

УДК 539.3

КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СЛОИСТОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

ЗВОЛИНСКИЙ Н. В., ШХИНЕК К. Н.

Сейсмичность земного шара связана в основном с горными районами, в окрестности которых скальные массивы залегают неглубоко, а нередко выходят и на свободную поверхность. Массивы скальных пород, как правило, прорезаны многочисленными трещинами. Несмотря на разнообразные виды трещиноватости, обычно наблюдается известная регулярность — наличие некоторого преимущественного направления, вдоль которого ориентированы трещины. Трещины обычно имеют шероховатые границы и заполнены более слабым материалом, что создает сопротивление относительноному скользящему перемещению их берегов. При расчете напряженного и деформированного состояния подобного скального массива необходимо учитывать наличие трещин и возможность подвижек их берегов. Однако учет каждой отдельной трещины создает непреодолимые трудности для сколько-нибудь сложной задачи. Отсюда возникает потребность построения некоторой «эквивалентной» однородной континуальной модели для слоистой среды. Такая модель приемлема в тех случаях, когда характерный размер поля смещений (напряжений) значительно больше толщины слоя. В волновых задачах характерным размером поля является длина волны.

Слоистые структуры изучались в последние годы в связи с механикой композитов. Однако ситуация там другая. Композитным структурам надо бывает, обычно, придать прочность и проскальзывание слоев при этом отсутствует. При проскальзывании же возникает возможность индивидуального изгиба слоев.

Некоторые модели слоистых сред описаны в [1, 2]. Указанные работы относятся к тонкому двумерному телу — пластине. Весьма общая теория сред с микроструктурой рассмотрена в [3, 4], где предлагается модель среды, состоящей из набора жестких и мягких слоев; в результате получаются уравнения для осредненного (континуального) описания подобной структуры и применяются для изучения дисперсии плоских волн в ней.

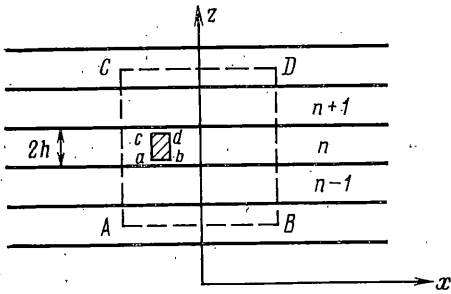
Задача публикуемой работы состоит в том, чтобы явно выделить роль изгиба слоев, который связан с проскальзыванием по контактам и может быть существенным при слабой связи между слоями; при конструировании модели слоистой среды используется прежде всего физическая интуиция. Для оправдания построения в дальнейшем разбираются примеры как из области статики, так и из области волновых процессов; эти примеры показывают, что модель, по крайней мере в ряде характерных и важных случаев, неплохо описывает действительность. Возможен другой путь построения, основанный на формализме асимптотических представлений.

1. Рассмотрим безграничную среду, состоящую из плоскопараллельных упругих слоев одинаковой толщины $2h$ и тождественных по свойствам (фиг. 1). В данной работе ограничимся плоским деформированным состоянием, обозначая компоненты смещения u, w ($v=0$). Предполагаем также, что трещины не раскрываются — этому препятствует вес вышележащих слоев (так называемое бытовое давление). Для тангенциального проскальзывания вдоль трещин примем линейный закон для касательного напряжения

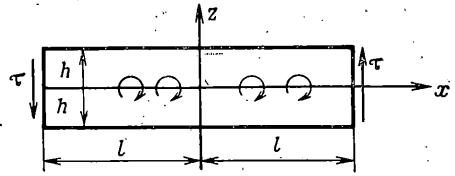
$$\tau = \frac{1}{2}k(u_n^- - u_n^+)/h \quad (1.1)$$

где индексы (+) и (-) означают верхний или нижний берег соответствующего слоя, k — положительная константа размерности напряжения, характеризующая жесткость связи между слоями.

