

УДК 539.3

ВИБРОРАЗОГРЕВ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

БЕРЕЗИН А. В.

В полимерных материалах, как известно, при циклических нагружениях вследствие механического гистерезиса наблюдается значительный разогрев [1–3]. Этот эффект присущ всем материалам, но в полимерных он наиболее значителен и опасен вследствие сильного уменьшения их твердости, прочности и сопротивления усталости с повышением температуры. Аналогичные явления имеют место и в композитных материалах, в частности с полимерной матрицей, и в конструкциях из таких материалов. Теоретические работы по исследованию виброзагрева композитов [4]¹ устанавливают соотношения для расчета температурных полей однонаправленных композитов с вязкоупругой матрицей, тогда как соотношения для расчета температурных полей и напряженно-деформированного состояния в более общих случаях гистерезисных потерь в слоистых композитных материалах не построены.

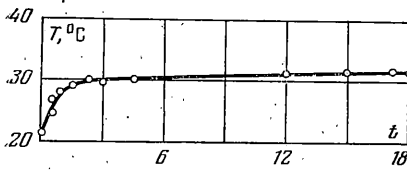
Следует отметить, что виброзагрев стеклопластиков достаточно полно исследован [5–10]. Эксперименты по изучению разогрева углепластика при циклическом нагружении проводились на образцах из однонаправленного углепластика, которые испытывались при переменном циклическом симметричном изгибе с частотой 25 Гц. При заданном уровне деформаций после начала действия циклической нагрузки температура, которая замерялась хромель-копелевой термопарой, монотонно возрастает, как показано на фиг. 1, и далее достигает постоянного значения, зависящего от напряжения в цикле при заданной частоте нагружения (время t в мин).

Зависимость максимальной температуры разогрева от напряжения (размерность — МПа) в цикле представлена на фиг. 2. Изменение температуры поверхности образца в процессе циклического нагружения приведено на фиг. 3. Уменьшение температуры разогрева при $N \geq 10^5$ циклов, вероятно, связано с уменьшением напряжения в цикле. Соответствующая кривая изменения жесткости приведена на фиг. 4 (P_T — текущее значение жесткости, P_0 — начальное).

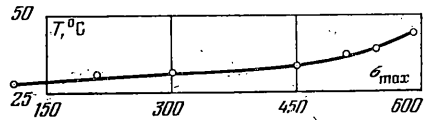
На фиг. 5 представлены зависимости упругих характеристик углепластиков от температуры испытания. Видно, что повышение температуры существенно влияет на упругие свойства углепластиков (кривая 1 — значение модуля упругости по направлению волокна, кривая 2 — поперек направления волокна, кривая 3 — значение модуля сдвига). Из результатов экспериментов следует, что продольный модуль углепластика в данном диапазоне изменения температуры практически не изменяется, а наблюдается существенное изменение поперечных и сдвиговых упругих свойств однонаправленного углепластика. Влияние повышенных температур на прочностные свойства углепластиков с различными схемами армирования исследовано в [11].

Большое значение в явлении разогрева при циклических нагрузках имеют гистерезисные потери. Эксперименты, проведенные на однонаправленном углепластике, направление волокна в котором составляет определенный угол с направлением приложения нагрузки, показывают, что при монотонном нагружении с разгрузками типичными диаграммами являются диаграммы, изображенные на фиг. 6. На участке OA диаграммы деформирования гистерезис практически отсутствует, т. е. нагружение и разгрузка идут по одной прямой. При напряжениях больших σ_d диаграмма деформирования становится нелинейной и при разгрузке из точки B до нуля появляется остаточная деформация OD . Вторичное нагружение из точки D дает кривую DEF , причем на участке DE разгрузка и нагрузка совпадают, т. е. при нагружении и разгрузке до точки E гистерезис отсутствует. Наклон кривой DEF к оси абсцисс в точке D меньше, чем кривой OA в точке O . Аналогично гистерезис практически отсутствует на участке BC кривой деформирования, а наклон к оси абсцисс на участке BC несколько меньше, чем на участке DE кривой деформирования. Такие диаграммы деформирования качественно совпадают с диаграммами деформирования дефектного материала при нагружении и разгрузке, учитывающей взаимодействие берегов трещин [11].

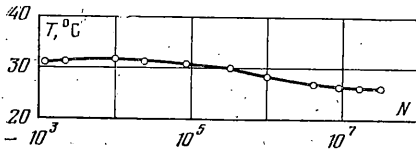
¹ См. также: Победра Б. Е. Тепловыделение в композиционных материалах: Тез. докл. V Всес. конф. по композитным материалам. М., Изд-во МГУ, 1981, вып. 2, с. 19.



