

УДК 539.376

## ОБ ОДНОМ МЕХАНИЗМЕ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ РАСТУЩИХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

АРУТЮНЯН Н. Х., НАУМОВ В. Э.

Напряженно-деформированное состояние вязкоупругих тел, отдельные элементы которых изготавливаются и загружаются в различные моменты времени, существенно зависит от технологии их изготовления, в частности от скорости наращивания, определяющей степень возрастной неоднородности этих тел. Исследование модельных задач для стареющих вязкоупругих тел с изменяющейся границей показало весьма существенное влияние скорости и последовательности изготовления этих тел на формирование в них поля напряжений и перемещений [1, 2].

При постановке начально-краевой задачи теории вязкоупругости неоднородно стареющих тел с изменяющейся во времени граничной поверхностью предполагается, что закон роста рассматриваемых тел задан [3]. Кинематика роста реальных тел может быть различной в зависимости от условий, в которых происходит наращивание этих тел.

При изучении ряда технологических и природных процессов (таких, как намотка, напыление, осаждение, обледенение и т. п.) приходится сталкиваться с конкретным механизмом формообразования растущих тел, когда за фиксированный промежуток времени к телу приращивается слой материала, имеющий примерно одинаковую толщину в различных его частях.

Ниже приводится модельное представление процесса формообразования вязкоупругого тела, когда наращиваемые слои материала имеют постоянную толщину, измеренную вдоль нормали к поверхности этого тела, и на этой основе исследуется формирование напряженно-деформированного состояния в растущих вязкоупругих телах сложной конфигурации.

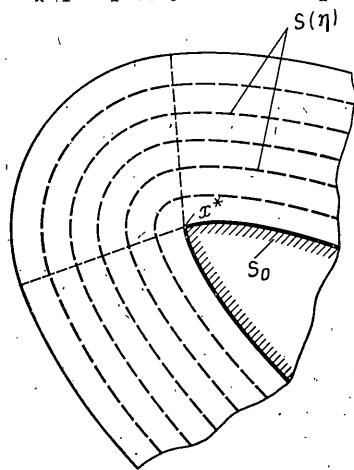
**1. Кинематика роста тела.** Предположим, что в момент времени  $t=0$  рассматриваемое тело занимает в трехмерном евклидовом пространстве  $R^3$  область  $\Omega_0$ , ограниченную гладкой выпуклой поверхностью  $S_0$ , заданной в параметрическом виде уравнением  $x^0 = x^0(u, v)$ , где  $x^0 = \{x_1^0, x_2^0, x_3^0\}$  — координаты точки на  $S_0$ , а  $u, v$  — некоторые скалярные параметры (криволинейные координаты на  $S_0$ ). Пусть теперь поверхность тела вследствие его наращивания перемещается в направлении внешней нормали таким образом, что расстояние от поверхности тела в некоторый момент времени  $t > 0$  до поверхности  $S_0$  исходного тела по нормали характеризуется величиной  $h > 0$ , зависящей от времени и не зависящей от точки  $x = \{x_1, x_2, x_3\}$  на внешней поверхности растущего тела. Тогда уравнение поверхности тела в момент времени  $t$  будет

$$x(u, v, t) = x^0(u, v) + h(t)n(u, v) \quad (1.1)$$

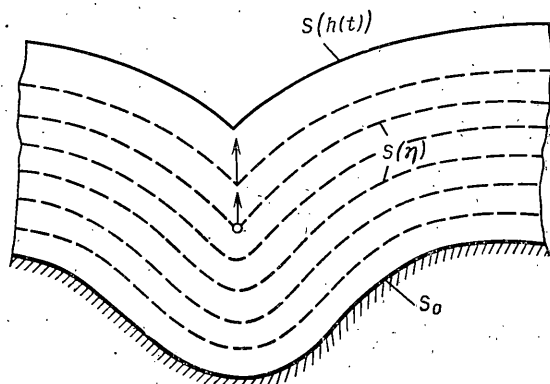
где  $n$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S_0$  (поверхность  $S_0$  предполагается ориентируемой). Нетрудно показать, что нормаль к  $S_0$  будет и нормалью к поверхности тела при любом  $t$ . Предположим еще, что  $h(t)$  есть монотонно возрастающая функция, так что величина  $h$  может служить независимой переменной, полностью определяющей поверхность наращиваемого тела. Функция  $h(t)$ , определяющая закон движения внешней границы растущего тела, предполагается заданной. В общем случае она может определяться из соотношений, описывающих массообмен тела с окружающей средой. Обозначим символом

