

УДК 539.214

ОПИСАНИЕ ЭФФЕКТОВ СЛОЖНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
СООТНОШЕНИЯМИ, ОСНОВАННЫМИ НА МОДЕЛИ  
Ю. Н. РАБОТНОВА

ПОПОВ Л. Г.

Появление новых определяющих соотношений в теории пластичности за последние годы (см., например, [1–6]), усложнение их идейной стороны и математического аппарата объясняется необходимостью описания новых экспериментальных фактов. При этом может оказаться, что возможности некоторых предлагаемых ранее более простых теорий остаются исследованными не до конца.

В публикуемой работе показано, что в рамках известного представления — модели, предложенной Ю. Н. Работновым в 1959 г. [7], могут быть качественно описаны результаты ряда принципиальных экспериментов, известных как до ее опубликования (упрочнение, эффект Баушингера, определение мгновенного модуля сдвига), так и проведенных позднее (эффекты типа запаздывания при сложном плоском деформировании в виде двузвенных и трехзвенных траекторий с различными углами излома и траекторией малой кривизны).

**1. Модельное представление Ю. Н. Работнова.** Основные уравнения, описывающие поведение модели Ю. Н. Работнова, — круглой тонкостенной трубки при сложном изгибе, в пространстве кривизн (аналог пространства деформаций), а также их простая геометрическая трактовка подробно рассмотрены в [8, гл. 4, § 3, п. 2]. Ряд качественных аналогий этих уравнений с известными соотношениями пластичности (теория скольжения С. Батдорфа и Б. Будянского, теория Дж. Сандерса, соотношения В. Д. Ключникова) отмечен в [9].

Представления модели Ю. Н. Работнова могут быть перенесены на пятимерное пространство девиаторов. Но при этом теряется надежда на простоту анализа полученных соотношений. Поэтому, следуя работе [9], воспользуемся непосредственной заменой моментов  $M_i$  и кривизн  $\kappa_j$  ( $i, j=1, 2$ ) в соотношениях модели на координаты некоторой двумерной плоскости пространства девиаторов, ограничиваясь при этом, естественно, анализом только плоских траекторий деформирования. В качестве координат этой плоскости при описании экспериментов на совместное растяжение и кручение тонкостенных трубчатых образцов (что и составляет основной экспериментальный материал в пластичности) можно выбрать следующие:

$$\xi_1 = e_{11}, \quad \xi_2 = 2e_{12}/\sqrt{3}, \quad S_1 = 3S_{11}/2, \quad S_2 = \sqrt{3}S_{12} \quad (1.1)$$

где  $e_{ij}$ ,  $S_{ij}$  — девиаторы деформаций и напряжений.

Поверхность деформирования (аналог поверхности нагружения для пространства деформаций) на плоскости  $\xi_1 \sim \xi_2$  при этом переходит в кривую деформирования, представляющую собой огибающую предельных прямых пластичности. Каждая из этих прямых, которые могут при деформировании перемещаться лишь параллельно, будет характеризоваться углом  $\eta$  между ее нормалью  $\mathbf{n}$  и осью  $\xi_1$ , причем в процессе деформирования расстояние между двумя прямыми пластичности, имеющими противоположное направление нормалей (парные прямые), постоянно и равно  $2\xi_0$  ( $\xi_0$  — предел упругой деформации при чистом сдвиге).

В исходном (недеформированном) состоянии поверхность деформирования — окружность радиуса  $\xi_0$  с центром в начале координат. Все деформации, не выходящие на эту окружность, чисто упругие. Текущее значение вектора деформации  $\xi = \xi_1 i_1 + \xi_2 i_2$ , где  $i_1, i_2$  — орты декартовой прямоугольной системы координат, отодвигает в направлении от начала координат прямые пластичности, имеющие с ним общую точку, при этом движение каждой из них вызывает такое же перемещение парной прямой. Возникающая единичная пластическая деформация  $\xi_n^p$  от перемещения одной прямой пластичности направлена по нормали к ней и пропорциональна отклонению  $h - \xi_0$ , на которое она переместилась из начального состояния.

$$\xi_n^p = g n (h - \xi_0), \quad n = \cos \eta i_1 + \sin \eta i_2 \quad (1.2)$$

Полная пластическая деформация получается осреднением суммы единичных по всем углам  $\eta$ . Учитывая парность прямых, для вектора напряжений  $S$  можно записать

$$S = E \left( \xi - \frac{2g}{\pi} \int n (h - \xi_0) d\eta \right) \quad (1.3)$$

где  $E$  — модуль Юнга и интегрирование ведется на любом интервале длиной  $\pi$ .

