

УДК 539.374

ЭВОЛЮЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНЫ В НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОЙ СРЕДЕ

ИЦКОВИЧ М. А., НИГУЛ У. К.

Изучается распространение одномерной продольной волны в наследственно-упругой среде со слабо сингулярными ядрами [1, 2], ранее рассмотренное в [3-5]. На основе преобразования Лапласа получены численные результаты, описывающие эволюцию формы волны при ее распространении. Анализирована обратная задача вычисления параметров ядра на основе данных измерения эволюции формы волны. Краевое воздействие, порождающее волну, выражено через скорость, изменяющуюся во времени, как внезапно включенная синусоидальная функция или функция Хевисайда.

1. Рассмотрим распространение одномерной продольной волны деформации в линейной изотермической наследственно-упругой среде, определяющее уравнение которой задается [2, 6] либо в форме

$$EU'(X, t) = \sigma(X, t) + K(t) * \sigma(X, t) \quad (1.1)$$

либо в форме

$$\sigma(X, t) = E[U'(X, t) - R(t) * U'(X, t)] \quad (1.2)$$

где X — лагранжева координата, t — время, $U(X, t)$ — продольное перемещение, $\sigma(X, t)$ — продольное напряжение, $K(t)$ — ядро ползучести, $R(t)$ — ядро релаксации, $E = \text{const} > 0$; штрих означает дифференцирование по X , и для краткой записи интегралов типа свертки использовано обозначение вида

$$F(t) * G(X, t) = \int_0^t F(\tau) G(X, t-\tau) d\tau \quad (1.3)$$

Уравнение движения имеет вид

$$\sigma'(X, t) = \rho U''(X, t) \quad (1.4)$$

где ρ — плотность среды; точка означает дифференцирование по t .

Из (1.1) и (1.4) следует уравнение

$$c^2 U''(X, t) - U''(X, t) - K(t) * U''(X, t) = 0, \quad c^2 = E/\rho \quad (1.5)$$

Зададим начальные условия

$$U(X, 0) = 0, \quad U'(X, 0) = 0 \quad (1.6)$$

и одно из следующих краевых условий ($H(t)$ — функция Хевисайда):

$$U'(0, t) = V_0 H(t) \sin \Omega t \quad (1.7)$$

$$U'(0, t) = V_0 H(t) \quad (1.8)$$

Рассмотрим волну, распространяющуюся в положительном направлении оси X .

Используя преобразование Лапласа, на основе (1.5) и (1.6) получим формальное решение

$$U'(X, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} V(s) \exp[st - X\lambda(s)] ds \quad (1.9)$$

$$\lambda(s) = sc^{-1} [1 + K^L(s)]^{1/2} \quad (1.10)$$

где в случае краевого условия (1.7)

$$V(s) = V_0 \Omega / (s^2 + \Omega^2) \quad (1.11)$$

и в случае краевого условия (1.8)

$$V(s) = V_0 / s \quad (1.12)$$

2. Рассмотрим вычисление $U^*(X, t)$ на основе формул (1.9)–(1.11) в случаях, когда ядро ползучести задано либо в форме ядра Абеля [2]

$$K(t) = \kappa t^\alpha / \Gamma(\nu), \quad \alpha = \nu - 1, \quad 0 < \nu < 1, \quad \kappa > 0 \quad (2.1)$$

либо в форме дробно-экспоненциальной функции [2], где $\Gamma(x)$ гамма-функция

$$K(t) = \kappa \mathcal{E}_\alpha(-\beta, t), \quad \beta > 0 \quad (2.2)$$

$$\mathcal{E}_\alpha(-\beta, t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{\nu n}}{\Gamma[(n+1)\nu]} \quad (2.3)$$

Отметим, что функциям ползучести (2.1) и (2.2) соответствуют следующие функции релаксации [2]:

$$R(t) = \kappa \mathcal{E}_\alpha(-\kappa, t) \quad (2.4)$$

$$R(t) = \kappa \mathcal{E}_\alpha(-\kappa - \beta, t) \quad (2.5)$$

В случае (2.1) имеем

$$K^L(s) = \kappa s^{-\nu}, \quad \lambda(s) = (1 + \kappa s^{-\nu})^{1/2} sc^{-1} \quad (2.6)$$

В этом случае, как указано в [3], на первом листе римановой поверхности подынтегральное выражение в (1.9) имеет две точки ветвления: $s=0$ и $s=\infty$. Поэтому для обеспечения однозначности этого выражения достаточно провести разрез s -плоскости от нуля до бесконечности по отрицательной части вещественной оси (фиг. 1).

