

УДК 539.374

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕТОДА НЕЛИНЕЙНОЙ ФОТОВЯЗКОУПРУГОСТИ

ШАРАФУТДИНОВ Г. З.

Поляризационно-оптический метод находит все большее применение в механике деформируемого твердого тела [1, 2]. В последнее время кроме решения задач теории упругости он используется при исследовании неупругих нелинейных задач, в частности задач нелинейной вязкоупругости. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений в вязкоупругих телах называют методом фотовязкоупругости.

Цель публикуемой работы — установление зависимостей между величиной двойного лучепреломления и компонентами тензоров напряжений или деформаций и указание способов практического определения материальных функций, входящих в основной закон фотовязкоупругости и определяющие соотношения физически нелинейного несжимаемого вязкоупругого материала, описываемого соотношениями главной кубичной теории вязкоупругости Ильюшина — Огбалова [3].

1. Известно [4], что учет оптической анизотропии осуществляется введением тензора диэлектрической проницаемости κ_0 , связывающим вектора электрической индукции и напряженности электрического поля.

Для сред без поглощения тензор диэлектрической проницаемости имеет вещественные компоненты [5] и может быть приведен к главным осям. Величина временного двойного лучепреломления определяется разностью главных значений тензора диэлектрической проницаемости и поэтому вопрос о связи оптических и механических величин в поляризационно-оптическом методе сводится к установлению зависимостей между главными компонентами тензоров второго ранга: κ_{ij} , напряжений σ_{ij} , деформаций ε_{ij} . Эта связь может быть сформулирована как раздельная между тензорами κ_{ij} и σ_{ij} , либо κ_{ij} и ε_{ij} , так и совместная — между тензорами κ_{ij} , σ_{ij} и ε_{ij} . При установленных соотношениях связи между напряжениями и деформациями все возможные варианты оптико-механических соотношений эквивалентны. Выбор того или иного вида основного закона чаще всего зависит от способа определения напряженно-деформированного состояния по данным поляризационно-оптического метода.

В рамках линейной теории связь между величиной двойного лучепреломления и механическими величинами может быть приведена к виду [6]:

$$[\sigma_1(t) - \sigma_2(t)] \cos 2\alpha(t) = \frac{2n_0}{h} \int_0^t \Phi(t-\tau) d[\delta(\tau) \cos 2\varphi(\tau)] \quad (1.1)$$

$$[\sigma_1(t) - \sigma_2(t)] \sin 2\alpha(t) = \frac{2n_0}{h} \int_0^t \Phi(t-\tau) d[\delta(\tau) \sin 2\varphi(\tau)] \quad (1.2)$$

Относительная разность хода δ и параметр оптической изоклины φ связаны с компонентами тензора κ_{ij} соотношениями

$$\delta \cos 2\varphi = h(\kappa_{11} - \kappa_{22})/2n_0, \quad \delta \sin 2\varphi = h\kappa_{12}/2n_0, \quad n_0 = \sqrt{\kappa_0} \quad (1.3)$$

где h — толщина просвечиваемого слоя оптически чувствительного материала, n_0 — показатель преломления первоначально оптически изотропной среды.

Аналогичные соотношения имеют место и для связи разности главных деформаций и их направлений с оптическими величинами δ и φ .

При не зависящем от времени параметре изоклины Φ главные оптические и механические направления совпадают, в противном случае — могут не совпадать. В случае совпадения главных направлений (1.1), (1.2) приводятся к виду

$$\sigma_1(t) - \sigma_2(t) = \frac{2n_0}{h} \int_0^t \Phi(t-\tau) d\delta(\tau) \quad (1.4)$$

При экспериментальном определении функции $\Phi(t)$ предпочтительнее использовать (1.4) вместо (1.1) или (1.2), задавая относительную разность хода в виде ступенчатой функции, хотя возможен и произвольный закон изменения $\delta(t)$. В последнем случае возникает необходимость в численном решении уравнения (1.4) относительно $\Phi(t)$.