Аналогично для приращений

$$\delta S = E \left( \delta \xi - \frac{2g}{\pi} \int n \delta h d\eta \right) \quad (1.4)$$

где  $\delta h$  — изменение отклонения  $h$  данной прямой пластичности с нормалью  $n$  от начала координат при дополнительном деформировании  $\delta \xi$ .

При этом поверхность деформирования всегда имеет коническую особенность (угол) и соотношения между приращениями напряжений и деформаций полностью определяются величиной этого угла, его ориентацией и вектором приращения деформации  $\delta \xi$ , для направлений которого можно выделить зону, где эти соотношения дифференциально-линейные (зона полного деформирования), и зоны, где они дифференциально-нелинейные (зоны неполного деформирования). Соотношения между самими напряжениями  $S$  и деформациями  $\xi$  полностью определяются расположением прямых пластичности для данного состояния, которое без труда находится по виду предшествующего процесса деформирования.

Рассмотрим возможность описания на основе предлагаемых определяющих соотношений известных свойств пластического течения, обнаруженных в проводимых ранее экспериментах.

**2. Эффект Баушингера.** Мгновенный модуль сдвига. Рассмотрим деформирование по оси  $\xi_1$ . Расположение прямых пластичности показано на фиг. 1, где выделенные линии являются огибающими прямых пластичности для состояния  $A$ , область упругого деформирования обозначена штриховкой. Тогда для прямой пластичности с нормалью  $n = \cos \eta i_1 + \sin \eta i_2$  можно записать

$$h(\eta) = \xi \cdot n = \xi_1 \cos \eta \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.3), получим при одноосном деформировании

$$\begin{aligned} S_1 &= E \left[ \xi_1 - \frac{4g}{\pi} \int_0^{\pi/2 - \omega} (\xi_1 \cos \eta - \xi_0) \cos \eta d\eta = \right. \\ &= E \xi_1 [1 - g + (2g/\pi) (\omega + 1/2 \sin 2\omega)], \quad \sin \omega = \xi_0 / \xi_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Определяющими константами служат постоянные  $E$ ,  $g$  и  $\xi_0$ . Как видно, варьируя  $g$ , можно описывать диаграммы материалов от имеющих площадку текучести до существенно упрочняющихся. При  $g=1$  одноосная

диаграмма имеет горизонтальную асимптоту<sup>1</sup>, при  $0 < g < 1$  — наклонную, с углом наклона  $\varphi$ , который определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = E(1-g) \quad (2.3)$$

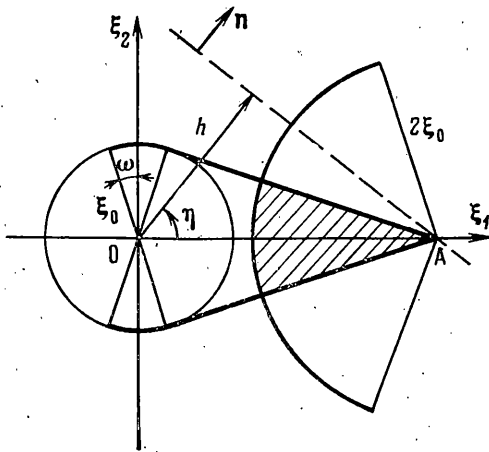
а точка  $S_1^*$  пересечения асимптоты с осью  $S_1$ :

$$S_1^* = 4gE\xi_0/\pi \quad (2.4)$$

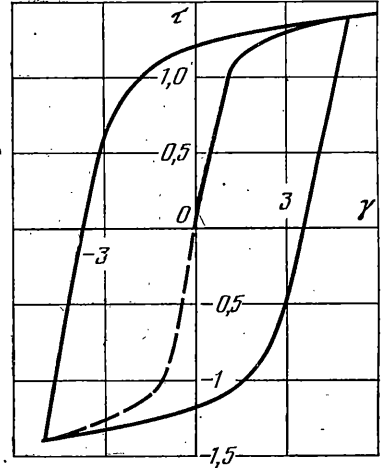
Из соотношений (2.3) и (2.4) следует простой способ определения констант материала  $g$  и  $\xi_0$ .