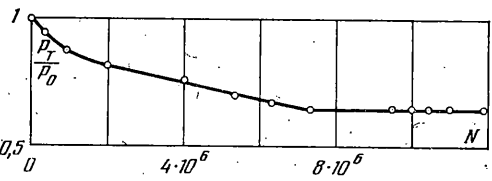
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

1. Постановка задачи о теплообразовании в случае диссипативных сред сводится к интегрированию уравнений, включающих в себя теплофизические и механические переменные и характеристики. Из законов термодинамики и механики сплошных сред можно получить [12] следующие определяющие соотношения

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl}\theta), \quad \sigma_{ij,j} + \rho F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \rho / dt = -\rho d\varepsilon_{kk} / dt$$

$$d\psi + s dT + W^* dt = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

$$T ds = dQ + W^* dt = (\lambda_{ij} T_{,j})_{,i} dt + W^* dt$$

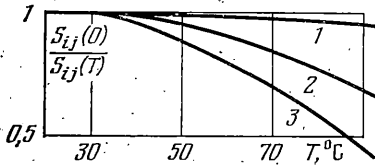
Здесь σ_{ij} — компоненты симметричного тензора напряжений, ε_{ij} — компоненты тензора малых деформаций, u_i — компоненты вектора смещений, F_{ij} — оператор связи между напряжениями и деформациями, F_i — компоненты вектора массовых сил, $\theta = T - T_0$ — разность между текущей температурой T и температурой недеформированного состояния T_0 , ψ — свободная энергия, s — энтропия, dQ — внешний приток тепла, W^* — функция рассеивания, λ_{ij} — тензор теплопроводности, α_{ij} — тензор коэффициентов термического расширения. Также предполагается, что справедлив закон теплопроводности Фурье и принимается гипотеза Дюгамеля — Неймана. Система (1.1) с соответствующими граничными и начальными условиями является замкнутой, если определены функции состояния s , ψ и W^* , либо функция состояния s , функция рассеивания W^* и конкретный вид оператора F_{ij} . Все эти величины не являются независимыми, они связаны пятым соотношением системы (1.1).

Рассмотрим композитный материал как эквивалентный анизотропный. Композиты в области умеренных температур обладают анизотропной теплопроводностью с некоторыми эффективными теплофизическими характеристиками, определяемыми структурой материала, объемным содержанием и свойствами компонентов. Поскольку композиты состоят, как правило, из однонаправленных слоев, то необходимо определение теплофизических характеристик слоя. Рассмотрим один из таких слоев. Методы расчета тензора теплопроводности однонаправленного композита регулярного строения достаточно хорошо разработаны [13, 14], приведены также оценки для композитов нерегулярного строения [14, 15]. Если выберем оси координат 1, 2, 3 параллельно волокну, перпендикулярно волокну в плоскости армирования и перпендикулярно плоскости армирования, то тензор теплопроводности в этой системе координат имеет вид [13, 15]:

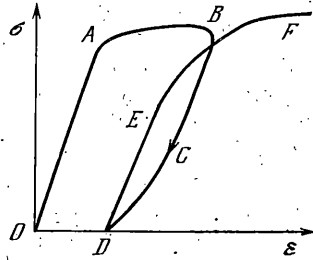
$$\lambda_{ij} = \|\lambda_{11}, 0, 0; 0, \lambda_{22}, \lambda_{23}; 0, \lambda_{32}, \lambda_{33}\|$$

В предположении изотропии в плоскости 23, что верно при случайной укладке волокон $\lambda_{22} = \lambda_{33}$, $\lambda_{23} = \lambda_{32} = 0$.

Величина коэффициента теплопроводности в направлении армирования определяется из правила смесей $\lambda_{11} = \lambda_a v_1 + \lambda_m v_2$, где λ_a , λ_m — коэффициенты теплопроводности волокна и матрицы, v_1 и v_2 — объемные доли волокна и матрицы. Для коэффициента теплопроводности λ_{33} получены различные выражения для различных структур укладки волокон [14].



Фиг. 5



Фиг. 6

В частности, результаты численных расчетов для различных средних квадратичных отклонений случайного распределения волокна приводит к формуле [16]:

$$\lambda_{33}/\lambda_m = \{1 - v_1(1 - \lambda_m/\lambda_a) - 0,045(\lambda_a/\lambda_m - 1)^{1/2} [1 - 0,42|v_1 - 0,1|] (1 + 57\sigma^2 v_1^{2/3})\}^{-1}$$

где σ — параметр закона нормального распределения.