Введем t_1 по определению $t_1 = t - Xc^{-1}$. Замыкая контур интегрирования справа при $t_1 < 0$ (деформированный контур L_1 на фиг. 1), будем иметь $U^*(X, t) = 0$. Следовательно, решение имеет вид волны с фронтом $t_1 = 0$. Вычисляя решение с помощью применения деформированного контура L_2 , показанного на фиг. 1, по известной методике [6] получим формулы

$$U^*(X, t) = U_S^*(X, t) + U_N^*(X, t) \quad (2.7)$$

$$U_S^*(X, t) = V_0 H(t_1) \exp[-\vartheta(\Omega) X] \sin(\Omega t_S) \quad (2.8)$$

$$U_N^*(X, t) = V_0 H(t_1) \Omega \pi^{-1} N(X, t) \quad (2.9)$$

$$N(X, t) = \int_0^{\infty} (r^2 + \Omega^2)^{-1} \exp\{-r[t - Xf_2(r)]c^{-1}\} \sin[rf_1(r)Xc^{-1}] dr$$

$$\vartheta(\Omega) = g_1(\Omega) \Omega c^{-1}, \quad t_S = t - X[c_S(\Omega)]^{-1}, \quad c_S(\Omega) = c/g_2(\Omega) \quad (2.10)$$

$$g_{1,2}(\Omega) = [\mp 1 \mp \kappa \Omega^{-\nu} \cos(\pi\nu/2) + A(\Omega)]^{1/2} / \sqrt{2}$$

$$A(\Omega) = [1 + 2\kappa \Omega^{-\nu} \cos(\pi\nu/2) + \kappa^2 \Omega^{-2\nu}]^{1/2} \quad (2.11)$$

$$f_{1,2}(r) = [\mp 1 \mp \kappa r^{-\nu} \cos(\pi\nu) + B(r)]^{1/2} / \sqrt{2} \quad (2.12)$$

$$B(r) = [1 + 2\kappa r^{-\nu} \cos(\pi\nu) + \kappa^2 r^{-2\nu}]^{1/2}$$

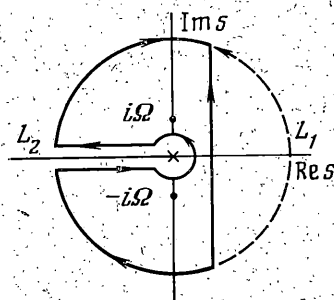
где верхние знаки соответствуют первому, а нижние — второму индексу.

В формуле (2.7) первый член $U_S^*(X, t)$ представляет собой вклад вычетов подынтегральной функции в полюсах $s = i\Omega$ и $s = -i\Omega$, а второй член

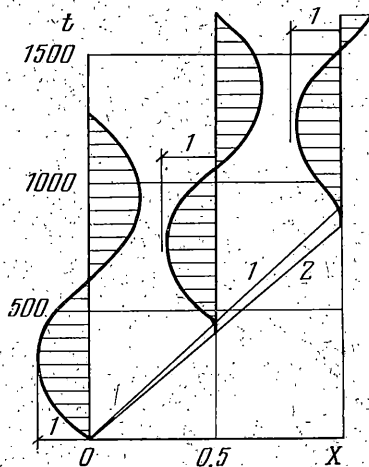
$U_N^*(X, t)$ — вклад интегрирования вдоль берегов линии разреза (обход точки ветвления $s=0$ вклада не дает). С физической точки зрения $U_S(X, t)$ — стационарная часть решения, которая доминирует далеко за фронтом $t_1=0$, а $U_N^*(X, t)$ — нестационарная часть решения, которая быстро затухает за фронтом $t_1=0$.

На фиг. 2 приведены результаты численного вычисления $U^*(X, t)/V_0$ при $X=0; 0,5; 1,0$ м (время t — в мкс) в случае исходных данных: $\kappa=1,58$ [с^{-v}]; $\nu=0,25$; $c=1200$ [м/с]; $\Omega=5\ 000$ [с⁻¹]. Прямая 1 соответствует $t=X/c_s$, прямая 2 описывает фронт волны $t=X/c$.

Из графиков следует, что при малых значениях t_1 вклады первого и второго членов в (2.7) в существенной степени взаимно компенсируются. В результате этого $U^*(X, t)$ весьма мала в прифронтальной зоне, где $X/c < t < X/c_s$. За этой зоной (при $t_s > 0$) вклад $U_N^*(X, t)$ в формуле (2.7) быстро убывает с ростом t_s и доминирующим становится вклад



Фиг. 1



Фиг. 2

$U_S^*(X, t)$. При фиксированном $X=\text{const} > 0$ стационарная часть решения $U_S^*(X, t)$ является подобной к воздействию (1.7), но отличается от него, во-первых, множителем $\exp[-\vartheta(\Omega)X]$, который быстро уменьшается с ростом рассматриваемого $X=\text{const}$, и, во-вторых, сдвигом $\Omega X/c_s$ фазы синусоидальной функции.

