МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1984

УДК 539.214

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИНКЕ С ОТВЕРСТИЕМ, БЛИЗКИМ К КРУГОВОМУ

АННИН Б. Д.

Методом малого параметра решена упругопластическая задача для бесконечной пластинки с отверстием, подверженной всестороннему растяжению на бесконечности. Отверстие — близкая к кругу выпуклая область — свободно от внешних усилий. В пластической зоне, целиком охватывающей отверстие, выполняется условие пластичности Треска — Сен-Венана.

1. Пусть плоскость xy ослаблена отверстием — односвязной областью, ограниченной выпуклой кривой Г, имеющей непрерывную кривизну и близкую к окружности. Уравнение кривой Г зададим в виде

$$
\begin{gathered}
x_\Gamma = x_\Gamma(\beta) = dM(\beta)/d\beta \cos\beta + M(\beta)\sin\beta \\
y_\Gamma = y_\Gamma(\beta) = dM(\beta)/d\beta \sin\beta - M(\beta)\cos\beta \\
M(\beta) = R(1+\varepsilon m(\beta)), \qquad m(\beta) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n \cos(n\beta + a_n) \\
\pi/2 \leqslant \beta < 5\pi/2
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Здесь β — угол наклона к оси x касательной к Г; ε — малый параметр ($|\varepsilon| \ll 1$); a_n, b_n — постоянные, $m(\beta)$ — периодическая с периодом 2π и достаточно гладкая функция.

Радиус кривизны Г, равный

$$\rho_\Gamma(\beta) = R + R\varepsilon(m(\beta) + d^2 m(\beta)/d\beta^2) \tag{1.2}$$

мало отличается от постоянной R; контур Г близок к окружности радиуса R. Например для эллипса с полуосями $R(1-\varepsilon)$, $R(1+\varepsilon)$ имеем $M(\beta) = R(1+\varepsilon\cos 2\beta)$.

Пусть на бесконечности пластинка подвергается всестороннему растяжению усилием $p^\infty > 0$, а контур Г не нагружен. Считаем, что пластическая зона целиком охватывает отверстие. Обозначим через L упругопластическую границу. Компоненты тензора напряжений в пластической области определяются равенствами [1, с. 249], [2, с. 121]:

$$
\begin{gathered}
\sigma_x{}^p + \sigma_y{}^p = \sigma_s[2 - \rho_\Gamma(\beta)/(\rho_\Gamma(\beta) + \lambda)] \\
\sigma_y{}^p - \sigma_x{}^p + 2i\tau_{xy}{}^p = \sigma_s[\rho_\Gamma(\beta)/(\rho_\Gamma(\beta) + \lambda)]\exp(-2i(\beta - \pi/2))
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

Здесь $i^2 = -1$, σ_s — предел текучести при одноосном растяжении; параметры λ и β определяются через координаты x, y из уравнений

$$
\begin{gathered}
dM(\beta)/d\beta \cos\beta + (M(\beta) + \lambda)\sin\beta = x \\
dM(\beta)/d\beta \sin\beta - (M(\beta) + \lambda)\cos\beta = y
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

Это точное решение уравнений пластического равновесия при плосконапряженном состоянии при условии пластичности Треска — Сен-Венана и отсутствии внешних напряжений на Г. При этом параметр ε может не быть малым.

Считая параметр ε малым, будем искать функции $\lambda(x, y)$, $\beta(x, y)$ в виде $\lambda=\lambda_0+\varepsilon\lambda_1+O(\varepsilon^2)$, $\beta=\beta_0+\varepsilon\beta_1+O(\varepsilon^2)$.