Существует также другая возможность определения функции $\Phi(t)$ — из эксперимента на ползучесть с одновременной регистрацией величины двойного лучепреломления. В соотношении, обратном (1.4):

$$\delta(t) = \frac{h}{2n_0} \int_0^t F(t-\tau) d[\sigma_1(\tau) - \sigma_2(\tau)] \quad (1.5)$$

функции $\delta(t)$, $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ известны из эксперимента, а $F(t)$ определяется из соотношения

$$F(t) = (2n_0/h) \delta(t) / (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (t \geq 0) \quad (1.6)$$

Искомая функция Φ определяется из известного интегрального уравнения, связывающего Φ и F [7].

2. Связь между оптическими и механическими величинами в нелинейной фотовязкоупругости, так же как и в линейной, устанавливается на основе зависимости между тензорами диэлектрической проницаемости и напряжений или деформаций.

Прежде всего отметим, что здесь рассматриваются нелинейные соотношения связи между оптическими и механическими величинами, хотя в рамках нелинейной фотовязкоупругости возможны и линейные соотношения связи между указанными величинами при нелинейной связи между напряжениями и деформациями.

Для определенности рассмотрим связь между напряжениями и оптическими величинами и запишем ее в виде соотношений главной кубичной теории, связывающих девиаторы диэлектрической проницаемости κ_{ij}° и напряжений s_{ij} :

$$s_{ij}(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau) d\kappa_{ij}^\circ - \int_0^t \Phi_3(t-\tau) d[\kappa^\circ \kappa_{ij}^\circ], \quad \kappa^\circ = \kappa_{ij}^\circ \kappa_{ij}^\circ \quad (2.1)$$

$$\kappa_{ij}^\circ(t) = \int_0^t F(t-\tau) ds_{ij} + \int_0^t F_3(t-\tau) d[ss_{ij}], \quad s = s_{ij}s_{ij} \quad (2.2)$$

Приводя эти уравнения к разности главных компонент, получим

$$\frac{h}{2n_0} (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha = \int_0^t \Phi(t-\tau) d[\delta \cos 2\varphi] - \int_0^t \Phi_3(t-\tau) d[\kappa^\circ \delta \cos 2\varphi] \quad (2.3)$$

$$\frac{h}{2n_0} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha = \int_0^t \Phi(t-\tau) d[\delta \sin 2\alpha] - \int_0^t \Phi_3(t-\tau) d[\kappa^\circ \delta \sin 2\varphi] \quad (2.4)$$

$$\frac{2n_0}{h} \delta \cos 2\varphi = \int_0^t F(t-\tau) d[(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha] + \int_0^t F_s(t-\tau) d[s(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha] \quad (2.5)$$

$$\frac{2n_0}{h} \delta \sin 2\varphi = \int_0^t F(t-\tau) d[(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha] + \int_0^t F_s(t-\tau) d[s(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha] \quad (2.6)$$

При постоянном в данной точке значении параметра изоклины главные оптические и механические направления совпадают.

Применение соотношений (2.3)–(2.6) связано с определенными затруднениями, а именно: при использовании (2.3), (2.4) необходимо определять второй инвариант девиатора диэлектрической проницаемости κ^0 , а при использовании (2.5), (2.6) остается неизвестной величина s , что приводит, при определении разности главных напряжений, к необходимости использования метода последовательных приближений, заключающегося в том, что на первом шаге отбрасывается второй член в правой части (2.5) или (2.6) и определение напряжений производится при таком «укороченном» соотношении. Во втором и дальнейших приближениях величина s определяется по значениям компонент напряжений, вычисленным в предыдущих приближениях.