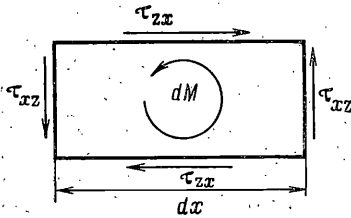
Выбор линейной зависимости (1.1) оправдывается в основном соображениями простоты. Модули упругости (константы Ламе) материала слоев



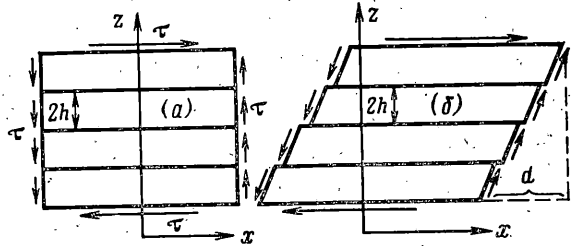
Фиг. 1



Фиг. 4



Фиг. 2



Фиг. 3

обозначим λ и μ . Описанную среду рассматриваем как среду со слоистой микроструктурой; она приводит к появлению двойного масштаба. Действительно, в качестве «малого элемента» можно рассматривать, с одной стороны, прямоугольник $ABCD$ (фиг. 1), стороны которого заметно больше толщины слоёв (макроэлемент), а с другой — прямоугольник $abcd$, значительно меньшего размера слоя (микроэлемент). В то время как для микроэлемента справедлива симметрия касательных напряжений, для макроэлемента она может нарушаться в результате скольжения по берегам слоёв. В таком случае появляется изгиб слоёв.

Выделим, например, макроэлемент из одного слоя (фиг. 2). При проскальзывании касательные напряжения сделаются несимметричными. Это особенно ясно в случае $k=0$ (полное проскальзывание), когда $\tau_{zx}=0$. Равновесие обеспечивается наличием момента dM (фиг. 2), для которого должно быть $dM/dx + \tau_{xz} - \tau_{zx} = 0$.

Нарушение симметрии касательных напряжений в результате внутренних скольжений в среде отмечалось в [5]. Изгиб слоёв связан с поворотом поперечных сечений, и это приводит к необходимости ввести локальное вращение в качестве кинематического элемента континуальной модели. Построение континуальной модели сводится к осреднению («размазыванию») свойств слоистой среды по всему пространству. Это осреднение можно делать различно, чем и определяется многообразие возможных моделей.

В дальнейшем предполагается, что модель описывается тремя кинематическими параметрами: двумя компонентами смещения u , w и вращением Ω в каждой точке. Это — пример реализации среды Коссера [6]. Асимметрия касательных напряжений означает, что

$$\tau_{xz} - \tau_{zx} = 2\langle\tau\rangle \quad (1.2)$$

причем $\langle\tau\rangle$, вообще, не равно нулю. Далее предполагается зависимость

$$\tau_{zx} = \mu(\partial w/\partial x + \partial u/\partial z), \quad \langle\tau\rangle = \frac{1}{2}g(\partial w/\partial x - \Omega) \quad (1.3)$$

Отсюда видно, что постулируется пропорциональность между симметричной частью касательного напряжения и симметричной деформацией

сдвига¹. Несимметричная часть касательного напряжения пропорциональна деформации сдвига, обусловленного поперечным изгибом слоя (по этому поводу см. также [7]).

Поскольку в модель вводится вращение и момент в каждой точке, между ними надо установить связь, которую естественно предполагать линейной и заимствовать из элементарной теории изгиба $M_x = 1/2(D/h)\partial\Omega/\partial x$.

Нормальные напряжения σ_{xx} и σ_{zz} не вызывают ни изгиба, ни скольжения слоев, и потому их следует сохранить в том виде, какой они имеют для однородной среды. В результате приходим к следующим определяющим уравнениям модели:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z}, & \sigma_{zz} &= \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{zx} &= \mu^\circ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), & \tau_{xz} &= \mu^\circ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + g \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \Omega \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$M_x = (D/2h) (\partial\Omega/\partial x)$$

где μ° , g , D — константы, которые далее будут определены из «эталонных экспериментов».

