МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1984

УДК 539.3

ОДНОМЕРНЫЙ ПЕРЕХОДНЫЙ ВОЛНОВОЙ ПРОЦЕСС ДЕФОРМАЦИИ ПРИ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

БУРЕНИН А. А., ШАРУДА В. А.

Методом последовательного интегрирования линейных неоднородных волновых уравнений получено решение одномерной задачи об ударном нагружении полупространства, когда возмущение распространяется в среду посредством ударной волны. В качестве малого параметра выбрано отношение начальной скорости движения границы полупространства к скорости распространения в рассматриваемой нелинейной упругой среде слабой волны (волны ускорений). Рассмотрен также случай, когда передний фронт возмущенной области при ударном воздействии на полупространство является слабой волной.

Закономерности распространения и условия существования ударных волн в упругой среде изучаются в [1, 2]. Используемый здесь метод решения и аналогичные задачи при гладкой функции нагружения рассматриваются в [3–5] и др. Решение автомодельной задачи об ударном нагружении приведено в [6].

1. Динамическое деформирование изотропной упругой среды в прямоугольной декартовой системе координат описывается в переменных Эйлера уравнениями [7]:

$$\sigma_{ij}=\rho\frac{dv_i}{dt},\qquad \sigma_{ij}=\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj}-2e_{kj}) \tag{1.1}$$

$$v_i=\partial u_i/\partial t+v_iu_{i,j},\qquad 2e_{ij}=u_{i,j}+u_{j,i}-u_{k,i}u_{k,j}$$

$$\rho/\rho_0=(1-2I_1+2I_1^2-2I_2-{}^4/_3I_1^3+4I_1I_2-{}^8/_3I_3)^{1/2}$$

$$I_1=e_{jj},\qquad I_2=e_{ij}e_{ji},\qquad I_3=e_{ij}e_{jk}e_{ki},\qquad W=W(I_1,I_2,I_3)$$

Здесь σ_{ij}, e_{ij}, v_i, u_i — компоненты тензоров напряжений и деформаций Альманзи, векторов скорости и перемещения соответственно, ρ и ρ_0 — плотности в текущем и свободном состояниях. В дальнейшем будем оставаться в рамках квадратичной теории упругости, т. е. для замыкания системы уравнений (1.1) будем использовать следующую зависимость упругого потенциала W от инвариантов I_1, I_2, I_3 тензора конечных деформаций Альманзи:

$$W={}^1/_2\lambda I_1^2+\mu I_2+lI_1I_2+mI_1^3+nI_3 \tag{1.2}$$

где λ, μ, l, m, n — постоянные материала.

Пусть в недеформированной сплошной среде, определенной равенствами (1.1), (1.2), распространяется плоская продольная ударная волна (поверхность разрывов скорости, деформаций, напряжений), нормаль к которой совпадает с осью x_1 выбранной системы координат. Существование такой ударной волны доказано в [1, 2]. Динамические и кинематические (условия совместности Адамара) условия совместности разрывов на такой ударной волне можно записать в виде

$$[\sigma_{11}]=-\rho G[v_1],\qquad [v_1]=-G\tau/(1+\tau),\qquad [u_{1,1}]=\tau \tag{1.3}$$

Здесь G — скорость распространения ударной волны, τ — ее интенсивность; квадратными скобками обозначен разрыв величины на волне.