Рассматривая знакопеременное одноосное деформирование, можно показать, что соотношения (1.3), (1.4) описывают эффект Баушингера, удовлетворяющий принципу Мазинга.

На фиг. 2 построена кривая одноосного деформирования в безразмерных координатах  $\tau = S_1/(E\xi_0)$ ,  $\gamma = \xi_1/\xi_0$  при  $g = 0,97$ , где после нагружения



Фиг. 1



Фиг. 2

до  $\xi_1 = 5\xi_0$  происходит разгрузка до  $\xi_1 = -5\xi_0$ , а затем повторное нагружение.

Одним из экспериментов критического типа, которым уделялось в свое время большое внимание при проверке теории течения, являются опыты по определению мгновенного модуля сдвига (трубчатые образцы после выхода в пластическую область по осевому сжатию подвергались дополнительному кручению при постоянной осевой силе — ортогональной догрузке). При этом определяется мгновенный модуль сдвига  $G_i = \frac{1}{3} \delta S_2 / \delta \xi_2$  при  $\delta \xi_2 \rightarrow 0$ .

Отметим, что имеющиеся известные экспериментальные данные достаточно противоречивы. По результатам одних работ мгновенный модуль сдвига  $G_i$  с достаточной степенью точности совпадает с упругим модулем  $G$ , по другим —  $G_i$  меньше  $G$  и может быть даже порядка  $0,5G$  и меньше. При этом, как отмечено некоторыми авторами, в экспериментах величина  $G_i$  уменьшается с ростом предварительного осевого деформирования, предшествующего скручиванию.

Рассмотрим аналогичный эксперимент на ортогональное приращение для соотношений, основанных на модели Работнова. Пусть до некоторого момента траектория деформирования была направлена по оси  $\xi_1$ , а затем

<sup>1</sup> Именно этот случай, соответствующий идеально пластическому материалу трубки в модели, был рассмотрен Ю. Н. Работновым в [7]. В рамках предлагаемых соотношений можно учитывать лишь асимптотическую площадку текучести.

при  $\xi_1 = \xi_1^0 = \text{const}$  происходит малое ортогональное к первоначальной траектории дополнительное деформирование  $\delta\xi_2$ . Тогда, используя (1.4), для величин мгновенного модуля сдвига в рассматриваемом процессе получим

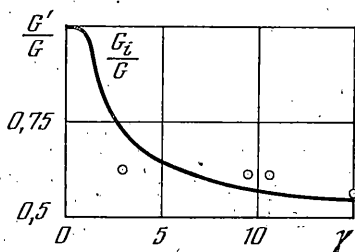
$$G' = \frac{1}{3} \delta S_2 / \delta \xi_2 = G [1 - (g/\pi) (\beta^{-1/2} \sin 2\beta)] \quad (2.5)$$

где  $\beta$  определяется из соотношения  $\cos \beta = \xi_0 / \xi_1^0$ .

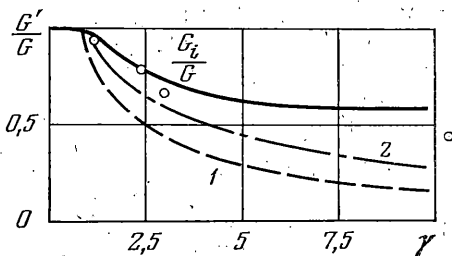
Как видно, мгновенный модуль сдвига  $G'$  при этом зависит от величины предварительного осевого деформирования и с увеличением  $\xi_1^0$  от  $\xi_0$  до бесконечности уменьшается от  $G$  до  $G(1 - 0,5g)$ .

Отметим, что направления ортогонального дополнительного нагружения и ортогонального дополнительного деформирования, вообще говоря, могут различаться и при сравнении  $G'$  и  $G_i$  можно принимать во внимание лишь качественное совпадение.

На фиг. 3, 4 представлены результаты расчета по соотношению (2.5) мгновенного модуля сдвига  $G'$  в зависимости от предварительной осевой



Фиг. 3



Фиг. 4

деформации  $\xi_1^0$  (сплошная линия), которые сравниваются с соответствующими экспериментальными данными для  $G_i$  из [10, 11] ( $\gamma = \xi_1^0 / \xi_0$ ). На фиг. 4 для сравнения приведены данные расчета по деформационной теории (кривая 1) и по теории скольжения (кривая 2) из [11]. Как видно из этих графиков, соотношение (2.5) достаточно хорошо качественно описывает указанную зависимость.