Определяющие уравнения (1.4) физически возможны, поскольку им отвечает плотность E энергии деформации в виде

$$\begin{aligned} 2E &= (\lambda + 2\mu) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + 2\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + \\ &+ \mu^\circ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + g \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \Omega \right)^2 + \frac{D}{2h} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x} \right)^2 \end{aligned}$$

Уравнения равновесия в напряжениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, & \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + Z &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \tau_{xz} - \tau_{zx} + m &= 0 \end{aligned}$$

где X , Z , m — плотность массовых сил и момента, на основании определяющих уравнений (1.4) позволяют записать уравнения равновесия в перемещениях

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu^\circ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda + \mu^\circ) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + X &= 0 \\ (\lambda + \mu^\circ) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \mu^\circ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + g \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial\Omega}{\partial x} \right) + Z &= 0 \quad (1.5) \\ \frac{D}{2h} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + g \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \Omega \right) + m &= 0 \end{aligned}$$

На основании уравнений (1.4) можно также записать выражения для граничных значений напряжений. На произвольной площадке с нормалью

¹ Можно было бы предполагать, что

$$\tau_{zx} = \mu^\circ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \alpha(\tau), \quad \tau_{xz} = \mu^\circ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \beta(\tau)$$

причем $\beta - \alpha = 2$. Выбор, сделанный в тексте ($\alpha = 0$, $\beta = 2$), позволяет при расслоении среды (при $k \rightarrow 0$) получить элементарную теорию изгиба слоя — балки.

n составляющие напряжения будут

$$\begin{aligned} X_n &= \left[(\lambda+2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \right] \cos(n, x) + \mu^\circ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cos(n, z) \\ Z_n &= \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + g \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \Omega \right) \right] \cos(n, x) + \\ &+ \left[\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda+2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \right] \cos(n, x), \quad M_n = \frac{D}{2h} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \cos(n, x) \end{aligned} \quad (1.6)$$

2. Перейдем к определению констант μ° , g , D . Для этого применим уравнения (1.4) и (1.5) к некоторым избранным видам нагружения слоистой среды; их можно назвать эталонными экспериментами. От выбора совокупности эталонных экспериментов могут зависеть значения получаемых констант. Однако, если модель удовлетворительно описывает действительность и эталонные эксперименты выбраны разумно, то можно ожидать, что найденные значения констант не будут сильно различаться.

Определение μ° . Вырежем из слоистой среды прямоугольный блок и приложим по его граням симметричную систему касательных напряжений τ (фиг. 3). Эффективный угол сдвига получится в результате как сдвига отдельных слоев, так и скольжения вдоль контактов; для угла сдвига γ можно написать $\gamma = 1/2 d / (Nh) = \tau (1/\mu + 1/k)$.

Обратимся к уравнениям (1.4) и (1.5). Аналогичная ситуация получится, если в этих уравнениях положим $u = \gamma z$, $w = 0$, $\Omega = 0$, $X = Z = m = 0$. Уравнения равновесия при этом удовлетворяются, а для касательного напряжения найдем $\tau = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu^\circ \gamma$.

Предполагая, что угол сдвига природы и модели один и тот же, получим $\mu^\circ = k\mu / (k + \mu)$.

Определение g . Вырежем из слоистой среды полосу двумя прямыми $x = 0$, $x = l$. По этим прямым приложим касательные напряжения $\tau_{xz} = \tau$. Потребуем, чтобы на контактах не было проскальзывания и, следовательно, τ_{zx} на берегах слоев равнялось нулю. Чтобы система внешних сил была уравновешена, приложим во всех слоях равномерно распределенные моменты m . При этом изгибающий момент будет отсутствовать. Состояния всех слоев при описанных условиях будут тождественными; поэтому достаточно рассмотреть один из слоев (фиг. 4). Для прямоугольника с указанной на фиг. 4 нагрузкой можно выписать точное решение уравнений теории упругости.

Компоненты напряжения и смещения имеют следующий вид:

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \tau_{xz} = \frac{3\tau}{2} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right), \quad \tau = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} \tau_{xz} dz$$

Эта система напряжений предполагает наличие внешних массовых напряжений $X = -3\tau z / h^2$ ($Z = 0$), которые и создают момент $m = -2h\tau$, уравновешивающий несимметричные касательные усилия.

Указанная система напряжений осуществима, поскольку ей отвечает следующая система перемещений: $U = 1/2 \tau / \mu (1 - z^2 / h^2)$, $W = \tau x / \mu$, где U , W — перемещения в отдельно взятом слое.

Заметим, что $(U)_* = 0$, $(\partial U / \partial z)_* = 0$ (подразумевается среднее арифметическое по z от $-h$ до $+h$). Установим зависимость между средним касательным напряжением τ и средней деформацией сдвига.