$S(\eta)$  поверхность тела, соответствующую полной толщине наращиваемого слоя, равной  $\eta$  ( $\eta$  — некоторая неотрицательная величина), т. е.  $S(\eta) = \{x: x = x^0 + \eta n\}$ .

Обозначим через  $r_0$  радиус сферы, вписанной в исходное тело. Не ограничивая общности, начало координат будем считать совмещенным с центром этой сферы. Нетрудно показать, что относительное отклонение поверхности тела  $S(h)$  на произвольном этапе наращивания от вписанной в него сферы радиуса  $r_0 + h$  не превышает величины  $\Delta / (r_0 + h)$ , где  $\Delta = \max_{x^0 \in S_0} (\sqrt{x_i^0 x_i^0} - r_0)$  ( $i=1, 2, 3$ ) — максимальное расстояние точек  $S_0$  до сферы радиуса  $r_0$  по прямой, проходящей через начало координат. Это



Фиг. 1



Фиг. 2

означает, что при больших  $h$  поверхность наращиваемого тела  $S(h)$  приближается по форме к сфере.

Если выпуклая поверхность  $S_0$  имеет изолированную коническую точку  $x^*$ , то направление нормали в ней не определено. Предельные нормали, полученные при подходе к точке  $x^*$  по различным направлениям на  $S_0$ , образуют коническую поверхность с вершиной в  $x^*$ . Предполагается, что часть наращиваемого тела, заполняющая внутренность конической полости в момент времени  $t$ , ограничена упомянутой конической поверхностью с вершиной в  $x^*$  и сферической поверхностью радиуса  $h(t)$  с центром в  $x^*$ . На фиг. 1 показано сечение наращиваемого тела в окрестности конической точки проходящей через нее плоскостью. Таким образом, поверхность тела при  $t > 0$  будет выпуклой и гладкой. Если на выпуклой поверхности исходного тела имеется ребро, то предполагается, что процесс наращивания происходит аналогично случаю, когда на  $S_0$  имеется изолированная коническая точка. Фиг. 1 иллюстрирует механизм наращивания тела и в этом случае, если плоскость рисунка считать совмещенной с плоскостью, вектор нормали которой совпадает с касательным вектором ребра.

В случае, когда поверхность наращиваемого тела не является выпуклой, вообще говоря, рассматриваемый механизм формообразования действителен до тех пор, пока полная толщина наращиваемого слоя не превосходит расстояния от поверхности исходного тела до ближайшей к ней точки, в которой происходит пересечение ее нормалей. Точки, в которых пересекаются бесконечно близкие нормали поверхности, называются фокальными точками этой поверхности.

Для дальнейшего понадобится следующий результат из геометрии многообразий [4, 5], который здесь приводится без доказательства.

Пусть  $S_0$  — двумерное многообразие, гладко вложенное в  $R^3$ . Рассмотрим

рим прямую, состоящую из всех точек  $x^\circ + hn$ , где  $x^\circ \in S_0$ , а  $n$  — фиксированный единичный вектор, ортогональный к  $S_0$  в точке  $x^\circ$ . Справедлива будет следующая теорема.

*Теорема.* Фокальными точками для вложения  $S_0 \subset R^3$  на прямой  $x^\circ + hn$  являются те и только те точки, для которых  $h = \kappa_\alpha^{-1}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , где  $\kappa_\alpha$  — главные кривизны многообразия  $S_0$  в точке  $x^\circ$  вдоль направления  $n$ .