Заметим, однако, что эксперименты в приращениях (сюда относятся кроме определения мгновенного модуля сдвига, например, эксперименты по определению формы предельной поверхности и по непосредственной проверке принципа градиентальности) не могут служить достаточными аргументами в пользу того или иного варианта соотношений пластичности вследствие ограниченности техники эксперимента работой лишь с конечными (хотя, возможно, и весьма малыми) величинами.

По-видимому, реальной и убедительной экспериментальной проверкой соотношений в приращениях может служить сравнение их предсказаний с результатами опытов на конечных путях деформирования.

**3. Двухзвенные траектории деформирования.** Траектории изображаются в пространстве деформаций  $\xi_1 \sim \xi_2$  двухзвенной ломаной  $OAB$  из двух прямолинейных участков. Пусть звено  $OA$  расположено по оси  $\xi_1$  и точке  $A$  соответствует значение  $\xi_1^0$ ,  $\theta$  — угол между направлениями  $OA$  и  $AB$ . При деформировании вдоль первого участка  $OA$  имеют место соотношения (2.2).

Расположение прямых пластичности при деформировании вдоль второго участка  $AB$  достаточно легко находится по описанным выше правилам, и после вычисления соответствующих значений  $h(\eta)$  и подстановки их в (1.3) соотношения между напряжениями и деформациями в зависимости от длины второго участка  $\Delta\xi$  при изломе траектории деформирова-

ния на угол  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  можно записать в следующем виде:

$$S = E \left\{ \xi - \frac{2g}{\pi} \left[ \int_{\theta - \pi/2}^{\psi + \psi} (|\xi| \cos(\eta - \psi) - \xi_0) n d\eta + \int_{\omega - \pi/2}^{\theta - \pi/2} (\xi_1^0 \cos \eta - \xi_0) n d\eta \right] \right\} \quad (\theta > \omega, \Delta \xi \leq \Delta \xi^*) \quad (3.1)$$

$$S = E \left\{ \xi - \frac{2g}{\pi} \left[ \int_{\theta - \pi/2}^{\pi/2 + \theta - \beta} (|\xi| \cos(\eta - \psi) - \xi_0) n d\eta + \int_{\theta - \beta - \pi/2}^{\theta - \pi/2} (\xi_1^0 \cos \eta - \xi_0) n d\eta \right] \right\} \quad (\theta > \omega, \Delta \xi > \Delta \xi^*) \quad (3.2)$$

$$S = E \left[ \xi - \frac{2g}{\pi} \int_{\psi - \pi/2 + \gamma}^{\psi + \pi/2 - \gamma} (|\xi| \cos(\eta - \psi) - \xi_0) n d\eta \right] \quad (0 < \theta < \omega) \quad (3.3)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\Delta \xi \sin \theta}{\xi_1^0 + \Delta \xi \cos \theta}, \quad |\xi| = \frac{\Delta \xi \sin \theta}{\sin \beta}, \quad \cos \varphi = \frac{\xi_0}{|\xi|},$$

$$\sin \omega = \frac{\xi_0}{\xi_1^0}, \quad \sin \beta = \frac{2\xi_0}{\Delta \xi}$$

$$\Delta \xi^* = \frac{2\xi_0}{\sin(\theta - \omega)}, \quad \xi_1 = \xi_1^0 + \Delta \xi \cos \theta, \quad \xi_2 = \Delta \xi \sin \theta$$

Входящие в (3.1)–(3.3) интегралы вычисляются в элементарных функциях. Отметим, что в случае  $0 < \theta < \omega$  приращения деформаций всегда направлены в зону полного деформирования, где справедлива деформационная теория пластичности.

Рассмотрим сначала случай  $\theta = \pi/2$ . Из соотношений (3.1) и (3.2) следует, что после точки излома значения напряжений  $S_1$  являются монотонно убывающей, а  $S_2$  монотонно возрастающей функцией  $\Delta \xi$ : при  $\Delta \xi > \Delta \xi^*$  значения  $S_2$  не зависят от  $\Delta \xi_1^0$ , а при  $\xi_2 \rightarrow \infty$  значения  $S_1$  стремятся к горизонтальной асимптотике  $S_1^0 = E(1-g)\xi_1^0$ , которая совпадает с осью абсцисс при  $g=1$ , т. е. для материалов, имеющих горизонтальную площадку текучести.