Имеем

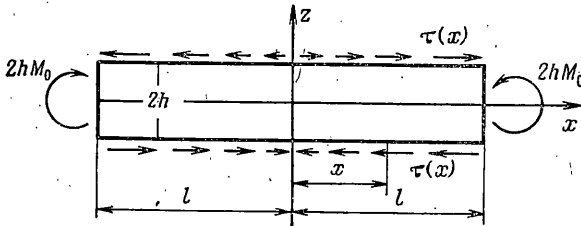
$$(\epsilon_{xz})_* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\tau}{\mu}$$

Следовательно, $\tau_{xz} - \tau_{zx} = \tau = \mu \partial W / \partial x$.

Обратимся к модели. Решение уравнений (1.5), соответствующее указанным условиям нагружения, дает $u(x, z)=0$, $\Omega(x, z)=0$, $w(x, z)\neq 0$. В результате будем иметь $\tau_{xz}-\tau_{zx}=g\delta w/\partial x$.

Сопоставляя два последние равенства, получим $g=\mu$.

Определение D. При рассмотрении эффектов сдвига был полностью исключен изгиб. Обратимся теперь к изгибу, который испытывает слой, контактирующий с двумя соседними, обуславливающими появление касательных напряжений на контактах. Рассмотрим бесконечную полосу, вырезанную из слоистой среды двумя параллельными прямыми $x=\pm l$. К торцам каждого слоя приложен момент M_0 . Все прямоугольники, образующие полосу, находятся в тождественных условиях. Поэтому достаточно рассмотреть один из них (фиг. 5). По границам слоя действуют касательные



Фиг. 5

напряжения, заранее неизвестные, а на торцах приложены моменты $2hM_0$ (M_0 — линейная плотность момента). Когда отношение h/l значительно меньше единицы, а внешние нагрузки по продольным сторонам изменяются достаточно плавно, то при вычислении прогиба можно пользоваться элементарной теорией балки (см. [7]), полагая

$$w=w(x), \quad u=-\frac{\partial w}{\partial x}z, \quad M=D_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad D_0=\frac{8(\lambda+\mu)}{3(\lambda+2\mu)}\mu h^3$$

Изгибающий момент M выражается (фиг. 5) по формуле

$$M(x)=2hM_0-2h\int_x^l \tau(\xi)d\xi$$

Отсюда, привлекая (1.1), будем иметь $dM/dx=2h\tau(x)=2hk\delta w/\partial x$. Исключая dM/dx , получим дифференциальное уравнение

$$\partial^3 w/\partial x^3 - \kappa_1^2 \partial w/\partial x = 0, \quad \kappa_1^2 = 2hk/D_0 \quad (2.1)$$

Теперь обратимся к модели. Тождественность состояний всех слоев означает независимость поля от координаты z . Итак, ищем решение вида $u=u(x)$, $w=w(x)$, $\Omega=\Omega(x)$ при $X=Z=m=0$.

Первое уравнение системы (1.5) требует, чтобы $u(x)$ была линейной функцией. Ее можно положить равной нулю без ограничения общности. Второе и третье уравнения дают

$$(\mu^\circ + \mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{D}{2h}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial w}{\partial x} - \mu\Omega = 0.$$

Исключая Ω , получим уравнение для $w(x)$

$$\partial^4 w/\partial x^4 - \kappa^2 \partial^2 w/\partial x^2 = 0, \quad \kappa^2 = 2h\mu\mu^\circ/D(\mu + \mu^\circ) \quad (2.2)$$

Сопоставляя уравнения (2.1) и (2.2), естественно потребовать, чтобы $\kappa_1^2 = \kappa^2$. Это определяет значение коэффициента $D=D_0/(1+2k/\mu)$, который оказывается зависящим от k . Можно рассматривать величину $D(k)$, как

определяющую «долю изгиба» в деформации модели. При $k=0$ (слои не взаимодействуют при скольжении) имеем $D(0)=D_0$. При этом изгиб представлен в полной мере. При увеличении k связи становятся все более и более жесткими, доля изгиба становится меньше, касательные напряжения приближаются к симметрии. При $k=\infty$ среда однородна, изгиб исчезает, напряжения симметричны.