Если применение (2.5), (2.6) приводит к увеличению объема вычислений, что, впрочем, несущественно при использовании ЭВМ для обработки экспериментальных данных, то определение κ^0 требует дополнительных экспериментальных данных. Действительно, второй инвариант может быть представлен в виде

$$\kappa^0 = 1/3 [(\kappa_1 - \kappa_2)^2 + (\kappa_2 - \kappa_3)^2 + (\kappa_3 - \kappa_1)^2] \quad (2.7)$$

откуда нетрудно заключить, что помимо разности $\kappa_1 - \kappa_2$, измеряемой при нормальном просвечивании оптически чувствительной пластинки, необходимо определение относительной разности хода, по крайней мере в одном из двух других взаимно перпендикулярных направлений в данной точке модели.

В качестве таких дополнительных экспериментальных данных предлагается использовать оптические характеристики, измеренные при наклонном просвечивании, выполненном вокруг одной из осей координат, расположенной в плоскости модели. Опуская несложные выкладки, приведем соотношение, позволяющее решить поставленную задачу

$$\operatorname{ctg} 2\gamma = \frac{1 + \cos^2 \psi}{2 \cos \psi} \operatorname{ctg} 2\varphi - \frac{\sin^2 \psi (\kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_3)}{2 \cos \psi \sin \varphi (\kappa_1 - \kappa_2)} \quad (2.8)$$

где γ — параметр изоклины при наклонном просвечивании, ψ — угол между нормалью к плоскости модели и направлением луча света в модели.

Преобразуем второй член в (2.8), для чего добавим и вычтем из него κ_2 ; в результате получим

$$\operatorname{ctg} 2\gamma = \frac{1 + \cos^2 \psi}{2 \cos \psi} \operatorname{ctg} 2\varphi - \frac{\sin^2 \psi}{2 \cos \psi \sin 2\varphi} - \frac{\sin 2\psi (\kappa_2 - \kappa_3)}{\cos \psi \sin 2\varphi (\kappa_1 - \kappa_2)} \quad (2.9)$$

откуда нетрудно вывести

$$\kappa_2 - \kappa_3 = \left[\frac{1 + \cos^2 \psi}{2 \cos \psi} \operatorname{ctg} 2\varphi - \operatorname{ctg} 2\gamma - \frac{\sin^2 \psi}{2 \cos \psi \sin 2\varphi} \right] \frac{(\kappa_1 - \kappa_2) \cos \psi \sin 2\varphi}{\sin^2 \psi} \quad (2.10)$$

Аналогично прибавляя и вычитая κ_1 , получим

$$\kappa_1 - \kappa_3 = \left[\frac{1 + \cos^2 \psi}{2 \cos \psi} \operatorname{ctg} 2\varphi - \operatorname{ctg} 2\gamma + \frac{\sin^2 \psi}{2 \cos \psi \sin 2\varphi} \right] \frac{(\kappa_1 - \kappa_2) \cos \psi \sin 2\varphi}{\sin^2 \psi} \quad (2.11)$$

Таким образом, инвариант κ° определен и, следовательно, соотношения (2.5) и (2.6) могут быть использованы для определения разности главных напряжений и их направлений.

3. Характеристики вязкоупругого материала определяются материальными функциями, входящими в основные соотношения используемой здесь главной кубической теории

$$\begin{aligned} s_{ij}(t) &= \int_0^t R(t-\tau) de_{ij}(\tau) - \int_0^t \Gamma_s(t-\tau) ee_{ij}(\tau) d\tau, \quad e = e_{ij}e_{ij} \\ e_{ij}(t) &= \int_0^t \Pi(t-\tau) ds_{ij}(\tau) + \int_0^t K_s(t-\tau) ss_{ij}(\tau) d\tau, \quad s = s_{ij}s_{ij} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Линейные функции релаксации $R(t)$ и ползучести $\Pi(t)$ определяются по экспериментальным данным, как правило, при невысоких уровнях деформаций и напряжений. Прежде чем перейти к определению ядер, входящих во вторые члены правых частей (3.1), преобразуем эти соотношения. Обозначим $\Gamma_s(t) = -R_2'(t)$, $K_s(t) = \Pi_2'(t)$. После несложных преобразований с учетом регулярности ядер Γ_s и K_s получим

$$s_{ij}(t) = \int_0^t R(t-\tau) de_{ij}(\tau) - R_2(0) ee_{ij}(t) + \int_0^t R_2(t-\tau) d[ee_{ij}(\tau)] \quad (3.2)$$

$$e_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) ds_{ij}(\tau) - \Pi_2(0) ss_{ij}(t) + \int_0^t \Pi_2(t-\tau) d[ss_{ij}(\tau)]$$

