275$ МПа и $n=29,07$ для $\sigma > 275$ МПа.

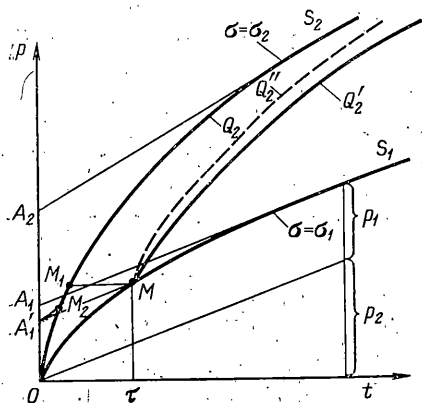
При анализе данных, полученных на стали 30ХМА [1], константу B пришлось выбрать линейной функцией напряжения. Практически во всех работах, где были получены данные по ползучести в достаточно широком диапазоне, происходит то же самое. Кроме того, следует отметить очень большой разброс опытных кривых, полученных в опытах на ползучесть при идентичных условиях (расхождение по накопленным деформациям могут быть в несколько раз). Поэтому нет смысла пытаться точно удовлетворить всем отдельным промежуточным фактическим кривым, а необ-

ходимо при достаточно близком соответствии всей гамме кривых получить соотношение, работающее во всем диапазоне напряжений.

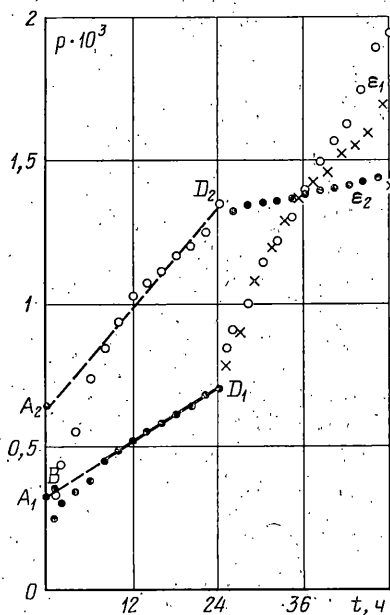
Проведенный авторами анализ большого числа экспериментальных данных для различных металлов показывает, что если для установившейся ползучести записать соотношения вида

$$p^* = A(\sigma - \sigma_0)^n / (\sigma_b - \sigma)^n \quad (\sigma > \sigma_0) \quad (1.3)$$

где σ_0 — напряжение, ниже которого практически нет ползучести, а σ_b — напряжение типа предела прочности, то удается достаточно хорошо единой зависимостью (1.3) описать весь диапазон изменения σ . Отметим, что для конструкционных (обычно многокомпонентных) сплавов во многих случаях n можно принять за единицу. Для чистых металлов $n \approx 3$.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Для случая, когда необходимо учитывать не только установившееся течение (обычно второй участок на кривой ползучести), но и область упрочнения (первый участок), оказывается весьма эффективным принятие простейшей гипотезы о разделении полной деформации на установившуюся p_2 и ограниченную p_1 ($p = p_1 + p_2$).

На фиг. 1 представлена характерная кривая ползучести, на которой выделены деформации p_1 и p_2 . Для p_2 используется соотношение (1.3), а для p_1 — соотношение вида теории упрочнения

$$p_1^* = \varphi(\sigma, p_1, T) \quad (2.1)$$

Условие ограниченности для p_1 в простейшем виде можно записать в форме

$$p_1^* = \varphi_1(p_1) \varphi_2(\sigma) (\psi(\sigma) - p_1) \quad (2.2)$$

Известны [6, 7] попытки подобного представления деформации p , но они либо содержали много слагаемых, либо не учитывали установившуюся стадию. Используя (1.3) и (2.1), где под p в (1.3) следует понимать p_2 , можно, не конкретизируя соотношение (2.1), строить теоретические кривые ползучести при ступенчатом нагружении по экспериментальным кривым, полученным при постоянных напряжениях.