Тензор теплопроводности слоя в системе координат композита $x y z$, повернутой на угол α по отношению к системе координат монослоя, имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_x &= (\lambda_{11} - \lambda_{33}) \cos^2 \alpha + \lambda_{33} \\ \lambda_y &= (\lambda_{33} - \lambda_{11}) \cos^2 \alpha + \lambda_{11} \\ \lambda_{xy} &= \lambda_{yx} = 1/2 (\lambda_{11} - \lambda_{33}) \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (1.2)$$

Определение коэффициентов термического расширения для сред с регулярной структурой приведено в [13], имеются также экспериментальные работы по определению коэффициентов термического расширения композитов [16—18]. Из результатов этих работ следует, что тензор термического расширения имеет структуру

$$\alpha_{ij} = \|\alpha_{11}, 0, 0; 0, \alpha_{22}, \alpha_{23}; 0, \alpha_{32}, \alpha_{33}\|, \alpha_{23} = \alpha_{32}$$

где компоненты тензора термического расширения выражаются через коэффициенты термического расширения матрицы и волокна и упругие характеристики композита, матрицы и волокна. Преобразование к системе координат композита $x y z$ тензора α_{ij} осуществляется обычным образом. Если связующее имеет вязкоупругие свойства, то упругие постоянные необходимо заменить соответствующими операторами [13].

Для монослоя композита, осредняя по объему в предположениях $\langle T_a \rangle = \langle T_m \rangle = T$, $\langle \psi \rangle = v_1 \langle \psi_a \rangle + v_2 \langle \psi_m \rangle$, $\langle s \rangle = v_1 \langle s_a \rangle + v_2 \langle s_m \rangle$ и $\mu_i = \mu_i(\langle \epsilon_{kl}^T \rangle)$, из системы (1.1) получим

$$\begin{aligned} -\langle W^* \rangle &= \frac{\partial \psi}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial t}, \quad F'_{pq}(\langle \epsilon_{kl}^T \rangle) = \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \langle \epsilon_{pq}^T \rangle}, \\ \langle \sigma_{ij} \rangle &= F'_{ij}(\langle \epsilon_{kl}^T \rangle), \quad \langle \epsilon_{kl}^T \rangle = \langle \epsilon_{kl} \rangle - \alpha_{kl} \theta \end{aligned} \quad (1.3)$$

где μ_i — термодинамические параметры состояния [12].

Из первого и второго законов термодинамики следует [12]: $\langle s \rangle = -\alpha_{ij} F'_{ij} (\langle \epsilon_{kl}^T \rangle) + \rho c_p \ln(1 + \theta/T_0)$, $\rho = v_1 \rho_a + v_2 \rho_m$, $c_p = v_1 c_a + v_2 c_m$, где c_p — теплоемкость тела. Уравнение притока тепла имеет вид

$$T \left[\rho c_p \ln \frac{T}{T_0} \right]' + T [\alpha_{ij} F'_{ij} (\langle \epsilon_{kl}^T \rangle)]' = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \langle W^* \rangle$$

$$F'_{pq} = [v_1 a_{ijkl}^{(a)} b_{ijpq}^{(a)} + v_2 a_{ijkl}^{(m)} b_{ijpq}^{(m)}] F_{kl} \quad (1.4)$$

Поскольку уравнение (1.4) в правой части содержит член $\langle W^* \rangle$, который в слоистых композитах зависит от ориентации слоя относительно системы координат композита xuz и является различным для различных ориентаций слоев, то для слоистого композита необходимо соотношение (4) писать для каждого слоя композита. Соответственно на границе раздела слоев необходимо задать граничные условия

$$T^{(h)} = T^{(h-1)}, \quad \lambda_z^{(h)} \partial T^{(h)} / \partial z = \lambda_z^{(h-1)} \partial T^{(h-1)} / \partial z \quad (1.5)$$

т. е. равенство температур и тепловых потоков на границе раздела слоев. Для слоистого композита, находящегося в условиях плоского напряженного состояния, можно воспользоваться теорией слоистых пластин и предположить, что справедлива гипотеза Кирхгофа — Лява для всего пакета в целом. В этом случае, присоединяя к уравнениям притока тепла уравнения равновесия и связь между напряжениями и деформациями, получим замкнутую систему уравнений для слоистого композита. К этим граничным условиям необходимо добавить еще условия на поверхности композита и начальные условия:

$$T = T^* \text{ на } S_1; \quad \lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} = -\beta(T - T_1) \text{ на } S_2; \quad T(x_i, 0) = F(x_i) \quad (1.6)$$

где $S_1 + S_2 = S$ — поверхность тела, β — коэффициент теплообмена.