Все эти качественные характеристики совпадают с наблюдаемыми в экспериментах.

Для проверки количественных оценок, определяемых соотношениями (3.1)–(3.3), результаты расчетов по ним сравнивались с имеющимися экспериментальными данными.

На фиг. 5 сплошной линией представлены рассчитанные по (3.1)–(3.3) зависимости  $S_1$  (кривая 1) и  $S_2$  (кривая 2) от длины траектории  $\Delta \xi$ , отсчитываемой после точки излома на угол  $\theta = \pi/2$  для стали ЗОХГСА (константы материала, определенные по кривой одноосного деформирования:  $E = 2,43 \cdot 10^5$  МПа,  $\xi_0 = 17 \cdot 10^{-4}$ ,  $g = 0,9707$ ) и соответствующие экспериментальные значения из [12]<sup>2</sup>. Для сравнения там же приведены результаты расчета этого эксперимента по теориям изотропного (кривые 3, 4) и трансляционного (кривые 5, 6) упрочнения из [13], которые, как видно, дают заниженный результат для  $S_1$  при значительных  $\Delta \xi$ .

Аналогичные зависимости при различной длине первоначального участка ( $\xi_1^0 = 35,5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\xi_1^0 = 57,5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\xi_1^0 = 87,7 \cdot 10^{-4}$ ) для стали ЗОХГСА (константы материала:  $E = 2,48 \cdot 10^5$  МПа,  $\xi_0 = 13,3 \cdot 10^{-4}$ ,  $g = 0,9877$ ) и соответствующие эксперименталь-

<sup>2</sup> На фигурах, где представлены экспериментальные данные, напряжения измеряются в МПа, а деформации – в процентах.

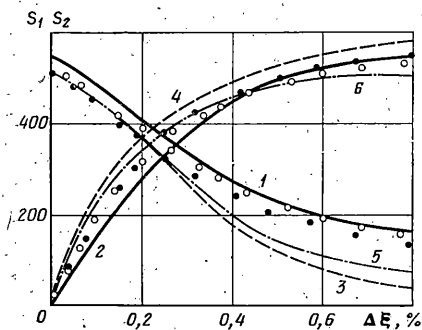
ные данные из [14] приведены на фиг. 6. Рассчитанные значения  $S_1$  стремятся к горизонтальным асимптотам; соответствующие значения  $S_1^0=10,8$  МПа; 17,5 МПа; 26,7 МПа.

Теоретические кривые полностью повторяют характерные особенности экспериментальных, обусловленные различной длиной первого участка: при увеличении  $\xi_1^0$  значения  $S_1$  при фиксированном  $\Delta\xi$  увеличиваются, а значения  $S_2$  при достаточно больших  $\xi\Delta$  ( $\Delta\xi > \Delta\xi^*$ ) совпадают.

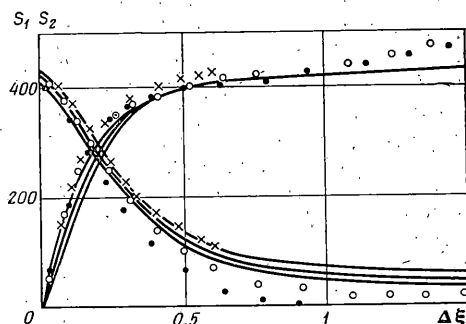
Для описания траекторий с острым углом излома ( $0 < \theta < \pi/2$ ) результаты удобнее представлять в виде величин ( $|S|$ ) и направления (угол  $\chi$ ) относительно траектории деформирования вектора напряжений  $S$ :

$$|S| = \sqrt{S_1^2 + S_2^2}, \quad \chi = \arccos \frac{S_1 \cos \theta + S_2 \sin \theta}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}} \quad (3.5)$$