Таким образом, на первом этапе рост тела продолжается до тех пор, пока общая толщина добавленного к нему слоя материала не достигнет величины  $h_0 = \min_{x^\circ \in S_0} (\min_{\alpha=1, 2} |\kappa_\alpha^{-1}|)$ , где в расчет принимаются только те главные кривизны, которые соответствуют фокальным точкам поверхности  $S_0$ , лежащим во внешности рассматриваемого тела.

Поверхность  $S(h_0)$  будет иметь по крайней мере одну нерегулярную точку, совпадающую с фокальной точкой поверхности  $S_0$ . Для анализа следующего этапа наращивания определяется фокальное множество поверхности  $S(h_0)$  с выброшенными нерегулярными точками, устанавливается толщина слоя, при которой достигнется ближайшая фокальная точка, и т. д. Подчеркнем, что наращивание тела предполагается непрерывным, а упомянутые этапы наращивания вводятся условно для удобства рассмотрения.

На фиг. 2 схематически показано сечение наращиваемого тела в окрестности вогнутости его исходной поверхности плоскостью, проходящей через фокальную точку (на фиг. выделена кружком). При этом предполагается, что пересечение нормалей, имеющее место в окрестности нерегулярных точек вогнутой части поверхности и не связанное с достижением очередной фокальной точки, приводит к их перемещению вместе с поверхностью тела при дальнейшем наращивании.

В общем случае поверхность исходного тела может иметь регулярные точки всех трех типов: эллиптические, параболические и гиперболические; может иметь плоские участки, а также нерегулярные точки. В каждом конкретном случае поверхность растущего тела однозначно определяется в зависимости от толщины наращиваемого слоя материала на основе приведенных выше соображений.

Для призматических тел рассмотрение кинематических аспектов наращивания ограничивается рамками поперечного сечения тела. При этом полезным оказывается использование понятия эволюты плоской кривой.

Наряду с наращиваемыми телами могут быть рассмотрены тела, изменение формы которых вызвано, наоборот, непрерывным удалением некоторой части объема. Причем в ряде реальных ситуаций (коррозионные повреждения, воздействие агрессивной среды, таяние, испарение и т. п.) можно принять, что формоизменение сопровождается снятием слоев материала постоянной толщины, измеренной вдоль нормали к поверхности тела. Рассмотренная выше кинематика наращивания без изменений может быть применена и в этом случае. Причем снятие выпуклого тела происходит по такой же схеме, как наращивание вогнутого, а снятие вогнутого — как наращивание выпуклого. При наличии на поверхности тела гиперболических точек анализ кинематики снятия предусматривает определение фокальных точек поверхности, лежащих внутри тела, а не вне его, как в случае наращивания.

Заметим, что с точки зрения рассматриваемого механизма формообразования процесс наращивания выпуклых тел (не обязательно гладких) является обратимым в том смысле, что поверхность тела при последующем снятии принимает уже пройденные при наращивании положения. Точно также имеет место обратимость процесса снятия тел с вогнутой поверхностью. В общем случае процессы наращивания и снятия в указанном смысле не являются взаимно обратными.

**2. Определяющие уравнения.** Поскольку рассматриваемый вязкоупругий материал обладает изменяющимися во времени упругими и реологическими свойствами, т. е. находится в условиях естественного или искус-

ственного старения, а процесс наращивания протекает достаточно медленно, то растущее тело будет неоднородным по возрасту, иначе говоря, будет неоднородно стареющим телом. Физико-механические свойства таких тел зависят от времени и пространственных координат, так как процесс старения в отдельных элементах тела протекает с тем или иным опережением или запаздыванием относительно других элементов.