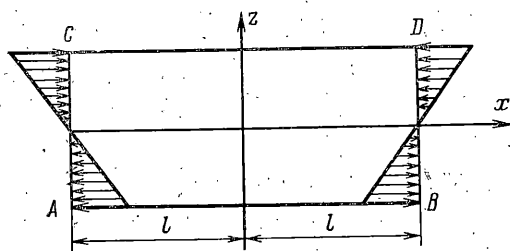
Уменьшение коэффициента $D(k)$ при увеличении k можно трактовать как уменьшение толщины некоторой воображаемой балки, энергия изгиба которой становится меньше при той же деформации (кривизне упругой линии).

3. Выясним математическую природу системы уравнений (1.5), ее тип. Для этого составим характеристическую форму шестой степени в виде определителя

$$\begin{vmatrix} (\lambda + 2\mu)\xi^2 + \mu^0\eta^2 & (\lambda + \mu^0)\xi\eta & 0 \\ \lambda + \mu^0 & (\mu + \mu^0)\xi^2 + (\lambda + 2\mu)\eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 D\xi^2/h \end{vmatrix} = \Delta \quad (3.1)$$

Из (3.1) следует, что система имеет одну двойную вещественную характеристику, определяемую уравнением $\xi^2=0$. Остальные характеристики — мнимые.

Таким образом, система (1.5) дифференциальных уравнений принадлежит эллиптико-параболическому типу; эллиптичность нарушается из-за



Фиг. 6

третьего уравнения. Возникает вопрос о том, какие краевые задачи могут быть поставлены для этой системы? Полный ответ требует отдельного исследования. Можно, однако, высказать правдоподобные предположения о возможных краевых условиях. На участке границы, непараллельном оси x , естественно задавать три функции X_n, Z_n, M_n , если задача ставится в

напряжениях или три функции u, w, Ω для задачи в смещениях. На участке, параллельном оси x , следует задавать две функции X_n, Z_n или u, w .

Чтобы показать применение уравнений модели и до известной степени проверить их пригодность на конкретных примерах, рассмотрим две задачи.

Чистый изгиб. Пусть на сторонах AC и BD упругого прямоугольника приложены нормальные напряжения, распределенные по закону (фиг. 6) $\sigma_{xx}(\pm l, z) = qz$. Стороны AB и CD свободны. Требуется найти напряжения и деформации в этом прямоугольнике. Решение данной задачи будет

$$\begin{aligned} u &= pxz, & w &= -\frac{px^2}{2} - \frac{\lambda p}{2(\lambda + 2\mu)} z^2 \\ p &= \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} q, & q &= \frac{2h}{3D_0} q, & \sigma_{xx} &= qz \end{aligned} \quad (3.2)$$

Представим теперь прямоугольник $ABCD$ разрезанным на слои прямыми, параллельными сторонами AB и CD . Проведение разрезов не внесет никаких изменений в поля смещений и напряжений, поскольку компоненты σ_{zz} и τ_{xz} равны нулю. Прямоугольник как бы «не чувствует» того, что он разрезан. А это значит, что для разрезанного прямоугольника имеет место та же самая система (3.2) смещений и напряжений. Обращаясь к уравнениям модели, легко убедиться, что формулы (3.2) являются решением этих уравнений, если к ним добавить еще $\Omega = -px$.

Функция $d\Omega/dx$ описывает изгибающий момент, приходящийся на один слой. Таким образом, в случае чистого изгиба уравнения модели дают точное решение.

Поперечный изгиб (сдвиг). Вырежем из слоистой среды бесконечную полосу, ограниченную двумя прямыми $x=0$ и $x=l$. На границе $x=l$ приложим равномерно распределенное касательное напряжение $\tau_{xz}=\tau$. Границу $x=0$ предполагаем закрепленной, а слои на этой границе — заданными. Тождественность напряженных состояний всех слоев означает, что для модели необходимо искать решение, не зависящее от z . Итак, надо найти решение уравнений (1.4) вида $u=u(x)$, $w=w(x)$, $\Omega=\Omega(x)$ при граничных условиях: $u(0, z)=0$, $w(0, z)=0$, $\Omega(0, z)=0$ на границе $x=0$; $\sigma_{xx}(l, z)=0$, $\tau_{xz}(l, z)=\tau$, $(\partial\Omega/\partial x)_{x=l}=0$ на границе $x=l$.