2. Теперь следует определить функцию рассеивания W^* в композитной среде. Для компонентов композита примеры построения диссипативных функций приведены в [12]. В предположении, что свободная энергия $\psi(T, \mu_i) = \psi_0(T) + \sum \mu_i^2$ ($i=1, 2, \dots, N$), функция рассеивания выражается в виде [12]:

$$W^* = \sigma_{ij} (\epsilon_{ij} - \alpha_{ij} \theta) - \left[\sum_{i=1}^N \mu_i^2 \right] \quad (2.1)$$

В этой работе рассмотрены примеры построения диссипативных функций для линейных вязкоупругих, упругих и пластических сред. Для вычисления диссипативных потерь, идущих на разогрев композита, рассмотрим выражение

$$A' = \frac{\omega}{2\pi V} \int_0^{2\pi/\omega} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \cdot dV dt \quad (2.2)$$

Следует отметить, что подынтегральное выражение в правой части входит в выражения для функции рассеивания (2.1). Предположим, что композит является двухфазным. Тогда запишем

$$\frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \cdot dV = \frac{1}{V} \int_{V_1} \sigma_{ij}^{(a)} \epsilon_{ij}^{(a)} \cdot dV + \frac{1}{V} \int_{V_2} \sigma_{ij}^{(m)} \epsilon_{ij}^{(m)} \cdot dV \approx$$

$$\approx \frac{V_1}{V} \langle \sigma_{ij}^{(a)} \rangle \langle \epsilon_{ij}^{(a)} \rangle + \frac{V_2}{V} \langle \sigma_{ij}^{(m)} \rangle \langle \epsilon_{ij}^{(m)} \rangle = v_1 \langle \sigma_{ij}^{(a)} \rangle \langle \epsilon_{ij}^{(a)} \rangle + v_2 \langle \sigma_{ij}^{(m)} \rangle \langle \epsilon_{ij}^{(m)} \rangle \quad (2.3)$$

где индексы (a) и (m) относятся к волокну и матрице соответственно. Используя коэффициенты концентрации для напряжений и деформаций, из (2.3) получим

$$\frac{1}{V} \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \cdot dV = v_1 a_{ijkl}^{(a)} b_{ijpq}^{(a)} \langle \sigma_{kl} \rangle \langle \varepsilon_{pq} \rangle + v_2 a_{ijkl}^{(m)} b_{ijpq}^{(m)} \langle \sigma_{kl} \rangle \langle \varepsilon_{pq} \rangle =$$

$$= [v_1 a_{ijkl}^{(a)} b_{ijpq}^{(a)} + v_2 a_{ijkl}^{(m)} b_{ijpq}^{(m)}] \langle \sigma_{kl} \rangle \langle \varepsilon_{pq} \rangle \quad (2.4)$$

где a_{ijkl} и b_{ijpq} — коэффициенты концентрации для напряжений и деформаций соответственно.

В предположении равенства температур в фазах композита получим, что $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = S_{ijkl}^T \langle \sigma_{kl} \rangle + \alpha_{ij} \theta + S_{ijkl}^* \langle \sigma_{kl} \rangle + \alpha_{ij}^* \theta$. Тогда выражение (2.4) можно записать в виде

$$\frac{1}{V} \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \cdot dV = [v_1 a_{ijkl}^{(a)} b_{ijpq}^{(a)} + v_2 a_{ijkl}^{(m)} b_{ijpq}^{(m)}] \{ \langle \sigma_{kl} \rangle \langle \sigma_{mn} \rangle S_{pqmn}^T + \alpha_{pq} \langle \sigma_{kl} \rangle \theta +$$

$$+ S_{pqmn}^* \langle \sigma_{kl} \rangle \langle \sigma_{mn} \rangle + \alpha_{pq}^* \langle \sigma_{kl} \rangle \theta \}$$

где S_{pqmn}^T — податливости композита при постоянной температуре. Для гармонического нагружения $\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle \sigma_{ij}^0 \rangle \cos \omega t + \langle \sigma_{ij}^* \rangle$, и за один цикл в предположении постоянства температуры в цикле получим

$$\int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{V} \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \cdot dV dt = [v_1 a_{ijkl}^{(a)} b_{ijpq}^{(a)} + v_2 a_{ijkl}^{(m)} b_{ijpq}^{(m)}] \left\{ \int_0^{2\pi/\omega} S_{pqmn}^T \langle \sigma_{kl} \rangle \frac{d\langle \sigma_{mn} \rangle}{dt} dt +$$

$$+ \Delta \alpha_{pq} \langle \sigma_{kl}^* \rangle \theta - \theta \int_0^{2\pi/\omega} \alpha_{pq} \langle \sigma_{kl} \rangle dt + \int_0^{2\pi/\omega} S_{pqmn}^* \langle \sigma_{kl} \rangle \langle \sigma_{mn} \rangle dt \right\}$$