Предполагается, что механическое поведение тела описывается уравнениями состояния линейной теории вязкоупругости растущих тел, подверженных старению [3]:

$$e_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{s_{ij}(t, \mathbf{x})}{2G(t - \tau^*(\mathbf{x}))} - \int_{\tau^*(\mathbf{x})}^t \frac{s_{ij}(\tau, \mathbf{x})}{2G(\tau - \tau^*(\mathbf{x}))} Q_1(t - \tau^*(\mathbf{x}), \tau - \tau^*(\mathbf{x})) d\tau \quad (2.1)$$

$$\varepsilon(t, \mathbf{x}) = \frac{\sigma(t, \mathbf{x})}{3K(t - \tau^*(\mathbf{x}))} - \int_{\tau^*(\mathbf{x})}^t \frac{\sigma(\tau, \mathbf{x})}{3K(\tau - \tau^*(\mathbf{x}))} Q_2(t - \tau^*(\mathbf{x}), \tau - \tau^*(\mathbf{x})) d\tau$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon, \quad \varepsilon = 1/3\varepsilon_{ii}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma, \quad \sigma = 1/3\sigma_{ii}$$

где  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  — тензоры деформации и напряжения,  $\delta_{ij}$  — символ Кронеккера,  $G(t)$ ,  $K(t)$  — упругомгновенные модули сдвига и объемной деформации,  $Q_1(t, \tau)$ ,  $Q_2(t, \tau)$  — ядра ползучести при сдвиге и всестороннем сжатии.

Функция  $\tau^*(\mathbf{x})$  в (2.1) определяет момент зарождения материала в точке тела  $\mathbf{x}$ . Учитывая, что поверхность  $S(\eta)$  является поверхностью уровня функции  $\tau^*(\mathbf{x})$  (т. е.  $\tau^*(\mathbf{x})$  для  $\mathbf{x} \in S(\eta)$  есть константа, зависящая только от  $\eta$ ), в дальнейшем будем пользоваться также функцией  $\theta^*(\eta)$ , равной моменту зарождения элементарного слоя материала, отстоящего от поверхности  $S_0$  на расстоянии  $\eta$ . При этом имеет место тождество

$$\theta^*(\eta) = \tau^*(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x} \in S(\eta)}$$

Очевидно, что функции  $\theta^*$  и  $h$  являются взаимно обратными:  $\theta^*(h(\xi)) = \xi$ ,  $h(\theta^*(\eta)) = \eta$ , причем  $\theta^*(0) = 0$ ,  $h(0) = 0$ .

Таким образом, величина  $\tau^*(\mathbf{x})$  в (2.1) может быть заменена на  $\theta^*(\eta)$  для  $\mathbf{x} \in S(\eta)$ .

Обращения уравнений состояния (2.1) запишем в виде

$$s_{ij}(t, \mathbf{x}) = 2G(t - \tau^*(\mathbf{x})) \left\{ e_{ij}(t, \mathbf{x}) + \int_{\tau^*(\mathbf{x})}^t e_{ij}(\tau, \mathbf{x}) R_1(t - \tau^*(\mathbf{x}), \tau - \tau^*(\mathbf{x})) d\tau \right\} \quad (2.2)$$

$$\sigma(t, \mathbf{x}) = 3K(t - \tau^*(\mathbf{x})) \left\{ \varepsilon(t, \mathbf{x}) + \int_{\tau^*(\mathbf{x})}^t \varepsilon(\tau, \mathbf{x}) R_2(t - \tau^*(\mathbf{x}), \tau - \tau^*(\mathbf{x})) d\tau \right\}$$

где  $R_1(t, \tau)$ ,  $R_2(t, \tau)$  — ядра релаксации при сдвиге и всестороннем сжатии, которые являются резольвентами ядер ползучести  $Q_1(t, \tau)$ ,  $Q_2(t, \tau)$  соответственно.

Анализ формирования полей напряжений и деформаций в растущем теле может быть проведен в рамках постановки начально-краевой задачи теории вязкоупругости неоднородно стареющих тел с изменяющейся границей [3, 6]. Постановка начально-краевой задачи предусматривает, в частности, задание граничных условий на движущейся вследствие наращивания поверхности тела. В [6] показано, что в отличие от условий на стационарной границе тела на поверхности роста должны быть заданы все компоненты тензоров напряжения и деформации (см. также [7]). При этом три компоненты тензора напряжения, действующие на элементарной площадке поверхности тела, определяются компонентами задан-

ного вектора внешних усилий. Остальные три компоненты независимо задают контролируемое начальное натяжение приращиваемого бесконечно тонкого слоя.