Пусть r, θ — полярные координаты в плоскости x, y. Из уравнений (1.4) находим

$$\begin{gathered}\lambda_0=r-R, \quad \beta_0=\theta+\pi/2 \\ \lambda_1=-Rm(\theta+\pi/2), \quad \beta_1=-Rr^{-1}m'(\theta+\pi/2)\end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь и в дальнейшем штрих у функции $m=m(\theta+\pi/2)$ означает производную по θ. Из равенств (1.3) и (1.5) получаем с точностью до ε^2 следующие выражения напряжений в пластической зоне:

$$\begin{gathered}\sigma_x{}^p+\sigma_y{}^p=\sigma_s(2-Rr^{-1})+\varepsilon\sigma_s f(r, \theta) \\ \sigma_y{}^p-\sigma_x{}^p+2i\tau_{xy}{}^p=\sigma_s Rr^{-1}\exp(-2i\theta)+\varepsilon\sigma_s g(r, \theta)\exp(-2i\theta)\end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered}f(r, \theta)\equiv-Rr^{-1}(m+m'')+R^2r^{-2}m'' \\ g(r, \theta)\equiv Rr^{-1}(m+m'')-R^2r^{-2}m''+2iR^2r^{-2}m'\end{gathered}$$

2. Отобразим конформно внешность единичного круга $K: |\zeta|>1$ на неизвестную упругую область посредством функции $z=\omega(\zeta)=c\zeta+c_0+$ $+c_1\zeta^{-1}+c_2\zeta^{-2}+\ldots$.

Учитывая непрерывность напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} на L, получим для определения потенциалов Колосова — Мусхелишвили $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, $\zeta\in K+$ $+C(|\zeta|\geqslant1)$, определяющих напряжения в упругой области, и функции $\omega(\zeta)$ следующую краевую задачу.

На единичной окружности C:

$$\varphi(\zeta)+\overline{\varphi(\zeta)}=\sigma_s(2-Rr^{-1})/2+\varepsilon f(r, \theta)/2 \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered}\overline{\omega(\zeta)}\,(d\omega(\zeta)/d\zeta)^{-1}d\varphi(\zeta)/d\zeta+\psi(\zeta)=2^{-1}\sigma_s Rr^{-1}\exp(-2i\theta)+ \\ +2^{-1}\varepsilon g(r, \theta)\exp(-2i\theta)\sigma_s, \quad r^2=\omega\bar\omega, \quad \bar\omega/\omega=\exp(-2i\theta)\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\varphi(\zeta)=p^\infty/2+O(\zeta^{-2}), \quad \psi(\zeta)=O(\zeta^{-2}) \quad (|\zeta|\to\infty)$$

Для $\varepsilon=0$ имеет место осесимметричное решение

$$\begin{gathered}\omega_0(\zeta)=R_*\zeta, \quad \varphi_0(\zeta)=p^\infty/2, \quad \psi_0(\zeta)=R\sigma_s/(2R_*\zeta^2) \\ R_*\equiv2^{-1}R\sigma_s/(\sigma_s-p^\infty), \quad \sigma_s>p^\infty\end{gathered}$$

Предположим, что при $\varepsilon\neq0$ упругопластическая граница близка к кругу радиуса R_* и ее уравнение в полярной системе координат плоскости xy имеет вид

$$r=R_*(1+\varepsilon\delta(\theta)) \tag{2.3}$$

$$\delta(\theta)\equiv\alpha_0+\alpha_1\cos\theta+\beta_1\sin\theta+\alpha_2\cos2\theta+\beta_2\sin2\theta+\ldots$$

где α_0, α_1, β_1, α_2, β_2, ... — искомые постоянные.

Ищем приближеное решение краевой задачи (2.1), (2.2) в виде

$$\begin{gathered}\omega(\zeta)=R_*\zeta+\varepsilon\omega_1(\zeta)+O(\varepsilon^2), \quad \varphi(\zeta)={}^1/_2p^\infty+\varepsilon\varphi_1(\zeta)+O(\varepsilon^2) \\ \varphi(\zeta)=R_*\sigma_s/(2R_*\zeta^2)+\varepsilon\psi_1(\zeta)+O(\varepsilon^2) \\ \varphi_1(\zeta)=O(\zeta^{-2}), \quad \psi_1(\zeta)=O(\zeta^{-2}) \quad (|\zeta|\to\infty)\end{gathered} \tag{2.4}$$