Метод построения теоретической кривой при одноступенчатом догружении состоит в следующем (см. фиг. 1). В момент перехода от напряжения σ_1 к σ_2 (время τ) из точки M проводится касательная, параллельная установившемуся течению при $\sigma = \sigma_1$ (прямая A_1S_1), до пересечения с осью

ординат (точка A_1'). Далее из точки A_1' проводится прямая, параллельная прямой, характеризующей установившееся течение при $\sigma = \sigma_2$ (прямая A_2S_2), до пересечения с базовой кривой ползучести при $\sigma = \sigma_2$. Точка пересечения (M_2) определяет теоретическую кривую при ступенчатом догружении, если принята система (1.3), (2.1). Поэтому теоретическая кривая ползучести при ступенчатой догрузке должна пойти по Q_2'' (параллельный перенос кривой Q_2 из точки M_2 в точку M).

На фиг. 1 показана также точка M_1 и кривая Q_2' , соответствующие теории упрочнения без выделения установившегося течения. По изложенной методике выполнена обработка опытов на ползучесть при ступенчатых режимах (фиг. 2). В качестве примера взяты данные, полученные на образцах из алюминиевого сплава Д16Т (время в ч). При ступенчатом догружении (от точки D_1) экспериментальная (темные точки) и теоретическая (кресты) кривые практически совпадают. При ступенчатой разгрузке (от точки D_2) построение всей кривой возможно только при соответствующем наборе опытных данных при частичных разгрузках, но установившееся состояние, когда на основе соотношения (2.2) имеем $p_1 \approx \psi(\sigma)$, может быть оценено и без конкретизации ψ . Это позволяет получить теоретическую точку ε_2 , которая практически совпадает с экспериментом.

Метод обработки, включающий нахождение всех параметров, был использован при анализе большого числа данных. В качестве характерного примера приведем результаты обработки кривых ползучести, полученных Работновым Ю. Н. [1, с. 203]. В качестве конкретных функций для системы (1.3), (2.1) приняты простейшие соотношения $p_1 = C(p^\circ - p_1)$, $p^\circ = B(\sigma/\sigma_0 - 1)$, $p_2 = A(\sigma - \sigma_0)/(\sigma_b - \sigma)$.

На основе обработки были получены следующие значения констант: $\sigma_0 = 117$, $\sigma_b = 297$ (МПа), $C = 0,15$, $A = 3,8 \cdot 10^{-5}$ (r^{-1}), $B = 27 \cdot 10^{-3}$.

На фиг. 3 сплошными линиями нанесены экспериментальные кривые. Светлыми точками отмечены результаты аппроксимации. Штриховые линии — результаты аппроксимации при использовании соотношения (1.2), когда α и B не зависят от напряжения. Темными точками показано уточнение, даваемое соотношением (1.2), когда $1/\alpha$ и B считались линейными функциями напряжений. Цифрами указаны напряжения, при которых были получены кривые ползучести.

Отметим, что при практических расчетах, когда основное значение играет только вязкое течение, для описания процесса ползучести достаточно одного соотношения (2.1).

В случае, когда необходим учет третьего участка кривой ползучести и эффекта длительной прочности, соотношение (2.1) можно записать в виде $p_2 = A(\sigma - \sigma_0)/[\sigma_b(1 - \omega) - \sigma]$, которое естественно дополняется кинетическим уравнением для параметра поврежденности ω типа $\dot{\omega} = \omega^\gamma(\sigma, \omega, T)$.

Для случая сложного напряженного состояния можно предложить простейшую методiku обобщения предложенных соотношений. Примем, что выполняется закон течения в виде

$$p_{ij} = \lambda s_{ij} \quad (p_{ii} = 0) \quad (2.3)$$

где p_{ij} — тензор деформаций ползучести, s_{ij} — девиатор тензора напряжений.