**3. Задача об изгибе наращиваемого призматического бруса.** Рассмотрим задачу об изгибе призматического бруса, непрерывно наращиваемого в поперечном направлении слоями материала постоянной толщины. Пусть  $l$  — длина бруса, один из торцов закреплен, на другом приложена изгибающая сила  $P(t)$ , изменяющаяся во времени. Для простоты положим, что в начальный момент времени  $t=0$  исходное поперечное сечение бруса  $\Omega_0$  имеет две оси симметрии и ограничено замкнутым гладким контуром. Начало прямоугольной системы координат  $(x_1, x_2, x_3)$  поместим в закрепленном сечении, ось  $x_3$  направим вдоль оси бруса, а оси  $x_1, x_2$  — по осям симметрии поперечного сечения. Допустим, что изгиб происходит в плоскости  $x_1=0$ .

Пусть уравнение контура области  $\Omega_0$  в параметрическом виде есть  $x_i^0 = x_i^0(\varphi)$ ,  $i=1, 2$  ( $[0, 2\pi] \ni \varphi$  — полярный угол), а неотрицательная монотонно возрастающая функция  $h(t)$  определяет толщину наращиваемого слоя к моменту времени  $t$ .

При определении напряженно-деформированного состояния в наращиваемом бруске будем исходить из уравнений состояния теории вязкоупругости наращиваемых тел (2.2), записанных для одноосного напряженного состояния

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{x}) = E(t - \tau^*(\mathbf{x})) \left\{ \varepsilon(t, \mathbf{x}) + \int_{\tau^*(\mathbf{x})}^t \varepsilon(\tau, \mathbf{x}) R(t - \tau^*(\mathbf{x}), \tau - \tau^*(\mathbf{x})) d\tau \right\} \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$  — прямоугольные декартовы координаты точки бруса,  $\sigma_{33}(t, \mathbf{x})$ ,  $\varepsilon(t, \mathbf{x})$  — осевые напряжение и деформация в точке  $\mathbf{x}$  в момент времени  $t$ ,  $E(t)$  — зависящий от времени модуль упругомгновенной деформации,  $R(t, \tau)$  — ядро релаксации, определяемое из опыта на простую релаксацию. Функция  $\tau^*(\mathbf{x})$  определяет момент зарождения материала в точке  $\mathbf{x}$ . Поскольку рассматривается призматический брус, функция  $\tau^*(\mathbf{x})$  постоянна по  $x_3$ .

Интегральное уравнение квазистатического равновесия произвольного поперечного сечения бруса в момент времени  $t$  имеет вид

$$\iint_{\Omega_0 \cup \Omega^*(t)} \sigma_{33}(t, \mathbf{x}) x_2 dx_1 dx_2 = M(t, x_3) \quad (3.2)$$

где  $M(t, x_3) = (l - x_3)P(t)$  — переменный изгибающий момент, а через  $\Omega^*(t)$  обозначена область наращивания.

В соответствии с общей постановкой начально-краевой задачи теории вязкоупругости растущих тел будем полагать, что осевая деформация элементарного волокна в момент зарождения, совпадающий с моментом его приращивания, известна. Для простоты положим ее равной нулю

$$\varepsilon(\tau^*(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^*(t) \quad (3.3)$$

При построении приближенного решения этой задачи примем, что зависимость для осевой деформации имеет вид, учитывающий начальное условие (3.3)

$$\varepsilon(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \kappa(t, x_3) x_2, & \mathbf{x} \in \Omega_0, \\ [\kappa(t, x_3) - \kappa(\tau^*(\mathbf{x}), x_3)] x_2, & \mathbf{x} \in \Omega^*(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

где функция  $\kappa$  по физическому смыслу есть кривизна нейтральных волокон бруса ( $x_2=0$ ). Эта зависимость представляет собой некоторое обобщение гипотезы плоских сечений на случай наращиваемого бруса.