Пусть ρ, τ — полярные координаты в плоскости ζ. Справедливы соотношения [3]:

$$\begin{gathered}\omega(\zeta)=R_*\zeta+\varepsilon R_*\zeta[\alpha_0+(\alpha_1+i\beta_1)/\zeta+(\alpha_2+i\beta_2)/\zeta^2+\ldots] \\ d\omega(\zeta)/d\zeta=R_*+\varepsilon R_*[\alpha_0-(\alpha_2+i\beta_2)/\zeta^2+\ldots] \\ \theta=\tau+\varepsilon\Delta(\tau) \quad (0\leqslant\tau\leqslant2\pi)\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\Delta(\tau)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(s)\operatorname{ctg}\frac{s-\tau}{2}ds=-\alpha_1\sin\tau+\beta_1\cos\tau-\alpha_2\sin 2\tau+\beta_2\cos 2\tau+\dots$$

Из (2.3) и (2.4) следует, что на C:

$$r^{-1}=R_*^{-1}(1-\varepsilon\delta(\tau))+O(\varepsilon^2) \qquad (2.6)$$
$$\exp(-2i\theta)=\exp(-2i\tau)(1-2i\varepsilon\Delta(\tau))+O(\varepsilon^2)$$

Подставляя (2.4) в (2.1), (2.2) и учитывая (2.6), получим с точностью до ε^2 следующую краевую задачу. На единичной окружности C:

$$\varphi_1(\zeta)+\overline{\varphi_1(\zeta)}=2^{-1}\sigma_s RR_*^{-1}\delta(\tau)+2^{-1}\sigma_s f(R_*,\tau)$$
$$\zeta d\varphi_1(\zeta)/d\zeta+\zeta^2\psi_1(\zeta)=-2^{-1}\sigma_s RR_*^{-1}[\delta(\tau)+2i\Delta(\tau)]+2^{-1}\sigma_s g(R_*,\tau) \qquad (2.7)$$
$$\varphi_1(\zeta)=O(\zeta^{-2}),\quad \psi_1(\zeta)=O(\zeta^{-2})\quad (|\zeta|\to\infty)$$

Так как $\varphi_1(\infty)=0$, то из первого уравнения (2.7) следует

$$\int_0^{2\pi}[RR_*^{-1}\delta(\tau)+f(R_*,\tau)]d\tau=0 \qquad (2.8)$$

Рассмотрим второе уравнение (2.7). На единичной окружности C заданы действительная и мнимая части аналитической в K функции $\zeta d\varphi_1(\zeta)/d\zeta+\zeta^2\psi_1(\zeta)$, обращающейся в постоянную на бесконечности. Отсюда следует [4], что

$$-\delta(\tau)+(m+m'')-RR_*^{-1}m''=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Delta(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\tau}{2}d\sigma-$$
$$-\frac{RR_*}{\pi}\int_0^{2\pi}m'(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\tau}{2}d\sigma+A$$

где A — произвольная постоянная. Учитывая условие (2.8) и выражение для $\Delta(\tau)$, окончательно находим

$$\delta(\theta)=-[m(\theta+\pi/2)+d^2m(\theta+\pi/2)/d\theta^2]+RR_*^{-1}d^2m(\theta+\pi/2)/d\theta^2- \qquad (2.9)$$
$$-\frac{RR_*}{\pi}\int_0^{2\pi}dm\left(\sigma+\frac{\pi}{2}\right)\Big/ d\sigma\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\theta}{2}d\sigma$$

В частности, для эллипса с полуосями $R(1+\varepsilon)$, $R(1-\varepsilon)$, находим из (2.9) $\delta(\theta)=3\cos 2\theta$. Это совпадает с результатом, приведенном в [5]. Функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, определяющие напряжения в упругой области, находятся из (2.7) при помощи формулы Шварца.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 396 с.
2. *Аннин Б. Д., Черепанов Г. П.* Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 238 с.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958. 678 с.
4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
5. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука. 208 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию 20.X.1983