Тогда, учитывая выражение для рассеивания [12], получим для k -го слоя композита

$$\langle W^* \rangle^{(k)} = B_{klpq}^{(k)} \frac{A\omega}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi/\omega} \langle \sigma_{kl} \rangle \left[\frac{d(S_{pqmn}^T \langle \sigma_{mn} \rangle)}{dt} - \right. \right.$$

$$\left. - S_{rs pq}^{-1}(0) B_{ijrs}^{-1}(0) \frac{d}{dt} (B_{ijmn} \langle \sigma_{mn} \rangle) \right] dt \right\}^{(k)}$$

где A — температурный эквивалент работы, $B_{ijrs}^{-1}(0)$ — мгновенное значение тензора B_{ijrs}^{-1} , $S_{rs pq}^T(0)$ — мгновенное значение податливостей. Для вязкоупругого тела S_{pqmn}^T являются операторами. Для нелинейного композита, имеющего податливости в нелинейной области A_{ijkl}^* и упругую разгрузку²

$$\langle W^* \rangle^{(k)} = B_{klpq}^{(k)} \frac{A\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \langle \sigma_{kl}^{(k)} \rangle \frac{d[A_{pqmn}^* (\langle \sigma_{mn} \rangle - \langle \sigma_{mn}^* \rangle)]}{dt} dt$$

$$B_{klpq} = v_1 a_{ijkl}^{(a)} b_{ijpq}^{(a)} + v_2 a_{ijkl}^{(m)} b_{ijpq}^{(m)}$$

² См. Березин А. В., Гинко И. Б., Мазмутов И. М. Деформационные свойства конструкционных углепластиков при статическом нагружении: Тез. докл. IV Всес. симпоз. по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск, Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1982, с. 115–116.

Аналогично можно написать выражение для $\langle W^* \rangle^{(h)}$ в случае среды с трением [11]. В общем случае можно ввести коэффициенты диссипации энергии, как это сделано в [19] в случае изотропного тела, и получить выражение коэффициентов диссипации для материала, обладающего заданными свойствами. Тогда

$$\langle W_n^* \rangle = 1/2 S_{ijkl}^{T(h)} \psi_{klhl}^{(h)} \langle \sigma_{ij}^{o(2n)(h)} \rangle \langle \sigma_{kl}^{o(2n)(h)} \rangle \quad (2.5)$$

где $\langle \sigma_{ij}^{o(2n)} \rangle$ — циклические напряжения. Сделаем также предположение, что диссипация энергии происходит только в матрице. В этом случае

$$\langle W_n^* \rangle^{(h)} = 1/2 v_2 S_{ijkl}^{T(m)(h)} \psi_{klhl}^{(m)(h)} \langle \sigma_{ij}^{l(2n)(h)} \rangle \langle \sigma_{kl}^{l(2n)(h)} \rangle \quad (2.6)$$

В формулах (2.5) и (2.6) в выражении $S_{ijkl}^T \psi_{klhl}$ суммирование не производить и σ_{ij}^l означает циклические напряжения в матрице. Поведение монослоя композита предполагается упругим, и циклические напряжения связаны с компонентами тензора напряжений в конце полуцикла с номером $2n$ соотношением $\sigma_{ij}^{o(2n)} = \sigma_{ij}^{(2n-d)} - \sigma_{ij}^{(2n)}$ [19].

Сравнивая (2.5) и (2.6), получим связь коэффициентов диссипации в композите и в матрице

$$S_{ijkl}^T \psi_{klhl} = v_2 S_{mnpq}^{T(m)} \psi_{pqpq}^{(m)} b_{mnij}^{(m)} b_{pqkl}^{(m)} \quad (2.7)$$

при условии идеального контакта на границе раздела волокно — матрица. В частности, для одноосного циклического нагружения вдоль направления армирования имеем $\psi_{11}/E_{11} \approx v_2 (\psi^{(m)}/E^{(m)}) (E^{(m)}/E_{11})^2$, $s_{1111} = 1/E_{11}$ при простейшем предположении выполнения правила смесей для однонаправленного композита. Принимая для $\psi_1^{(m)}/E^{(m)}$ используемые для полимеров [19, 20] выражения, получим

$$\frac{\psi_1}{E_{11}} \approx v_2 \frac{\psi_0^{(m)}}{E_0^{(m)}} \frac{1}{\omega^0} \exp[\beta_1(T - T_0)] \left(\frac{E^{(m)}}{E_{11}} \right)^2$$

или

$$\frac{\psi_1}{E_{11}} \approx v_2 \frac{\psi_0^{(m)}}{E_0^{(m)}} \frac{1}{\omega^0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\gamma} \left(\frac{E^{(m)}}{E_{11}} \right)^2$$

для несжимаемой полимерной матрицы. Аналогично получают оценки и для других коэффициентов диссипации.