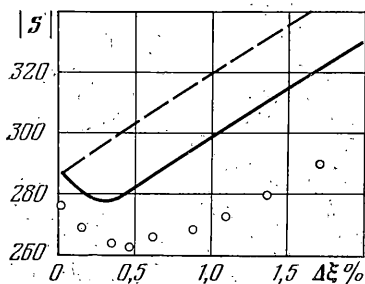
На фиг. 7, 8 построены графики  $|S|$  и  $\chi$  в зависимости от  $\Delta\xi$ , рассчитанные по (3.1) – (3.3) для алюминиевого сплава Д-16-Г в отожженном состоянии (константы



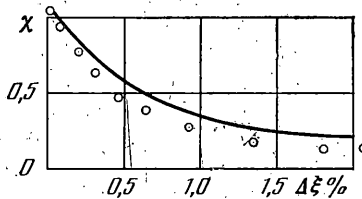
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

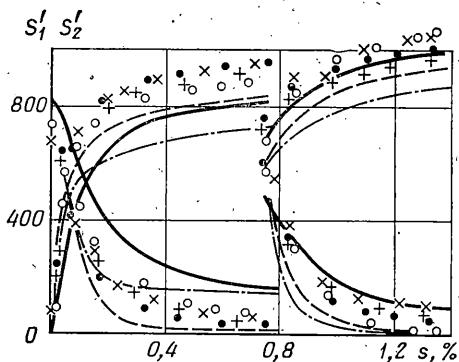
материала:  $E=8,33 \cdot 10^4$  МПа,  $\xi_0=0,216 \cdot 10^{-2}$ ,  $g=0,9601$ ) при угле излома  $\theta=1,05$  и длине первого участка  $\xi_1^0=2,04 \cdot 10^{-2}$ . Там же приведены соответствующие экспериментальные значения из [15]: для сравнения штрихами показан участок расчетной кривой одноосного деформирования ( $\theta=0$ ) при тех же значениях длины траектории деформирования.

Как видно, соотношения (3.1) – (3.3) достаточно хорошо описывают наблюдаемые экспериментально зависимости: определенное резкое уменьшение величины  $|S|$  сразу после точки излома с последующим «восстановлением» и постепенное приближение по направлению вектора  $S$  к касательной траектории деформирования. Величина падения, так же как и в экспериментах, возрастает с увеличением длины начального участка  $\xi_1^0$ , а скорость приближения вектора  $S$  по направлению к касательной уменьшается.

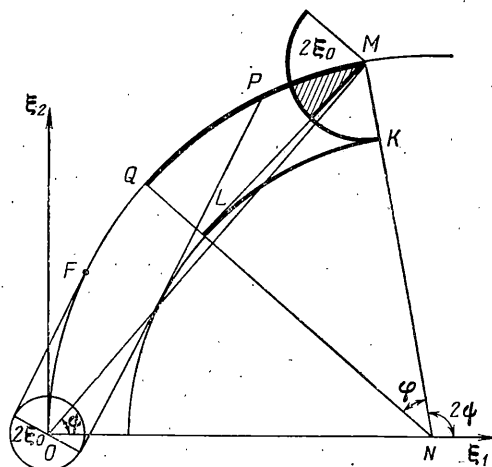
**4. Трехзвенные траектории деформирования.** Аналогично рассматривается случай трехзвенных траекторий деформирования, состоящих из трех прямолинейных участков. Здесь достаточно рассмотреть деформирование лишь вдоль последнего участка, при этом результаты можно представить в виде проекций  $S_1'$  и  $S_2'$  вектора напряжений на касательную и нормаль к траектории деформирования  $S=S_1'j_1+S_2'j_2$ , где  $j_1$  и  $j_2$  – единичные векторы касательной и нормали. Получающиеся при этом в явном

виде соотношения между напряжениями  $S$  и деформациями  $\xi$  достаточно громоздки и здесь не приводятся. В [12] приведены результаты экспериментов для образцов из отожженной меди, когда первые два участка взаимно перпендикулярны, а третий — направлен под углом  $45^\circ$  ко второму.

На фиг. 9 представлены результаты расчетов этого эксперимента по рассматриваемым соотношениям (сплошные линии) и экспериментальные данные [12] в зависимости от длины траектории деформирования после первой точки излома. Константы материала:  $E=7,62 \cdot 10^4$  МПа,  $\xi_0 = 7,36 \cdot 10^{-4}$ ,  $g=0,9801$ . На этой же фигуре для сравнения приведены ре-



Фиг. 9



Фиг. 10

зультаты расчета по теории изотропного (штриховые кривые) и трансляционного (штрихпунктирные кривые) упрочнения из [13].