Решение поставленной краевой задачи дается формулами

$$\frac{w(x)}{l} = \frac{\tau}{\mu} \left\{ \frac{x}{l} + \frac{\mu}{\mu + \mu^0} \left(\frac{\text{sh } \kappa(l-x)}{\kappa l \text{ ch } \kappa l} - \frac{\text{th } \kappa l}{\kappa l} \right) \right\}$$

$$u(x) = 0, \quad \Omega(x) = \frac{\tau}{\mu} \left(1 - \frac{\text{ch } \kappa(l-x)}{\text{ch } \kappa l} \right), \quad \kappa^2 = \frac{2hk}{D_0} \quad (3.3)$$

Напряженное состояние описывается следующим образом:

$$\sigma_{xx}=0, \quad \sigma_{zz}=0, \quad \tau_{xz}=\tau, \quad \tau_{zx}=\tau \left\{ 1 - \frac{\mu}{\mu + \mu^0} \frac{\text{ch } \kappa(l-x)}{\text{ch } \kappa l} \right\} \quad (3.4)$$

Точного решения задачи теории упругости для данного случая не имеется. Сравнение возможно для предельных случаев $k=\infty$ и $k=0$.

При $k \rightarrow \infty$ из (3.3) и (3.4) получаем $w(x) \rightarrow \tau x/\mu$, $\Omega(x) \rightarrow \tau/\mu$ ($0 \leq x \leq l$), $\tau_{zx} \rightarrow \tau$ ($0 < x \leq l$).

Эти результаты правдоподобны. При жестком скреплении всех слоев восстанавливается однородность среды и симметрия касательных напряжений, исчезает составляющая несимметричного сдвига и вращение Ω делается равным $\partial w/\partial x$.

При $k \rightarrow 0$ среда расслаивается на отдельные балки. Из формул (3.3) и (3.4) будем иметь

$$w(x) = \frac{\tau x}{\mu} + \frac{(2h\tau)l^3}{6D_0} \left(3 - \frac{x}{l} \right) \frac{x^2}{l^2}$$

$$\Omega(x) = \frac{(2h\tau)l^2}{2D_0} \left(2 - \frac{x}{l} \right) \frac{x}{l}, \quad \tau_{xx}=0, \quad \tau_{xz}=\tau \quad (0 < x \leq l) \quad (3.5)$$

Эти результаты также представляются разумными. В выражении для прогиба $w(x)$ первое слагаемое есть прогиб за счет сдвига (несимметричного сдвига), т. е. $\tau x/\mu = w_2(x)$. Второе слагаемое есть $w_1(x)$ — прогиб, как результат изгиба слоев. Как и должно быть $\Omega(x) = \partial w_1/\partial x$. Прогиб w совпадает с тем, какой получается в элементарной теории изгиба балки при данном виде нагружения.

Можно отметить, что предельный переход $\tau_{zx} \rightarrow 0$ происходит равномерно на любом отрезке $[x_1, l]$ ($0 < x_1 \leq l$), но неравномерно на отрезке $[0, l]$. Аналогичное замечание справедливо для предельного перехода $\Omega(x) \rightarrow \tau/\mu$ и $\tau_{zx} \rightarrow \tau$ в случае, когда $k \rightarrow \infty$.

4. Уравнения малых колебаний модельной среды можно получить из соответствующего вариационного принципа. Но можно, в данном случае, поступить проще, добавив в уравнения системы (1.5) инерционные члены. Для двух первых уравнений системы это сделать просто — добавить слагаемые $\rho \partial^2 u/\partial t^2$ и $\rho \partial^2 w/\partial t^2$ соответственно.

Инерционный член в третьем уравнении должен содержать некоторый момент инерции. Однако, какой же момент инерции следует взять? Эффективная жесткость изгиба $D(k)$ зависит от k , определяя тем самым толщину фиктивной балки. В соответствии с этой интерпретацией треть-

его уравнения системы (1.5) естественно момент инерции поставить в зависимость от жесткости изгиба. И та и другая величины пропорциональны h^3 . Поэтому можно принять, что $D(k)/D_0 = J(k)/J_0$, где $J_0 = 2h^3/3$ — момент инерции для балки шириной $2h$.