Поскольку все компоненты тензора градиента перемещения, кроме $u_{1,1}$, непрерывны на ударной волне (ударная волна продольная), а перед поверхностью разрывов среда недеформирована, то из (1.1) и (1.2) можно получить

$$[\sigma_{11}]=(\lambda+2\mu)\tau-\gamma\tau^2, \qquad \gamma=3(l+m+n-{}^3/_2\lambda-3\mu) \tag{1.4}$$

Подстановка (1.4) в (1.3) позволяет вычислить скорость ударной волны в зависимости от ее интенсивности

$$G=G_0(1-\varkappa\tau)^{1/2}, \qquad G_0^2=(\lambda+2\mu)/\rho_0, \qquad \varkappa=\gamma/(\rho_0 G_0^2) \tag{1.5}$$

В дальнейшем будут рассматриваться лишь одномерные задачи, когда отличной от нуля будет только одна компонента вектора перемещений $u_1=u_1(x_1)=u(x)$. В этом случае соотношения (1.1) и (1.2) приводят к одному уравнению относительно u:

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\gamma\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\rho_0\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(1-2\frac{\partial u}{\partial x}\right)+2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}\right] \tag{1.6}$$

Пусть ударное нагружение недеформированного полупространства, упругие свойства которого определены соотношением (1.2), происходит таким образом, что начиная с момента времени $t=0$ граница его движется по закону $u=f(t)=V_0t+at^2/2$, т. е. совершает равнопеременное движение. Выбранный конкретный вид нагружения не умаляет общности, поскольку выбор его продиктован не возможностями метода дальнейшего решения задачи, а лишь наибольшей простотой получающихся в результате соотношений. Задачу можно было бы решать без дополнительных трудностей и при задании перемещения на границе полупространства произвольной функцией времени. Граничные условия для уравнения (1.6) можно в данном случае записать в виде:

на границе полупространства

$$u|_{x=f(t)}=f(t) \tag{1.7}$$

на ударной волне (1.5) (непрерывность перемещений)

$$u|_{x=T(t)}=0, \qquad T(t)=\int_0^t G(\zeta)\,d\zeta \tag{1.8}$$

где τ определяется из соотношения

$$\partial u/\partial x|_{x=T(t)}=-\tau \tag{1.9}$$

То обстоятельство, что передний фронт возмущенной области в данном случае будет ударной волной, доказано, например, в [6].

Если ввести безразмерные переменные y, θ, w по формулам $x=V_0G_0y/a$, $t=V_0\theta/a$, $u=V_0^2w/a$, то краевая задача для уравнения (1.6) с граничными условиями (1.7)—(1.9) запишется в следующей безразмерной форме:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(1+2\varkappa\varepsilon\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\left(1-2\varepsilon\frac{\partial w}{\partial y}\right)+2\varepsilon\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial\theta} \tag{1.10}$$

$$w|_{y=\varepsilon\varphi(\theta)}=\varphi(\theta), \qquad \varphi(\theta)=\theta+\theta^2/2, \qquad \varepsilon=V_0/G_0 \tag{1.11}$$

$$w|_{y=\psi(\theta)}=0, \qquad \psi(\theta)=\int_0^\theta[1-\varkappa\tau(\zeta)]^{1/2}\,d\zeta \tag{1.12}$$

$$\varepsilon\,\partial w/\partial y|_{y=\psi(\theta)}=-\tau \tag{1.13}$$

где ε можно считать малой величиной. Наличие в уравнении (1.10) и граничных условиях малого параметра ε позволяет применить для решения нелинейного уравнения (1.10) асимптотический метод. Необходимо отметить, что порядок введенных безразмерных переменных указывает на то, что асимптотическое разложение будет описывать действительный процесс деформирования лишь в моменты времени, достаточно близкие к моменту начала процесса. В моменты времени, удаленные от момента удара, использование в данном асимптотическом разложении граничного условия (1.11) становится неправомочным.