Для дальнейшего удобно от координат  $(x_1, x_2)$  перейти к независимым переменным  $(\eta, \varphi)$  по формулам

$$\begin{aligned} x_1(\eta, \varphi) &= x_1^\circ(\varphi) + \eta \alpha(\varphi) \frac{d}{d\varphi} x_2^\circ(\varphi) \\ x_2(\eta, \varphi) &= x_2^\circ(\varphi) - \eta \alpha(\varphi) \frac{d}{d\varphi} x_1^\circ(\varphi) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\alpha(\varphi) = \left[ \left( \frac{d}{d\varphi} x_1^\circ \right)^2 + \left( \frac{d}{d\varphi} x_2^\circ \right)^2 \right]^{-1/2}$$

Подставляя (3.1) в (3.2), учитывая (3.4) и осуществляя преобразование координат (3.5), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} M(t, x_3) &= I_0 E(t) \left\{ \kappa(t, x_3) + \int_0^t \kappa(\tau, x_3) R(t, \tau) d\tau \right\} + \\ &+ \int_0^{h(t)} [\kappa(t, x_3) - \kappa(\theta^*(\eta), x_3)] E(t - \theta^*(\eta)) W(\eta) d\eta + \\ &+ \int_0^{h(t)} \left\{ \int_{\theta^*(\eta)}^t (\kappa(\tau, x_3) - \kappa(\theta^*(\eta), x_3)) R(t - \theta^*(\eta), \tau - \theta^*(\eta)) d\tau \right\} \times \\ &\quad \times E(t - \theta^*(\eta)) W(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $I_0$  — момент инерции четверти исходного сечения относительно оси  $x_1$ . Функция  $W(\eta)$  в (3.6) определяется равенством

$$W(\eta) = \int_0^{\pi/2} [x_2(\eta, \varphi)]^2 J(\eta, \varphi) d\varphi$$

где  $J(\eta, \varphi)$  — якобиан преобразования координат (3.5).

Производя в (3.6) замену переменной  $\xi = \theta^*(\eta)$  (или  $\eta = h(\xi)$ ) и изменяя порядок интегрирования по  $\eta$  и  $\tau$ , придем к уравнению

$$\omega(t) \kappa(t, x_3) + \int_0^t \kappa(\tau, x_3) \Psi(t, \tau) d\tau = \frac{1}{4} M(t, x_3) \quad (3.7)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \omega(t) &= I_0 E(t) + \int_0^t E(t - \xi) W(h(\xi)) h'(\xi) d\xi \\ \Psi(t, \tau) &= I_0 E(t) R(t, \tau) + \int_0^\tau E(t - \xi) R(t - \xi, \tau - \xi) W(h(\xi)) h'(\xi) d\xi - \\ &- E(t - \tau) W(h(\tau)) h'(\tau) \left[ 1 + \int_\tau^t R(t - \tau, \xi - \tau) d\xi \right] \end{aligned}$$

Полученное уравнение представляет собой линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции  $\kappa$ . После определения функции  $\kappa$  осевая деформация находится из соотношений (3.4), а осевое напряжение — из (3.1).

Определим касательные напряжения, предварительно полагая, что кроме осевого напряжения отлична от нуля только компонента напряже-

ния  $\sigma_{23}$ . В этом случае дифференциальное уравнение равновесия бесконечно малого элемента бруса есть

$$\partial\sigma_{23}/\partial x_2 + \partial\sigma_{33}/\partial x_3 = 0 \quad (3.8)$$