Формулы (2.10) определяют $\vartheta(\Omega)$ и $c_s(\Omega)$ через функции $g_1(\Omega)$ и $g_2(\Omega)$. Проанализируем эти функции.

Для типичного случая $\kappa\Omega^{-\nu} \ll 1$ из (2.11) вытекают асимптотические представления [7]

$$g_1(\Omega) \sim 1/2 \kappa \Omega^{-\nu} \sin(\pi\nu/2) + O[(\kappa\Omega^{-\nu})^2] \quad (2.13)$$

$$g_2(\Omega) \sim 1 + 1/2 \kappa \Omega^{-\nu} \cos(\pi\nu/2) + O[(\kappa\Omega^{-\nu})^2] \quad (2.14)$$

на основе которых с учетом определений (2.10) легко установить, что $\vartheta(\Omega) \rightarrow \infty$ и $c_s(\Omega) \rightarrow c$ при $\Omega \rightarrow \infty$. Следовательно, высокочастотные (короткие) волны быстро затухают и распространяются с фазовой скоростью $c_s(\Omega)$, близкой скорости c распространения фронта.

С другой стороны, на основе (2.10) и (2.11) нетрудно показать, что $\vartheta(\Omega) \rightarrow 0$ и $c_s(\Omega) \rightarrow 0$ при $\Omega \rightarrow 0$. Следовательно, низкочастотные (длинные) волны затухают очень медленно и распространяются с очень малой фазовой скоростью. Это следствие может быть интерпретировано как недостаток простейшей модели (2.1) слабо сингулярного ядра, которая зависит от двух параметров κ и ν .

Рассмотрим теперь случай ядра (2.2), зависящего от трех параметров κ , ν и β .

При $t \rightarrow 0$ ядро (2.1) является асимптотическим представлением ядра (2.2) [2]. Поэтому при ядрах (2.1) и (2.2) решения одинаковые на фрон-

те $t_1=0$ и близкие в некоторой прифронтальной зоне, но за фронтом их различие увеличивается с ростом t_1 .

В случае ядра (2.2) решение также может быть записано в виде формул (2.7)–(2.10), если выражения (2.11) и (2.12) заменить следующими выражениями:

$$g_{1,2}(\Omega) = \{1/2 [N(\Omega) \mp M(\Omega)]\}^{1/2}, \quad f_{1,2}(\Omega) = \{1/2 [N(r) \mp M(r)]\}^{1/2} \quad (2.15)$$

$$M(z) = 1 + K_c(z), \quad N(z) = [M^2(z) + K_s^2(z)]^{1/2}$$

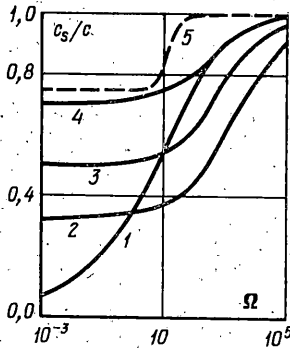
$$K_c(z) = \kappa P(z) / [P^2(z) + Q^2(z)]$$

$$K_s(z) = \kappa Q(z) / [P^2(z) + Q^2(z)]$$

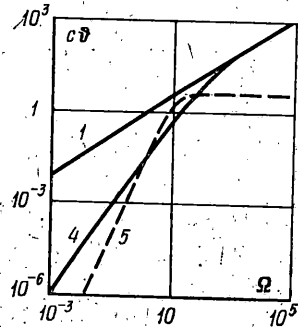
$$P(\Omega) = \Omega^\nu \cos(\pi\nu/2) + \beta, \quad Q(\Omega) = \Omega^\nu \sin(\pi\nu/2)$$

$$P(r) = r^\nu \cos(\pi\nu) + \beta, \quad Q(r) = r^\nu \sin(\pi\nu)$$

Результаты численных расчетов, проведенных авторами на основе этих формул, позволяют сформулировать следующий вывод: при типичных ис-



Фиг. 3



Фиг. 4

ходных данных $U_N^*(X, t)$ столь быстро затухает за фронтом $t_1=0$, что практически достаточно вычислять $U_N^*(X, t)$ с учетом только первого ($n=0$) члена суммы (2.3), т. е. заменой ядра (2.2) с ядром (2.1). Однако поведение стационарной части решения $U_s^*(X, t)$ при ядрах (2.1) и (2.2), вообще говоря, является различным, и при этом в случае ядра (2.2) помимо численных значений κ и ν в существенной степени зависит от выбора численного значения β [7]. Для иллюстрации сказанного на фиг. 3–5 приведены диаграммы величин $c^*(\Omega)$ и $c_s(\Omega)/c$, которые согласно формулам (2.8) и (2.10) определяют поведение стационарной части (2.8) решения.