Введем обозначения $p_e = p_{ij} p_{ij}$. Тогда

$$p_e = \lambda \sigma_e, \quad \sigma_e^2 = s_{ij} s_{ij} \quad (2.4)$$

Естественным обобщением дробно-линейных соотношений на случай сложного напряженного состояния будет гипотеза типа

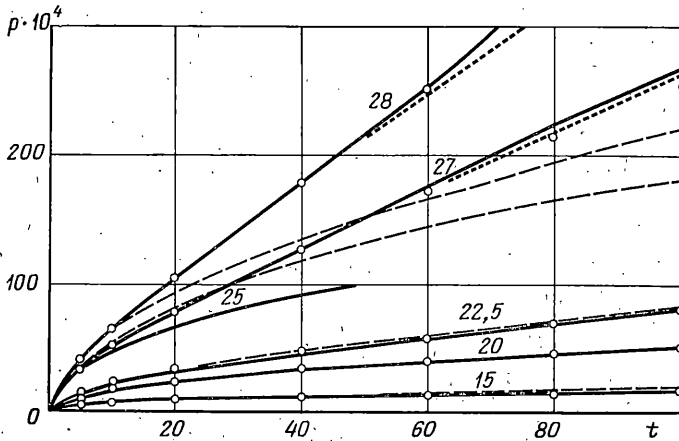
$$\lambda = \frac{A}{\sigma_b - k\sigma_e}, \quad k = 1 + (\gamma - 1) \frac{\sigma_1}{|\sigma_1|}, \quad \sigma_1 = \sigma_{ii} \quad (2.5)$$

Отметим, что соотношения (2.3)–(2.5) соответствуют только установившемуся течению (или только компоненте p_2 для одноосного случая). Следовательно, можно записать, что $p_{ij}^{(2)} = \lambda s_{ij}$. Соответственно для $p_{ij}^{(1)}$

имеем $p_{ij}^{(1)} = B(Cs_{ij} - p_{ij}^{(1)})$, где B и C в общем случае являются функциями инвариантов тензоров напряжений, тензоров деформаций ползучести и, естественно, температуры.

Аналогично рассмотренным ранее примерам может иметь место просто линейная зависимость C от напряжения, например от σ_z , а B просто не зависит от напряжений. В общем случае $p_{ij}^* = p_{ij}^{*(1)} + p_{ij}^{*(2)}$.

3. Отметим также, что если рассматривать одноосное напряженное состояние, то постановка, связанная с подобным разделением деформаций



Фиг. 3

ползучести на две компоненты p_1 и p_2 , в общем виде приводит к кинетическому уравнению

$$p^* = \psi_1(\sigma, p^*) \sigma^* + \psi_2(\sigma, p^*) \quad (3.1)$$

Соотношение (3.1) не является общим уравнением второго порядка. По своей структуре оно соответствует обобщенному соотношению теории упрочнения, но не относительно накопленной деформации ползучести, а относительно скорости ползучести. Если ввести обозначение $p^* = r$, то получим уравнение

$$r^* = \psi_1(\sigma, r) \sigma^* + \psi_2(\sigma, r) \quad (3.2)$$

При этом второе слагаемое имеет полную аналогию с теорией упрочнения, а первое реагирует на мгновенное догружение. Соотношение (3.2) по структуре аналогично общему уравнению теории упрочнения с учетом как мгновенных, так и длительных деформаций.

Отметим, что дробно-линейная функция в ее простейшем виде была использована для аппроксимации опытных данных, полученных при одноосном растяжении. В случае, когда происходит смена растяжения на сжатие, можно воспользоваться общими соотношениями (2.4), (2.5), но проще выписать систему

$$\varepsilon^* = \frac{A\sigma\sigma_{1b}}{\sigma_{1b} - \sigma} \quad (\sigma > 0), \quad \varepsilon^* = \frac{A\sigma\sigma_{2b}}{\sigma_{2b} - \sigma} \quad (\sigma < 0) \quad (3.3)$$

Очевидно, что соотношение (3.3) дает непрерывную зависимость для ε^* при переходе через $\sigma = 0$. Поэтому, если $\sigma_b \neq \sigma_{2b}$, то материал можно считать разносопротивляющимся на растяжение и сжатие при больших ур-

нях напряжений и практически одинаково деформирующимся при малых. Существующие экспериментальные данные подтверждают подобные представления.

Остановимся на еще одной особенности функциональных характеристик, используемых в ползучести. Известно [8], что зависимость от напряжений должна удовлетворять некоторому условию, выражающемуся в простейшем случае в виде неравенства $\partial^2 p / \partial \sigma^2 \geq 0$. В случае степенного закона с упрочнением данное неравенство приводит к определенной зависимости показателей степеней. Если используется соотношение (3.3), то можно показать, что выполняется не только отмеченное условие, но и производные любого порядка (как и в случае гиперболического синуса) будут положительными.