Пусть  $x_2 = g(x_1)$  — уравнение контура поперечного сечения бруса в плоскости  $x_3 = \text{const}$  в некоторый момент времени  $t$ . Проинтегрируем (3.8) по  $x_2$  от некоторого произвольного значения до  $g(x_1)$  при фиксированных  $t, x_1, x_3$ . Принимая во внимание соотношения (3.1), (3.4) и учитывая, что граничная поверхность бруса свободна от усилий, после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \sigma_{23}(t, x) = & \int_{x_2}^{g(x_1)} \left\{ \frac{\partial \kappa}{\partial x_3}(t, x_3) + \int_{\tau^*(x_1, \xi)}^t \frac{\partial \kappa}{\partial x_3}(\tau, x_3) R(t - \tau^*(x_1, \xi), \tau - \tau^*(x_1, \xi)) d\tau - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \kappa}{\partial x_3}(\tau^*(x_1, \xi), x_3) \left[ 1 + \int_{\tau^*(x_1, \xi)}^t R(t - \tau^*(x_1, \xi), \tau - \tau^*(x_1, \xi)) d\tau \right] \right\} \times \\ & \times E(t - \tau^*(x_1, \xi)) \xi d\xi \end{aligned} \quad (3.9)$$

В случае чистого изгиба величины, определяющие постановку и решение задачи, не зависят от координаты  $x_3$ , следовательно,  $\partial \kappa / \partial x_3 = 0$  и соотношение (3.9) дает  $\sigma_{23} = 0$ . Заметим, что в случае чистого изгиба соотношения (3.4) следуют из уравнения совместности скоростей деформации в наращиваемом брус  $\partial^2 \varepsilon / \partial x_2^2 = 0$  и начального условия (3.3), если принять, что скорость осевой деформации не зависит от координаты  $x_1$ .

**4. Численный пример и анализ результатов.** Рассмотрим конкретный пример чистого изгиба наращиваемого призматического бруса, когда поперечное сечение первоначально имеет форму эллипса  $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1$  ( $a > b$ ). Функция  $W(\eta)$  в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} W(\eta) = & \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \{b + a\eta [B(\varphi)]^{-1}\}^2 \{B(\varphi) + ab\eta [B(\varphi)]^{-2}\} d\varphi \\ & B(\varphi) = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \end{aligned}$$

Так как аналитическое решение уравнения (3.7) вызывает затруднения, было проведено численное исследование задачи. При расчетах модуль упругомгновенной деформации принимался постоянным ( $E(t) = E_0 = \text{const}$ ), а для ядра релаксации стареющего материала использовалось выражение (см. [1]):

$$R(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} R^o(t, \tau), \quad R^o(t, \tau) = L(t, \tau) - 1, \quad L(\xi; \xi) = 0$$

Уравнение (3.7) в данном случае можно переписать в виде

$$\begin{aligned} I(t) \kappa(t) + \int_0^t \kappa(\tau) \left\{ I_0 R(t, \tau) + R^o(t - \tau, 0) W(h(\tau)) h'(\tau) + \right. \\ \left. + \int_0^\tau R(t - \xi, \tau - \xi) W(h(\xi)) h'(\xi) d\xi \right\} d\tau = \frac{M(t)}{4E_0} \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $I(t)$  — момент инерции четверти полного сечения наращиваемого бруса в момент времени  $t$ ,  $I_0 = 1/16 \pi a b^3$  — момент инерции четверти исходного поперечного сечения.

Из (4.1) видно, что искомая функция  $\kappa(t)$  обратно пропорциональна  $E_0$ . Тогда из (3.1) следует, что напряжение в брус не зависит от величины  $E_0$ .

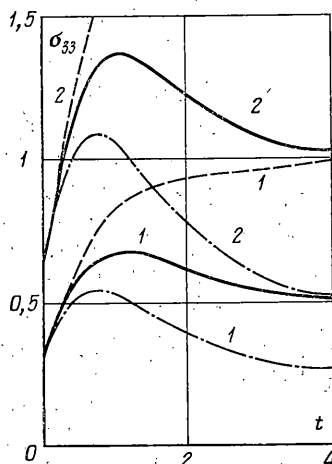
Примем следующие зависимости для величин, определяющих численное решение задачи

$$L(t, \tau) = (G_1 + G_2 e^{-\beta\tau}) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \quad h(t) = ct, \quad M(t) = M_0(1 + \mu t)$$