Рассмотрим влияние повреждений на виброразогрев композитных материалов. Введем, следуя [21, 22], тензор плотности трещин и будем считать, что свободная энергия зависит от плотности микротрещин. Тогда в системе (1.1) первое и четвертое соотношения изменятся и будут иметь вид

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= F_{ij}^o(\langle \varepsilon_{kl}^T \rangle, p_{kl}) \\ \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial T} dT + \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \langle \varepsilon_{pq}^T \rangle} d\langle \varepsilon_{pq}^T \rangle + \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial t} dt + \\ + \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial p_{ij}} \frac{dp_{ij}}{dt} dt + \langle s \rangle dT + \langle W^* \rangle dt &= F_{pq}'(\langle \varepsilon_{ij}^T \rangle, p_{ij}) d\langle \varepsilon_{pq} \rangle \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial T} - \alpha_{ij} F'_{ij} (\langle \varepsilon_{kl} \rangle, p_{kl}) &= - \langle s \rangle \\ - \langle W^* \rangle &= \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial t} + \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial p_{ij}} \frac{dp_{ij}}{dt} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из второго уравнения (2.8) можно заключить, что рассеяние связано и с накоплением повреждений, и с временными эффектами. Для случая неизменяющегося со временем тензора плотности трещин $dp_{ij}/dt=0$ и второе слагаемое в правой части второго уравнения (2.8) равно нулю. В противном случае должны быть известны кинетические зависимости типа $dp_{ij}/dt=L_{ij}(\langle \sigma_{kl} \rangle, p_{kl}, T)$, где L_{ij} — оператор. При циклическом нагружении кинетические уравнения для одиночных трещин в металлах приведены в [23], а для вязкоупругих тел — в [24]. Поскольку для функции рассеивания, учитывая (2.8) и результаты [12], справедливо выражение

$$W^* = \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} - \alpha_{ij} \theta) - \left[\sum_{i=1}^N \mu_i^2 \right] - \frac{\partial \psi}{\partial p_{ij}} p_{ij}$$

то функция рассеивания композита имеет вид

$$\langle W^* \rangle = B_{klpq} \frac{A\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \langle \sigma_{kl} \rangle \frac{d[(S_{ijpq}^T(\langle \sigma_{kl} \rangle, p_{ij}) - S_{ijpq}^T(0, p_{ij})) \langle \sigma_{ijq} \rangle]}{dt} dt \quad (2.9)$$

Разность податливостей в подынтегральном выражении здесь берется при одном и том же тензоре плотности трещин. Для сред, где происходит трение берегов трещин, $S_{ijkl}^T(\langle \sigma_{ij} \rangle, p_{ij}) - S_{ijkl}^T(0, p_{ij})$ вычисляется только в той части дефектного материала, где не происходит раскрытия трещин. В части объема тела, где происходит раскрытие трещин, перехода работы, затраченной на преодоление силы трения в тепло, не происходит. В этом случае наблюдается только изменение упругих постоянных, связанное с раскрытием трещин. Отсюда следует, что, несмотря на наблюдаемые повреждения, существуют напряжения, которые не приводят к виброразогреву материала при циклических нагрузках.

В частности, на участках *BC* и *DE* кривой деформирования (фиг. 6) отсутствует гистерезис и подынтегральное выражение (2.9) равно нулю и соответственно $\langle W^* \rangle = 0$. Напряжения, определяющие точку *E* и *C* на кривой деформирования, выражаются через коэффициенты трения и силы сцепления. Аналогичный результат получен в [10], где отмечается отсутствие разогрева при некоторых уровнях напряжений.

3. Рассмотрим плоское напряженное состояние монослоя; тогда в главных осях симметрии соотношение для W^* в общем случае будет

$$W_n^* = 1/2 [S_{11} \psi_1 \sigma_1^{(2n)2} + S_{22} \psi_2 \sigma_2^{(2n)2} + 2S_{12} \psi_{12} \sigma_1^{(2n)} \sigma_2^{(2n)} + S_{66} \psi_6 \tau_{12}^{(2n)2}],$$

$$\psi_{12} = 1/2 (\psi_1 + \psi_2)$$

где S_{ij} — коэффициенты матрицы податливости в главных осях симметрии монослоя, ψ_i — коэффициенты диссипации энергии. Поведение монослоя композита предположим упругим, тогда аналогично изотропному случаю

$$[19] \text{ можно записать } \varepsilon_i^{(2n)} = S_{ij} \sigma_j^{(2n)}, \quad \sigma_i^{(2n)} = Q_{ij} \varepsilon_j^{(2n)}$$