**5. Траектории деформирования в форме дуги окружности.** Экспериментально показано [14], что для материалов, свойства которых близки к упругим идеально пластическим, при деформировании по траекториям такого типа с достаточно большим радиусом вектор напряжений  $S$  после прохождения определенного начального участка близок по направлению к касательной к траектории деформирования, а зависимость его модуля от длины пройденной траектории близка к аналогичной зависимости при одноосном деформировании.

Проверим возможность описания этих эффектов на основе рассматриваемых соотношений пластичности.

Рассмотрим траекторию деформирования в форме дуги окружности достаточно большого радиуса с центром в точке  $N$  на оси  $\xi_1$ . Предположим, что радиус  $R$  этой окружности в несколько раз больше радиуса  $\xi_0$  начальной поверхности деформирования.

Расположение прямых пластичности для этого случая представлено на фиг. 10. После выхода в пластическую область можно выделить три участка деформирования: на первом из них осуществляется полное деформирование и справедливы соотношения деформационной теории (дуга  $OF$ ), на втором, соответствующем дуге  $FP$ , приходят в движение новые прямые пластичности (так, при достижении точки  $P$  все прямые пластичности получают определенные перемещения). Выражения для связи напряжений и деформаций не приводятся ввиду их громоздкости.

При деформировании после точки  $P$  (третий участок) расположение прямых показано на фиг. 10, где выделенные линии — огибающие прямых пластичности, а заштрихованная область — область упругого деформирования. Полная пластическая деформация складывается при этом от пе-

ремещений прямых пластичности, составляющих коническую особенность в точке  $M$ , совпадающей с концом вектора деформаций  $\xi$ , и от перемещений прямых пластичности, огибающая которых представляет собой дугу  $KL$  с центральным углом  $\varphi$  окружности радиуса  $R-2\xi_0$  с центром в точке  $N$ . Отрезок  $ML$  касается этой окружности в точке  $L$ , угол  $\varphi$  определяется соотношением  $\cos \varphi = 1 - 2\xi_0/R$ .

Обозначим через  $\psi$  полярный угол, соответствующий вектору  $\xi$ . Интеграл в формуле (1.3) для подсчета значения вектора напряжений  $S$  разбивается на два. Расстояние прямых пластичности, составляющих коническую особенность в точке  $M$  от их исходного расположения (т. е. для  $2\psi + \varphi - \pi < \eta < 2\psi$ ), запишем так:

$$h(\eta) = |\xi| \cos(\eta - \psi) - \xi_0 \quad (5.1)$$

Соответствующее расстояние прямых пластичности, составляющих дугу  $KL$  (т. е.  $2\psi - \pi < \eta < 2\psi + \varphi - \pi$ ), будет равно

$$h(\eta) = R(\cos \eta - 1) + \xi_0 \quad (5.2)$$

Используя (5.1) и (5.2), получим следующие выражения для компонент вектора напряжений:

$$S = ER \left\{ \frac{\xi}{R} - \frac{2g}{\pi} \left[ \int_{2\psi + \varphi - \pi}^{2\psi} (2 \cos \psi \cos(\eta - \psi) - a) n d\eta + \int_{2\psi - \pi}^{2\psi + \varphi - \pi} (\cos \eta - 1 + a) n d\eta \right] \right\}, \quad a = \xi_0/R \quad (5.3)$$

$$\xi = 2R \cos \psi (\cos \psi i_1 + \sin \psi i_2)$$

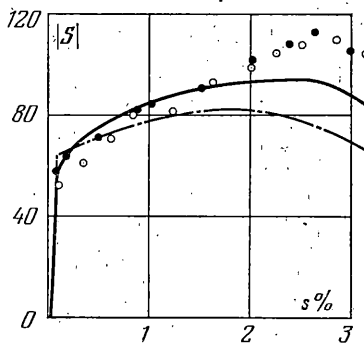
Соотношения (5.3) справедливы для третьего участка, т. е. при  $\psi \leq 1/2(\pi - \alpha - \beta)$ , где  $\alpha, \beta$  определяются соотношениями  $\sin 1/2\alpha = (1/2\xi_0/R)^{1/2}$ ,  $\sin 1/2\beta = (\xi_0/R)^{1/2}$ .