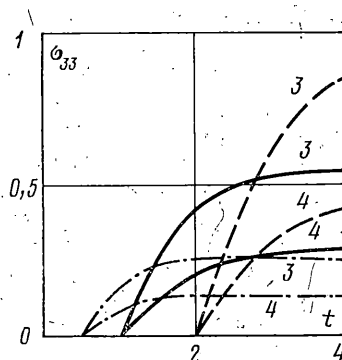
где  $G_1, G_2, \alpha, \beta, \gamma, \mu$  — положительные константы,  $M_0$  — начальное значение изгибающего момента.

За единицу длины принята величина  $b$ , за единицу времени —  $\beta^{-1}$ , за единицу давления —  $M_0 b^{-3}$ . Безразмерные константы (сохранены прежние обозначения) были приняты равными:  $a=2; \gamma=2; \mu=2,5; G_1=0,05; G_2=0,75; E_0=1$ .

Для исследования влияния скорости наращивания бруса на формирование в нем напряжений при одинаковом законе изменения изгибающего момента варьровался параметр  $\alpha$ . Напряжения контролировались в четырех точках поперечного сечения бруса.



Фиг. 3



Фиг. 4

чения бруса. Точки 1, 2 лежат на оси  $x_2$  в теле исходного бруса (для них, соответственно,  $x_2=0,5; 1,0$ ). Точки 3, 4 расположены в зоне наращивания, причем точка 3 лежит на оси  $x_2$  и соответствует значению  $x_2=1,5$ , а положение точки 4 задается координатами  $\eta=0,5; \varphi=0,3$ .

На фиг. 3 показано изменение напряжения со временем в точках ядровой части поперечного сечения 1, 2 (цифры возле кривых соответствуют номеру точки). При этом сплошные кривые рассчитаны при  $\alpha=0,5$ ; штриховые — при  $\alpha=0,25$ ; штрихпунктирные — при  $\alpha=1$ . Видно, что при уменьшении скорости наращивания элементы сечения исходного бруса загружаются более интенсивно, чем при относительно высокой скорости. Это, очевидно, связано с тем, что повышение скорости наращивания приводит к увеличению площади поперечного сечения бруса и, следовательно, к передаче большей части приложенного усилия в наращиваемую зону. При малой же скорости наращивания большая часть действующей нагрузки приходится на исходное ядро бруса. Например, при  $t=4$  напряжения в первой точке при  $\alpha=0,25$  в четыре раза больше, чем при  $\alpha=1$ . Отметим также, что при  $\alpha=0,25$  напряжение в точках однородного ядра бруса возрастает на всем рассмотренном интервале времени. При увеличении скорости наращивания напряжение сначала возрастает, затем падает. Этот эффект становится более ярко выраженным при увеличении значения  $\alpha$  и также объясняется более интенсивным перераспределением усилий по сечению бруса при ускорении темпа наращивания.

На фиг. 4 отражена зависимость напряжения от времени в точках наращиваемой зоны. Принцип маркировки кривых здесь тот же, что на фиг. 3. Все качественные выводы, сделанные для точек ядровой сечения бруса, справедливы и для этих точек.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Метлов В. В. Некоторые задачи теории ползучести для наращиваемых тел, подверженных старению.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1982, т. 35, № 3, с. 13—30.
2. Арутюнян Н. Х., Метлов В. В. Некоторые задачи теории ползучести неоднородно-старееющих тел с изменяющимися границами.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 5, с. 91—100.
3. Арутюнян Н. Х. Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 783—789.
4. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, 1979. 760 с.
5. Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965. 184 с.
6. Арутюнян Н. Х., Метлов В. В. Нелинейные задачи теории ползучести наращиваемых тел, подверженных старению.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 142—152.
7. Харлаб В. Д. Линейная теория ползучести наращиваемого тела.— Тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та, 1966, вып. 49, с. 93—119.

Москва

Поступила в редакцию  
20.VI.1983