4. В качестве конкретного примера использования предложенной дробно-линейной зависимости рассмотрим задачу о продольном изгибе стержня длиной L под действием постоянной нагрузки P . В этом случае примем предположение об идеализированном сечении и используем метод коллокации [9]. Тогда, используя условия равновесия для сжатой и растянутой полки, соответственно, нетрудно получить выражения для напряжений через безразмерный прогиб u (прогиб в центре отнесенный к половине толщины стержня h) и среднее значение напряжений σ_c (F — площадь полки)

$$\sigma_1 = \sigma_c(1+u), \quad \sigma_2 = \sigma_c(1-u) \quad (\sigma_c = P/2F) \quad (4.1)$$

Гипотеза плоских сечений и условие малости для прогибов дадут выражения для деформаций

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \rho u, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0 + \rho u, \quad (\rho = \pi^2 h^2 / L^2) \quad (4.2)$$

Комбинируя (3.3), (4.1) и (4.2), получим дифференциальное уравнение для u , которое будет различным для $u < 1$ и $u > 1$ (при $u < 1$ обе полки сжаты, при $u > 1$ во внешней полке растяжение). Имеем

$$\frac{\rho u}{A \sigma_c} = - \frac{\alpha_2^2 u}{(1 + \alpha_2)^2 - u^2} \quad (u < 1) \quad \left(\alpha_i = \frac{\sigma_{ib}}{\sigma_c} \right) \quad (4.3)$$

$$\frac{\rho u}{A \sigma_c} = - \frac{2\alpha_1 \alpha_2 u - (\alpha_1 + \alpha_2)(1 - u^2)}{2(\alpha_1 - 1 + u)(\alpha_2 + 1 + u)} \quad (u > 1) \quad (4.4)$$

Уравнение (4.3) интегрируется по u от u_0 до 1 и уравнение (4.4) от 1 до u^* . Значение u^* определяется из условия $u \rightarrow \infty$. Очевидно, что такой процесс будет иметь место при $\alpha_2 < -2$ и $\alpha_2 - \alpha_1 > 2$. Тогда потеря несущей способности произойдет при $u^* = 1 - \alpha_1$. Если $\alpha_2 - \alpha_1 < 2$, то $u^* = -\alpha_2 - 1$, если $\alpha_2 > -2$ (очевидно, что $\alpha_2 < 1$), то $u^* = -\alpha_2 - 1$ и исчерпание несущей способности будет при $u^* < 1$, т. е. уравнение (4.3) интегрируется от u_0 до u^* .

Отметим, что в отличие от степенной или экспоненциальной зависимостей использование дробно-линейного соотношения приводит к качественно новому результату — потере несущей способности при малых прогибах. Это аналогично поведению стержня с учетом мгновенных пластических деформаций [10]. При этом не нужно рассматривать бесконечные прогибы, как для обычных соотношений, и все гипотезы линейной геометрии оказываются оправданными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.
3. Шестериков С. А., Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов. — В кн.: Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. Т. 13. М.: ВИНТИ, 1980, с. 3—104.
4. Гарофало Ф. Законы ползучести и длительной прочности металлов и сплавов. М.: Металлургия, 1968. 304 с.

5. *Наместников В. С.* О ползучести алюминиевого сплава при переменных нагрузках.— ПМТФ, 1964, № 2, с. 99—105.
6. *Брызгалин Г. И.* О ползучести при переменных напряжениях.— ПМТФ, 1962, № 3, с. 73—77.
7. *Самарин Ю. П.* Построение экспоненциальных аппроксимаций для кривых ползучести методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых.— Проблемы прочности, 1974, № 9, с. 24—27.
8. *Шестериков С. А.* Об одном условии для законов ползучести.— Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 1, с. 131.
9. *Шестериков С. А.* Выпучивание при ползучести.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 4, с. 754—755.
10. *Де Вебек В. Ф.* Выпучивание при ползучести.— В кн.: Влияние высоких температур на авиационные конструкции. М.: Оборонгиз, 1961, с. 312—335.

Москва

Поступила в редакцию
12.III.1983