Окончательно имеем

$$s_{ij}(t) = \int_0^t R(t-\tau) de_{ij}(\tau) - \int_0^t R_3(t-\tau) d[ee_{ij}(\tau)], \quad R_3(t) = R_2(0) - R_2(t) \quad (3.3)$$

$$e_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) ds_{ij}(\tau) + \int_0^t \Pi_3(t-\tau) d[ss_{ij}(\tau)], \quad \Pi_3(t) = \Pi_2(t) - \Pi_2(0)$$

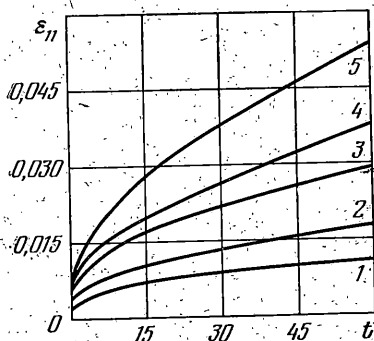
Нелинейные функции релаксации $R_3(t)$ и ползучести $\Pi_3(t)$ можно определить из (3.3), не прибегая к решению интегральных уравнений, если деформации или нагрузки в тарировочных опытах задавать в виде ступенчатой функции. Отметим, что $R_3(0) = 0$, $\Pi_3(0) = 0$.

4. Проиллюстрируем полученные результаты на конкретном примере определения оптико-механических характеристик оптически чувствительного вязкоупругого материала на основе эпоксидной смолы ЭД-6.

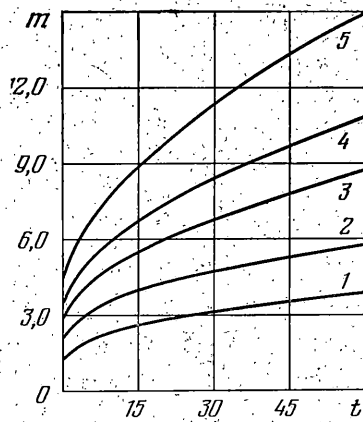
Оптико-механические характеристики определяются по экспериментальным данным, полученным на установке стандартного типа, позволяющей проводить опыты на ползучесть и релаксацию при одноосном растяжении. Усилия, прикладываемые к образцу, измеряются при помощи динамометра, а деформации — тензорезисторного преобразователя перемещений, который закрепляется на определенной базе на образце. Информация от динамометра и тензорезисторного преобразователя перемещений регистрировалась в течение всего опыта. Помимо усилий и удлинений в каждом опыте при помощи фотоэлектронного умножителя регистрировалась величина двойного лучепреломления.

Эксперименты на ползучесть и релаксацию проводились в термостате при постоянной температуре. Все тарировочные образцы были вырезаны из одной пластины оптически чувствительного материала.

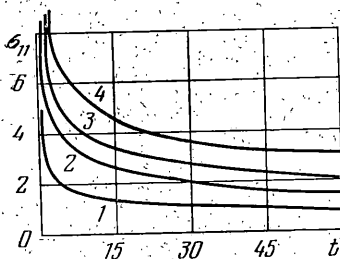
Основная информация, полученная в тарировочных экспериментах, заключается в усилиях, удлинениях и порядках полос m , характеризующих степень временного двойного лучепреломления. Порядок полос m связан с разностью хода δ соотношением $\delta = m\lambda$, где λ — длина волны света, выделяемая светофильтром. Напря-



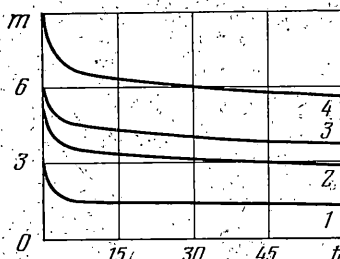
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

жения определяются как отношение силы, приложенной к образцу, к площади поперечного сечения недеформированного образца; деформации — как отношение удлинения выбранной базы к первоначальной ее длине.