Покажем, что для материалов, свойства которых близки к упругим идеально пластическим, вектор напряжений по направлению будет достаточно близок с касательной к траектории деформирования при деформировании по траектории в виде окружности малой кривизны.

Для этого положим в соотношениях (5.3)  $g=1$  и разложим правые части в ряд по  $\varphi$ . С точностью до  $a^2$  будем иметь  $\varphi = 4a$ . Удерживая члены до  $\varphi^2$  включительно, получим  $S_1 = (ER\varphi^2 \sin 2\psi)/\pi$ ,  $S_2 = (-ER\varphi^2 \cos 2\psi)/\pi$ . Следовательно, с точностью до  $\varphi^2$  найдем  $S_1/S_2 = -\operatorname{tg} 2\psi$ ,  $|S| = 4E\xi_0/\pi$ , т. е. вектор напряжений  $S$  с указанной точностью направлен по касательной к траектории деформирования малой кривизны, а его величина  $|S|$  совпадает с горизонтальной асимптотой кривой одноосного деформирования, что подтверждается известными экспериментами [10].

Рассмотрим зависимость модуля вектора напряжений  $S$  для упрочняющихся материалов от длины траектории деформирования  $s$ , которая в рассматриваемом случае определяется соотношением  $s = R(\pi - 2\psi)$ . В работе [12] приведены результаты эксперимента такого типа для отожженной меди (константы материала:  $E = 7,62 \cdot 10^4$  МПа,  $\xi_0 = 7,36 \cdot 10^{-4}$ ,  $g = 0,9801$ ).

На фиг. 11 представлена зависимость модуля вектора напряжений от



Фиг. 11



длины  $s$  предшествующей траектории (кривая 1), рассчитанная по (5.3). Здесь же приведены результаты экспериментов из [12] и расчетов по теории трансляционного упрочнения [13] (кривая 2).

Таким образом, в рамках относительно простых и давно известных соотношений модели Ю. Н. Работнова качественно может быть описан ряд эффектов, обнаруженных в экспериментах последних лет.

Автор глубоко признателен Ю. Н. Работнову и В. Д. Ключникову за помощь и внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А. Деформация упрочняющегося пластического материала.— Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 2, с. 148—174.
2. Кадашев Ю. И. О квазистатическом варианте теории пластического течения.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4, с. 167—171.
3. Леонов М. Я., Нисневич Е. Б., Рычков Б. А. Плоская теория пластичности, основанная на синтезе скольжений.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6, с. 43—49.
4. Русинко К. Н., Калатинец А. Е., Древаль С. С. Вопросы концепции скольжения в теории пластичности.— Прикл. механика, 1974, т. 10, вып. 1, с. 3—19.
5. Швайко Н. Ю. К теории пластичности, основанной на концепции скольжения.— Прикл. механика, 1976, т. 12, № 11, с. 12—24.
6. Гозфельд Д. А., Иванов И. А., Садаков О. С. Описание эффектов сложного нагружения на основе структурной модели среды.— В кн.: Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975, с. 171—183.
7. Работнов Ю. Н. Модель, иллюстрирующая некоторые свойства упрочняющегося пластического тела.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 1, с. 164—168.
8. Ключников В. Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979, 208 с.
9. Ключников В. Д. Новые представления в пластичности и деформационная теория.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 4, с. 722—732.
10. Жуков А. М., Работнов Ю. Н. Исследование пластических деформаций стали при сложном нагружении.— Инж. сб., 1954, т. 18, с. 105—112.
11. Свешникова В. А. О пластическом деформировании упрочняющегося материала.— Изв. АН СССР. ОТН. Механ. и матем., 1956, № 1, с. 156—161.
12. Ленский В. С. Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении.— Изв. АН СССР. ОТН. Механ. и матем., 1960, № 5, с. 93—101.
13. Клячко С. Д. Об оценке теории течения.— Изв. АН СССР. ОТН. Механ. и матем., 1962, № 5, с. 159—164.
14. Ленский В. С. Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических процессов.— В сб.: Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 58—62.
15. Коровин И. М. Экспериментальное определение зависимости напряжение — деформация при сложном нагружении по траектории с одной точкой излома.— Инж. ж., 1964, т. 4, № 3, с. 592—600.

Москва

Поступила в редакцию  
27.X.1981