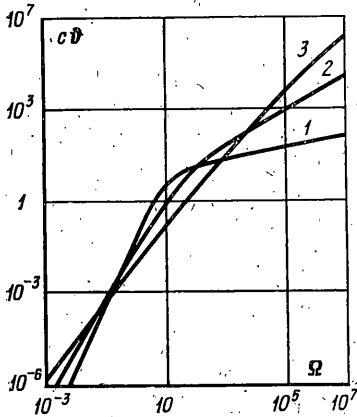
На фиг. 3 и 4 приведены диаграммы для случая $\nu=1/2$. Кривая 1 — $\kappa=10$ и $\beta=0$, кривая 2 — $\kappa=80$ и $\beta=10$, кривая 3 — $\kappa=30$ и $\beta=10$, кривая 4 — $\kappa=10$ и $\beta=10$; размерность κ и β в $c^{-\nu}$, а размерность Ω и $c^*(\Omega)$ — в c^{-1} ; кривая 5 — стандартное вязкоупругое тело (для сравнения) с ядром ползучести $(\eta/\tau_0)\exp(-t/\tau_0)$ при $\eta=0,8$ и $\tau_0=0,1$ в размерности с. Обратим внимание на качественное различие поведения $c^*(\Omega)$ в случаях слабо сингулярного и регулярного ядер при больших значениях Ω . Этот факт имеет принципиальное значение при поиске (на основе экспериментальных данных) подходящей математической модели ядра ползучести для описания волн деформации в реальных средах.

Фиг. 5 иллюстрирует зависимость диаграммы $c^*(\Omega)$ от выбора численного значения параметра ν . Размерности рассматриваемых величин такие же, как на фиг. 4; в расчетах приняты $\kappa=10$ и $\beta=10$, причем в случае кривой 1 — $\nu=1/5$, в случае кривой 2 — $\nu=1/2$ и в случае кривой 3 — $\nu=1/6$.

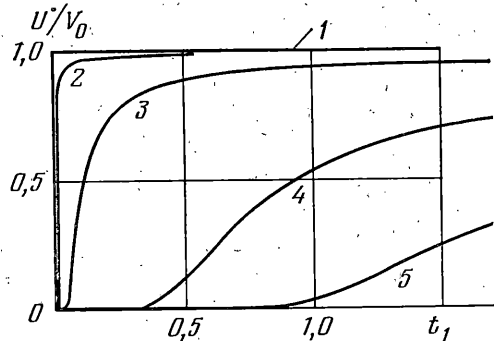
Отметим, что асимптотический анализ поведения стационарной части решения в случае ядра ползучести (2.2) при $\Omega \rightarrow 0$ и при $\Omega \rightarrow \infty$ проведен в [7].

3. Рассмотрим обратную задачу акустодиагностики, состоящую в выяснении возможности применения модели, использованной в данной работе, для описания волн деформации в какой-либо реальной среде и в нахождении численных значений постоянных κ , ν и β на основе экспериментальных данных. Один из возможных путей ее решения заключается в генерировании в точке $X=0$ импульсов вида (1.7) и в измерении в некоторой точке $X=l$ импульсов вида (2.7).

Допустим, что путем обработки на основе (2.7)–(2.10) экспериментальных данных, полученных при фиксированных частотах $\Omega=\Omega_m$ ($m=0, 1, \dots, M$) воздействия, вычислены числовые значения величин



Фиг. 5



Фиг. 6

$c\delta(\Omega_m)$ и $c_s(\Omega_m)/c$, причем $\Omega_0 > \Omega_1 > \Omega_2 > \dots > \Omega_M$. Предположим, что выбранная частота Ω_0 достаточно большая, так что выполняется неравенство $\kappa\Omega_0^{-\nu} \ll 1$. Тогда на основе асимптотических представлений (2.9) можно вывести следующие расчетные формулы:

$$\nu \approx 2\pi^{-1} \arctg \varphi(\Omega_0), \quad \varphi(\Omega) = g_1(\Omega_0)/[g_2(\Omega_0) - 1]$$

$$\kappa \approx 2\Omega_0 [\Psi(\Omega_0)]^{1/2}, \quad \Psi(\Omega_0) = [g_1(\Omega_0)]^2 + [g_2(\Omega_0) - 1]^2$$

на основе которых несложно вычислить приближенные значения κ и ν .