В системе координат *xy* композита, повернутой на угол α по отношению к главным осям симметрии, имеем

$$W_n^* = 1/2 \varepsilon_x^{(2n)2} [Q_{11} \psi_1 \cos^4 \alpha + Q_{22} \psi_2 \sin^4 \alpha + (1/2 Q_{12} \psi_{12} + Q_{66} \psi_6) \sin^2 2\alpha] +$$

$$\begin{aligned}
& +^{1/2} \varepsilon_y^{(2n)2} [Q_{11} \psi_1 \sin^4 \alpha + Q_{22} \psi_2 \cos^4 \alpha + (^{1/2} Q_{12} \psi_{12} + Q_{66} \psi_6) \sin^2 2\alpha] + \\
& +^{1/4} (\varepsilon_x^{(2n)} \varepsilon_y^{(2n)}) [(Q_{11} \psi_1 + Q_{22} \psi_2 + 4Q_{66} \psi_6) \sin^2 2\alpha + 4Q_{12} \psi_{12} (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha)] + \\
& +^{1/2} \varepsilon_{xy}^{(2n)2} [(Q_{11} \psi_1 + Q_{22} \psi_2 - 2Q_{12} \psi_{12}) \sin^2 2\alpha + 4Q_{66} \psi_6 \cos^2 2\alpha] + \\
& + \varepsilon_x^{(2n)} \varepsilon_{xy}^{(2n)} [Q_{11} \psi_1 \cos^2 \alpha - Q_{22} \psi_2 \sin^2 \alpha - (Q_{12} \psi_{12} + 2Q_{66} \psi_6) \cos 2\alpha] \sin 2\alpha + \\
& + \varepsilon_y^{(2n)} \varepsilon_{xy}^{(2n)} [Q_{11} \psi_1 \sin^2 \alpha - Q_{22} \psi_2 \cos^2 \alpha + (Q_{12} \psi_{12} + 2Q_{66} \psi_6) \cos 2\alpha] \sin 2\alpha
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Напряженно-деформированное состояние в слое определяется по формулам $\sigma_i^{(2n)} = Q_{ij} \varepsilon_j^{(2n)}$ при учете равенства $\varepsilon_i^{(2n)} = \varepsilon_i^{*(2n)} + z \kappa_i^{(2n)}$

где $\kappa_i^{(2n)}$ — кривизны и кручение срединной поверхности. В предположении, что температура в течение одного цикла не изменяется, можно установить, что между циклическими усилиями, моментами и деформациями имеет место соотношение

$$\begin{aligned}
& \left\| \begin{array}{l} N_i^{(2n)} \\ \dots \\ M_i^{(2n)} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{l} A_{ij} \\ \dots \\ B_{ij} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} \varepsilon_j^{*(2n)} \\ \dots \\ \kappa_j^{(2n)} \end{array} \right\| \\
A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)} dz, \quad B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)} z dz, \quad D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)} z^2 dz
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} — эффективные жесткости композита при растяжении, сжатии и сдвиге, коэффициенты взаимного влияния и коэффициенты жесткости при кручении и изгибе, $N_i^{(2n)}$ — результирующие циклические усилия, $M_i^{(2n)}$ — результирующие циклические моменты. Результирующие циклические усилия и моменты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial N_x^{(2n)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{(2n)}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}^{(2n)}}{\partial x} + \frac{\partial N_y^{(2n)}}{\partial y} = 0 \\
& \frac{\partial^2 M_x^{(2n)}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{(2n)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{(2n)}}{\partial y^2} + q^{(2n)} = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

и соответствующим граничным условиям на краю пластины [27] ($q^{(2n)} = -q^{(2n-1)} - q^{(2n)}$ — циклическая внешняя нагрузка).

Распределение температур в k -м слое композита определяется в этом случае по уравнению

$$\begin{aligned}
& c_p^{(k)} \rho^{(k)} \frac{\partial T^{(k)}}{\partial t} + T^{(k)} \alpha_i^{(k)} Q_{ij}'^{(k)} \varepsilon_j^{(k) \circ (2n)} + T^{(k)} \alpha_i^{(k)} Q_{ij}'^{(k)} \varepsilon_j^{(k) \circ (2n)} + \\
& + T^{(k)} \alpha_i^{(k)} Q_{ij}'^{(k)} \varepsilon_j^{(k) \circ (2n)} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{(k)} \frac{\partial T^{(k)}}{\partial x_j} \right) + W^{*(k)}, \\
& W^{*(k)} = \sum_n W_n^{*(k)}, \quad Q_{ij}^{(k)} = Q_{ij}^{(k)} (T^{(k)})
\end{aligned} \tag{3.4}$$

с граничными условиями (1.5) и начальными условиями (1.6).