2. Представим функцию $w(y, \theta)$ и интенсивность ударной волны $\tau(\theta)$ в виде

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \ldots \tag{2.1}$$

$$\tau = \tau_0 + \varepsilon \tau_1 + \varepsilon^2 \tau_2 + \ldots \tag{2.2}$$

Обычная процедура последовательных приближений приводит исходную задачу (1.10)–(1.13) к следующей последовательности краевых задач:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} = 0, \qquad w_0|_{y=0} = \varphi(\theta), \qquad w_0|_{y=\theta} = 0 \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial_2 w_n}{\partial y^2} - \frac{\partial_2 w_n}{\partial \theta^2} = 2\sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{\partial w_m}{\partial \theta}\frac{\partial^2 w_{n-m-1}}{\partial y\,\partial\theta} - \frac{\partial w_m}{\partial y}\frac{\partial^2 w_{n-m-1}}{\partial \theta^2} - \right.\\
\left. -\varkappa\frac{\partial w_m}{\partial y}\frac{\partial^2 w_{n-m-1}}{\partial y^2}\right) \quad (n=1,2,\ldots)\\
\sum_{m=0}^{n}\varepsilon^m w_m|_{y=\varepsilon\varphi(\theta)} = \varphi(\theta), \qquad \sum_{m=0}\varepsilon^m w_m|_{y=\psi_n(\theta)} = 0,\\
\psi_n(\theta) = \int_0^\theta\left[1 - \varkappa\sum_{m=0}^{n}\varepsilon^m\tau_m(\zeta)\right]^{1/2} d\zeta\\
\sum_{m=0}^{n-1}\varepsilon^{m+1}\frac{\partial w_m}{\partial y}\bigg|_{y=\psi_n(\theta)} = -\sum_{m=0}^{n}\varepsilon^m\tau_m
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Нулевое приближение находится путем решения краевой задачи (2.3) для волнового уравнения, т. е. является решением линеаризованной задачи. Последующие приближения являются поправками, связанными с нелинейностью исходной задачи, и являются решением краевой задачи (2.4) для неоднородного волнового уравнения, правая часть которого определяется предыдущими приближениями. Решение последовательности краевых задач (2.4) не содержит дополнительных трудностей, кроме громоздкости выкладок, поэтому, возвращаясь к размерным переменным и ограничиваясь в (2.1) и (2.2) только выписанными членами, запишем для компоненты перемещения $u(x, t)$ и интенсивности ударной волны окончательные выражения

$$\begin{gathered}
u(x,t) = \frac{V_0}{G_0}(x - G_0 t) + \frac{a}{2G^2}(x - G_0 t)^2 + \frac{\varkappa a V_0}{4G_0^3}(x^2 - G_0^2 t^2)\times\\
\times\left[2 - \frac{a}{V_0 G_0}(x - G_0 t)\right] - \left(1 + \frac{\varkappa}{4}\right)\frac{V_0^2}{G_0^2}(x - G_0 t) + \left(\frac{3}{2} + \frac{\varkappa}{2}\right)\frac{aV_0}{G_0^3}(x - G_0 t)^2 -\\
-\left(\frac{1}{2} + \frac{\varkappa}{4}\right)\frac{a^2}{G_0^4}(x - G_0 t)^3 - \frac{\varkappa}{4}\frac{V_0^2}{G_0^2}(x - G_0 t) + \frac{\varkappa a}{2G_0^2}(x^2 - G_0^2 t^2)\times
\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\times\Big[\Big(\frac{7}{2}+\frac{5}{2}\varkappa\Big)-\frac{7}{2}(1+\varkappa)\frac{a}{V_0G_0}(x-G_0t)-\frac{1}{3}\Big(3\varkappa+\frac{11}{2}\Big)\frac{a^2}{V_0^2G_0^2}(x-G_0t)^2+$$
$$+\frac{\varkappa a}{2V_0G_0}(x+G_0t)-\frac{\varkappa a^2}{4V_0^2G_0^2}(x^2-G_0^2t^2)\Big]-\Big(1+\frac{3}{4}\varkappa+\frac{5}{16}\varkappa^2\Big)\frac{V_0}{G_0}(x-G_0t)+$$
$$+\Big(3+3\varkappa+\frac{9}{8}\varkappa^2\Big)\frac{a}{G_0^2}(x-G_0t)^2-\Big(\frac{5}{2}+\frac{11}{2}\varkappa+2\varkappa^2\Big)\frac{a^3}{V_0G_0^3}(x-G_0t)^3+$$
$$+\Big(\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\varkappa+\frac{5}{8}\varkappa^2\Big)\frac{a^3}{V_0^2G_0^4}(x-G_0t)^4+\frac{\varkappa^2a}{8G_0^2}(x+G_0t)^2-$$
$$-\Big(\frac{\varkappa}{2}+\frac{5}{16}\varkappa^2\Big)\frac{V_0}{G_0}(x+G_0t)$$
$$\tau(t)=V_0/G_0+(1+{}^1\!/_2\varkappa)V_0^2/G_0^2-{}^1\!/_2\varkappa V_0at/G_0^2 \tag{2.6}$$