Рассматриваемая модель пригодна, если далее удастся выбрать такое значение β , при котором диаграммы величин $c\delta(\Omega)$ и $c^s(\Omega)/c$ типа фиг. 3 и 4 хорошо согласуются дискретными значениями этих величин $c\delta(\Omega_m)$ и $c_s(\Omega_m)/c$ при $m=1, 2, \dots, M$, найденными выше указанным образом на основе экспериментальных данных.

4. Рассмотрим вычисление оригинала на основе формул (1.9) и (1.12), из которых следует, что в случае краевого воздействия (1.8) $U(X, t) \rightarrow 0$, $t_1 \rightarrow +0$; $U(X, t) \rightarrow V_0$, $t \rightarrow \infty$ в области $X > 0$.

Точки ветвления подынтегральной функции в (1.9) те же, что и в случае воздействия (1.7); существует один полюс $s=0$. Проводя вычисления аналогично п. 2, в случае ядра (2.1) получим

$$U(X, t) = V_0 H(t_1) \left\{ 1 - \pi^{-1} \int_0^{\infty} r^{-1} \exp\{-r[t - Xf_2(r)c^{-1}]\} \sin[rf_1(r)Xc^{-1}] dr \right\}$$

где $f_1(r)$ и $f_2(r)$ определяются по формуле (2.12).

Эволюция волны показана на фиг. 6. Кривые 1–5 соответствуют $X=0$; 0,1; 1; 5 и 10 см; $\kappa=1,58$ [с^{-ν}]; $\nu=0,25$; $c=1200$ [м/с].

При малых фиксированных значениях $X=\text{const}$ (см. фиг. 6) скорость $U(X, t)$ за фронтом $t_1=0$ с увеличением t_1 вначале возрастает весьма быстро, а затем медленно приближается к постоянному значению V_0 ,

а при больших фиксированных значениях $X = \text{const}$ скорость $U(X, t)$ плавно растет с ростом t_1 до значения V_0 , причем непосредственно за фронтом появляется зона, где $U(X, t) \ll V_0$ (ширина этой зоны растет с ростом X).

5. Ссылаясь на [8], отметим, что в случае произвольного ядра ползучести, описывающего заглушающую память, также является возможным представление решения в случае краевого воздействия (1.7) в виде суммы (2.7) стационарной части $U_s(X, t)$ и нестационарной части $U_N(X, t)$, причем $U_s(X, t)$ может быть вычислена как вклад вычетов в полюсах $s = i\Omega$ и $s = -i\Omega$ по формулам (2.8), (2.10), (2.15), если под $K_C(\Omega)$ и $K_S(\Omega)$ подразумевать интегралы

$$K_C(\Omega) = \int_0^{\infty} K(t) \cos \Omega t dt, \quad K_S(\Omega) = \int_0^{\infty} K(t) \sin \Omega t dt$$

но для вычисления $U_N(X, t)$ необходима конкретизация ядра $K(t)$ (в [8], например, предложен способ построения асимптотического представления $U_N(X, t)$ в случае регулярного ядра $K(t)$ для области малых X).

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием.— ПММ, 1948, т. 12, вып. 1, с. 53—62.
2. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
3. Суворова Ю. В. О применении интегральных преобразований в одномерных волновых задачах наследственной вязкоупругости.— В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975, с. 464—471.
4. Rabotnov Yu. N., Suvorova J. V. The nonlinear hereditary type stress-strain relation for metals.— Internat. J. Solids and Struct., 1978, v. 14, No. 3, p. 173—185.
5. Белов М. А., Богданович А. Е. Численное обращение преобразования Лапласа методом асимптотического расширения интервала в динамических задачах вязкоупругости.— Механика полимеров, 1976, № 5, с. 864—870.
6. Нигул У. К. Нелинейная акустодиагностика (одномерные задачи). Л.: Судостроение, 1981. 252 с.
7. Мешков С. И. Интегральное представление дробно-экспоненциальных функций и их приложение к динамическим задачам линейной вязкоупругости.— ПМТФ, 1970, № 1, с. 103—110.
8. Nigul U. Asymptotic analyses of the pulse shape evolution and of the inverse problem of acoustic evaluation in case of the nonlinear hereditary medium. IUTAM Symposium. Tallinn, 1982. Nonlinear Deformation Waves.: В.— Heidelberg — N. Y.: Springer, 1983, p. 255—272.

Таллин

Поступила в редакцию
4.XI.1983