Учитывая все сказанное, запишем уравнения малых колебаний модели в виде

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu^0 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda + \mu^0) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu^0) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \mu^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.1) \\ D(k) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + 2h\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \Omega \right) &= \rho J(k) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Здесь предполагается, что других массовых сил, кроме инерционных, нет.

Исследуем тип системы (4.1). Для этого, следуя общему правилу, составим определитель, содержащий параметры ξ , η , s , и приравняем его нулю

$$\begin{vmatrix} (\lambda + 2\mu)\xi^2 + \mu\eta^2 - \rho s^2 & (\lambda + \mu^0)\xi\eta & 0 \\ (\lambda + \mu^0)\xi\eta & (\mu + \mu^0)\xi^2 + (\lambda + 2\mu)\eta^2 - \rho s^2 & 0 \\ 0 & 0 & D\xi^2 - \rho J s^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.2)$$

Надо исследовать характер корней получившегося уравнения шестой степени относительно s , предполагая, что $\xi^2 + \eta^2 > 0$. Уравнение распадается на множители. Один из них дает $s^2 = D\xi^2/(\rho J)$. Второй — есть биквадратный трехчлен

$$\begin{aligned} (\rho s^2)^2 - P(\rho s^2) + Q &= 0 \\ P &= (\lambda + 3\mu + \mu^0)\xi^2 + (\lambda + 2\mu + \mu^0)\eta^2 \quad (P > 0) \\ Q &= (\lambda + 2\mu) [(\mu + \mu^0)\xi^4 + \mu^0\eta^4] + [(\lambda + 2\mu)^2 + \mu^0(\mu + \mu^0)]\xi^2\eta^2 - (\lambda + \mu^0)^2\xi^2\eta^2 \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что $Q > 0$.

Так как $\rho s^2 = \frac{1}{2}P \pm (\frac{1}{4}P^2 - Q)^{1/2}$, то биквадратное уравнение имеет все корни вещественные при условии, что $P^2 - 4Q > 0$. Это последнее неравенство проверяется непосредственным вычислением. Действительно, простые выкладки дают следующий результат:

$$P^2 - 4Q = [(\lambda + \mu - \mu^0)\xi^2 - (\lambda + 2\mu - \mu^0)\eta^2]^2 + 4(\lambda + \mu^0)^2\xi^2\eta^2 > 0$$

Таким образом, все корни уравнения (4.2) — действительные и, вообще, различные; два нулевых совпадающих корня получаются при $\xi = 0$. Система (4.1) принадлежит к гиперболическому типу. Здесь стоит отметить одно частное решение уравнений (4.1), а именно решение вида: $u(x, z, t) = 0$, $w(x, z, t) = w(x, t)$, $\Omega(x, z, t) = \Omega(x, t)$.

После исключения функции $\Omega(x, t)$ для $w(x, t)$ при $k=0$ получаем уравнение

$$D_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{1}{b^2} (D_0 + \mu J_0) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho \frac{J_0}{b^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + 2h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

которое совпадает с известным уравнением Тимошенко, описывающим поперечные колебания балки с учетом сдвига [8, 9]. Этот частный случай можно рассматривать как одно из косвенных свидетельств в пользу предложенной модели, которую можно рассматривать как обобщение теории Тимошенко на слоистую среду.

Результаты, содержащиеся в настоящей статье, были опубликованы ранее². Сходные идеи и результаты, изложенные в более общей форме, содержатся в [10].

² Зволинский Н. В., Шхинец К. Н. Континуальная модель слоистой упругой среды. — Препринт Ин-та проблем механики АН СССР, М., 1980, № 165. 56 с.