Известно, что если $a=0$, то рассматриваемая задача является автомодельной, точным решением которой является ударная волна постоянной интенсивности. Для интенсивности такой волны из (1.3)–(1.5) можно получить уравнение

$$V_0(1+\tau)-G_0\tau(1-\varkappa\tau)^{1/2}=0 \tag{2.7}$$

Если в (2.7) подставить ряд (2.2), то с точностью до ε^2 будем иметь $\tau(t)=V_0/G_0+(1+{}^1\!/_2\varkappa)V_0^2/G_0^2$. Это соотношение совпадает с (2.6), если в нем положить $a=0$, что в свою очередь говорит о применимости использованного при получении (2.6) приближенного метода.

Для большинства конструкционных материалов $\varkappa<0$ (что предполагалось и при постановке задачи); для таких сред из (2.6) следует, что интенсивность ударной волны растет со временем при $a>0$ и уменьшается при $a<0$.

3. При растягивающем ударе скорость границы V_0 будет противоположно направлена оси x, поэтому граничное условие (1.7) перепишется в виде

$$u|_{x=f_1(t)}=f_1(t), \quad f_1(t)=-V_0t+at^2/2 \tag{3.1}$$

После замены переменных граничное условие (3.1) принимает форму

$$w|_{y=\varepsilon\varphi_1(\theta)}=\varphi_1(\theta), \quad \varphi_1(\theta)=-\theta+\theta^2/2 \tag{3.2}$$

Как показано в [6], свойства уравнений (1.1), (1.2) таковы, что если $\varkappa<0$, то передний фронт возмущенной области не может быть ударной волной. Разрыв, существующий в начальных условиях, является неустойчивым. Скорость переднего фронта возмущенной области равна в данном случае скорости распространения слабых волн (волн ускорения). В [1, 2] на основе исследования необратимых процессов на ударной волне получено, что ударные волны, приводящие к растяжению материала, являются термодинамически невозможными при $\varkappa<0$. Следовательно, вместо граничного условия (1.8), выражающего условие непрерывности перемещений на ударной волне, необходимо требовать непрерывность перемещений на слабой волне. Волна ускорений распространяется в недеформированную среду со скоростью G_0, поэтому $u=0$ при $x=G_0t$, или в безразмерных переменных

$$w|_{y=\theta}=0 \tag{3.3}$$

Таким образом приходим в этом случае к краевой задаче для уравнения (1.10) с граничными условиями (3.2), (3.3). Подстановка в (1.10), (3.2), (3.3) ряда (2.1) приводит к последовательности краевых задач

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2}=0, \quad w_0|_{y=0}=\varphi_1(\theta), \quad w_0|_{y=\theta}=0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w_n}{\partial\theta^2}=2\sum_{m=0}^{n-1}\left[\frac{\partial w_m}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w_{n-m-1}}{\partial y\,\partial\theta}-\frac{\partial w_m}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w_{n-m-1}}{\partial\theta^2}+\varkappa\frac{\partial^2 w_{n-m-1}}{\partial y^2}\right)\right]\quad(n=1,2,\ldots)$$

$$\sum_{m=0}^{n}\varepsilon^m w_m|_{y=\varepsilon\varphi_1(\theta)}=\varphi_1(\theta),\qquad \sum_{m=0}^{n}\varepsilon^m w_m|_{y=\theta}=0$$