В опытах на ползучесть, проведенных при напряжениях 2,17; 3,06; 4,48; 5,42; 6,63 МПа, были получены кривые 1–5 зависимости продольной деформации ε_{11} (фиг. 1) и порядков полос m (фиг. 2) от времени t (в мин). Непосредственно из этих экспериментальных данных видно, что материал обладает мгновенной линейной упругостью.

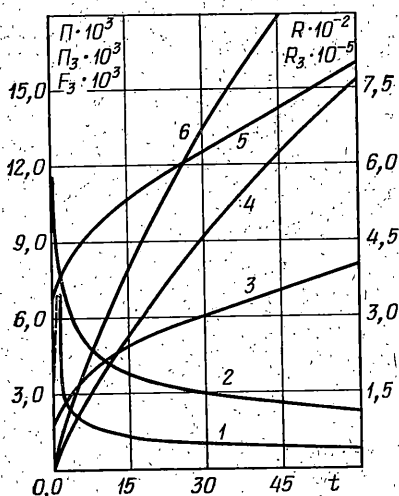
В опытах на релаксацию, проведенных при деформациях, равных 0,005; 0,01; 0,0143; 0,0198, были получены кривые 1–4 зависимости напряжений σ_{11} (в МПа) (фиг. 3) и порядков полос m (фиг. 4) от времени t (в мин).

Отметим, что при обработке экспериментальных данных предполагалось мгновенное нагружение или деформирование, в то время как реальная скорость деформирования была равна 0,05–0,06 1/мин.

Обработка экспериментальных данных на основании изложенного в пп. 1–3 позволила определить основные материальные функции. Линейная и нелинейная функции релаксации $R(t)$ и $R_3(t)$ (в МПа) обозначены на фиг. 5 цифрами 2 и 1; функции ползучести $\Pi(t)$ (в (МПа) $^{-1}$) и $\Pi_3(t)$ (в (МПа) $^{-3}$) — цифрами 3 и 4. Определенные по результатам экспериментов на ползучесть функции F (в полосах/МПа) и $F_3(t)$ (в полосах/(МПа) 3) обозначены цифрами 5 и 6.

Штриховой линией на этой фигуре обозначено предполагаемое изменение функции $R_3(t)$ в начальный период времени.

Для определения линейных и нелинейных материальных функций достаточно данных двух экспериментов при различных уровнях напряжений или деформаций. Функции, определенные перебором всех пар экспериментальных зависимостей, как пра-



Фиг. 5

вило, отклонялись не более чем на 10% от некоторой средней кривой, которая и была принята за искомую материальную функцию. Нетрудно видеть, что эта процедура практически соответствует сравнению кривых ползучести или релаксации, полученных для одного и того же уровня напряжений или деформаций экспериментальным и расчетным путем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Я., Ахметзянов М. Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. М.: Наука, 1973. 576 с.
2. Материалы VIII Всес. конф. по методу фотоупругости. Таллин: Изд-во АН ЭССР, 1979, т. 1. 220 с.; т. 2. 228 с.; т. 3. 302 с.; т. 4. 283 с.
3. Ильюшин А. А., Огибалов П. М. Квазилинейная теория вязкоупругости и метод малого параметра. — Механика полимеров, 1966, № 2, с. 170—189.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 855 с.
5. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.
6. Петребко В. П., Шарафутдинов Г. З. Исследование метода линейной фотовязкоупругости. — Упругость и неупругость: Сб. статей. М.: Изд-во МГУ, 1973, вып. 3, с. 173—187.
7. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.X.1981