5. Если характерный размер явления есть L и отношение h/L очень мало, то система уравнений (4.1) может быть упрощена. Предположим справедливость асимптотических разложений

$$u = u_0 + u_1(h/L)^2 + \dots, \quad w = w_0 + w_1(h/L)^2 + \dots, \quad \Omega = \Omega_0 + \Omega_1(h/L)^2 \quad (5.1)$$

Коэффициенты $D(k)$ и $J(k)$ запишем в виде

$$D(k) = A(k)h^3, \quad J(k) = B(k)h^3$$

$$A = \frac{2(\lambda + \mu)}{3(\lambda + 2\mu)} \frac{\mu}{1 + 2k/\mu}, \quad B = \frac{2}{3} \frac{1}{1 + 2k/\mu}$$

Подставляя (5.1) в (4.1) и приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях h/L , получим последовательность систем уравнений для нахождения функций $u_0, w_0, \Omega_0, u_1, w_1, \Omega_1, \dots$.

Для первого приближения имеем систему

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \mu^0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + (\lambda + \mu^0) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$$

$$(\lambda + \mu^0) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial z} + \mu^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \quad \Omega_0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (5.2)$$

Для второго приближения

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \mu^0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$(\lambda + \mu^0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} + \mu^0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \quad (5.3)$$

$$\frac{2\mu}{L^2} \left(\Omega_1 - \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial w_0}{\partial x^2} - \rho B \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right)$$

Дальнейшие приближения не выписываем.

В системе (4.1) малый параметр h/L является множителем при старших производных в третьем уравнении. Это — нерегулярный случай. Разложения (5.1) для системы (4.1) — внешние, следуя которым теряется возможность удовлетворить краевому и начальному условиям для функции $\Omega(x, z, t)$. Восстановить такую возможность можно введением погранслоев. Что касается окрестности границы, то для нее, строго говоря, сама система (4.1) требует корректировок.

Для мелкослойной среды можно встать на такую точку зрения: пренебречь невыполнением граничного условия для Ω и рассматривать систему (5.2) как описывающую достаточное приближение к действительности. Закон Гука будет описываться равенствами (1.4), в которых надо положить $\Omega = \partial w / \partial x$; при этом симметрия касательных напряжений восстанавливается и слоистая среда моделируется в этом приближении линейно-упругой анизотропной средой кубической симметрии.

Следует иметь в виду, что погрешность, которая вносится осредненной континуальной моделью, зависит от ряда обстоятельств. Основное условие (уже упоминавшееся) состоит в том, что характерный размер поля (длина волны) должен быть заметно больше толщины слоев. Но есть и еще одно ограничение, связанное с границами. Если граница (или некоторый ее участок) пересекается трещинами, то в окрестности такой границы возникает дополнительная погрешность (появляется еще один линейный размер — расстояние от границы). Иными словами, в окрестности границы появляется погранслой, который не описывается уравнениями (4.1). Континуальная модель, применяемая к задачам дифракции на включениях и кавернах, внесет дополнительную погрешность в краевой эффект. Требуется создать теорию погранслоя для континуальной модели. Аналогичное положение имеется в теории пластин и оболочек, где также существует погранслой вблизи грани.

Авторы благодарят Л. М. Флитмана и В. Л. Бердичевского за весьма полезные обсуждения полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейн-Заде М. И. К построению теории изгиба слоистых пластинок.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 2, с. 232–243.
2. Бологин В. В. Об изгибе плит, состоящих из большого числа слоев.— Изв. АН СССР. Механ. и машиностр., 1964, № 1, с. 61–66.
3. Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity.— Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1964, v. 16, No. 1, p. 51–78.— Рус. перев.: Механика: Сб. перев. иностр. статей, 1964, № 4, с. 129–160.
4. Sun C.-T., Achenbach J. D., Herrmann G. Continuum theory for a laminated medium.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, v. 35, No. 3, p. 467–475.
5. Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. К вопросу о плоском деформировании упрочняющихся и разупрочняющихся пластических материалов.— ПМТФ, 1977, № 3, с. 156–174.
6. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps déformables. Paris: Hermann, 1909. 226 p.
7. Дурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
8. Timoshenko S. P. On the correction for shear of differential equation for transverse vibrations of prismatic bars.— Phil. mag. Ser. 6. 1921, v. 41, p. 744–746.
9. Тимошенко С. П. Теория колебаний в инженерном деле. М.—Л.: Гостехиздат, 1931. 344 с.
10. Исупов Л. П. Вариант анизотропной моментной теории упругости для волокнистого композита.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 3, с. 62–69.

Москва, Ленинград

Поступила в редакцию
2.XII.1981