Если в (2.1) ограничиться лишь выписанными членами, то, возвращаясь к размерным переменным, из (3.4) можно получить

$$u(x,t)=\frac{V_0}{G_0}(x-G_0t)+\frac{1}{2}\frac{a}{G_0^2}(x-G_0t)^2-\frac{V_0}{G_0}\left\{\frac{V_0}{G_0}(x-G_0t)+\right.$$
$$+\frac{a}{G_0^2}\left(\frac{3}{2}+\frac{\varkappa}{2}\right)(x-G_0t)^2+\frac{a^2}{V_0G_0^3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\varkappa}{4}\right)(x-G_0t)^3+$$
$$\left.+\frac{\varkappa}{2}\frac{V_0}{G_0}(x+G_0t)\left[\frac{a}{V_0G_0}(x-G_0t)+\frac{a^2}{2V_0^2G_0^2}(x-G_0t)^2\right]\right\}+$$
$$+\frac{V_0^2}{G_0^2}\left\{\frac{\varkappa}{2}\frac{a}{G_0^2}(x^2-G_0^2t^2)\left[3+2\varkappa+\left(\frac{7}{2}+3\varkappa\right)\frac{a}{V_0G_0}(x-G_0t)+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\varkappa}{2}\frac{a}{V_0G_0}(x+G_0t)+\frac{1}{3}\left(5+\frac{7}{2}\varkappa\right)\frac{a^2}{V_0^2G_0^2}(x-G_0t)^2+\frac{\varkappa a^2}{4V_0^2G_0^2}(x^2-G_0^2t^2)\right]+$$
$$+\frac{V_0}{G_0}(x-G_0t)+\left(3+\frac{5}{2}\varkappa+\varkappa^2\right)\frac{a}{G_0^2}(x-G_0t)^2+$$
$$+\left(\frac{5}{2}+\frac{13}{4}\varkappa+\frac{5}{4}\varkappa^2\right)\frac{a^2}{V_0G_0^3}(x-G_0t)^3+$$
$$\left.+\left(\frac{5}{8}+\frac{49}{48}\varkappa+\frac{25}{48}\varkappa^2\right)\frac{a^3}{V_0^2G_0^4}(x-G_0t)^4\right\}$$

Отсюда следует, что учет нелинейностей действительно приводит к уменьшению первоначального разрыва в отличие от линейной задачи (нулевое приближение); при этом отрицательность a способствует этому уменьшению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буренин А. А., Чернышов А. Д.* Ударные волны в изотропном упругом пространстве.– ПММ, 1978, т. 42, вып. 4, с. 711–717.
2. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейно-упругих средах.– ПММ, 1980, т. 44, вып. 6, с. 523–534.
3. *Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные и линейные переходные волновые процессы деформации термоупругих и упругих тел. Таллин: Ин-т кибернетики АН ЭССР, 1972. 174 с.
4. *Нигул У. К.* Отклонение решения квазилинейного волнового уравнения от решения линейного уравнения в области непрерывных первых производных.– ПММ, 1973, т. 37, вып. 3, с. 434–447.
5. *Нигул У. К.* Аналитическое выявление нелинейных эффектов при распространении и повторном отражении импульса с применением метода последовательного интегрирования линейных неоднородных волновых уравнений.– В кн.: Труды симпозиума «Нелинейные и тепловые эффекты при переходных волновых процессах». Т. 1. Горький–Таллин: Изд-е Горьковск. ун-та, 1973, с. 63–106.
6. *Буренин А. А., Лапыгин В. В.* Автомодельная задача об ударном нагружении упругого полупространства.– ПММ, 1979, т. 43, вып. 4, с. 722–729.
7. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.

Воронеж, Москва

Поступила в редакцию
13.I.1982