Таким образом получена система уравнений (3.3), (3.4), позволяющая описать виброразогрев слоистых композитов. Одним из возможных методов решений этой системы является метод последовательных приближе-

ний, когда в начальном приближении задается однородное распределение температур во всех слоях, определяется напряженно-деформированное состояние в слоях по системе (3.3), затем определяется функция рассеяния в слоях по выражению (3.1) и определяется распределение температур по уравнению (3.4). После определения поля температур определяются жесткости композита и затем опять решается система (3.3) для определения усилий и уравнение (3.4) для отыскания температурного поля и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рагнер С. И., Коробов В. И. Саморазогрев пластмасс при циклической деформации.— Механ. полимеров, 1965, № 3, с. 93–100.
2. Олдырев П. П. Определение усталостной долговечности пластмасс по температуре саморазогрева.— Механ. полимеров, 1967, № 1, с. 111–117.
3. Регель В. Р., Лексовский А. М., Слаучер А. И., Тамуж В. П. Разрушение и усталость полимеров.— Механ. полимеров, 1972, № 4, с. 597–611.
4. Ван Фо Фы Г. А. Однородные и армированные пластики при периодических воздействиях.— Прикл. механика, 1966, т. 2, вып. 8, с. 94–102.
5. Олдырев П. П., Тамуж В. П. О разрушении стеклопластика при циклическом растяжении — сжатии.— Механ. полимеров, 1971, № 4, с. 654–662.
6. Ищенко И. И., Петренко И. П. Некоторые вопросы усталостной прочности конструкционных стеклопластиков.— В кн.: Армированные материалы и конструкции из них. Киев: Наук. думка, 1970, с. 167–183.
7. Dagan C. K. H. Fatigue failure in graphite fibre and glass fibre polymer composites.— J. Mater. Sci., 1975, v. 10, No. 10, p. 1665–1670.
8. Кушжин В. П. Некоторые особенности усталостной прочности стеклопластиков.— Упругость и неупругость: Сб. статей. М.: Изд-во МГУ, 1971, вып. 2, с. 253–260.
9. Трунин Ю. П. Влияние плотности упаковки стеклоткани и условий нагружения на выносливость стеклотекстолита.— Тр. ЦАГИ, 1972, вып. 1427, с. 114–120.
10. Тамуж В. П., Куксенко В. С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1978. 294 с.
11. Работнов Ю. Н., Березин А. В., Гинко И. Б. и др. Деформационные и прочностные свойства косягольно армированных углепластиков при различных условиях нагружения.— Механ. композитн. материалов, 1980, № 6, с. 1000–1009.
12. Победра Б. Е. О связанных задачах механики сплошной среды.— Упругость и неупругость: Сб. статей. М.: Изд-во МГУ, 1971, вып. 2, с. 224–253.
13. Ван Фо Фы Г. А. Теория армированных материалов. Киев: Наук. думка, 1971. 232 с.
14. Progelhof R. C., Throne J. L., Ruetsch R. R. Methods for predicting the thermal conductivity of composite systems: a review.— Polymer Engng and Sci., 1976, v. 16, No. 9, p. 615–625.
15. Юдин В. М. Распространение тепла в стеклопластиках.— Тр. ЦАГИ, 1970, вып. 1267. 41 с.
16. Rogers K. F., Phillips L. N., Kingston-Lee D. M., Yates B., Overy M. J., Sargent J. P., McCalla B. A. The thermal expansion of carbon fibre-reinforced plastics. Pt I. The influence of fibre type and orientation.— J. Mater. Sci., 1977, v. 12, No. 4, p. 718–733.
17. Yates B., McCalla B. A., Sargent J. P., Rogers K. F., Kingston-Lee D. M., Phillips L. N. The thermal expansion of carbon fibre reinforced plastic. Pt 4. Ply multidirectional effects.— J. Mater. Sci., 1978, v. 13, No. 10, p. 2226–2232.
18. Dootson M., Sargent J. P., Wostenholm G. H., Yates B. Time- and temperature-dependent effects in the thermal expansion characteristics of carbon fibre-reinforced plastics.— Composites, 1980, v. 11, No. 4, p. 73–78.
19. Москвитин В. В. Сопроотивление вязкоупругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, 1972. 327 с.
20. Варенблатт Г. И., Козырев Ю. И., Малинин Н. И. и др. О виброполучести полимерных материалов.— ПМТФ, 1965, № 5, с. 68–75.
21. Салганик Р. Л. Механика тел с большим числом трещин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4, с. 149–158.
22. Неймарк О. Б. О деформационных свойствах и макроскопической кинетике разрушения полимеров с субмикротрещинами.— Механ. композитн. материалов, 1981, № 1, с. 16–22.
23. Hoerrner D. W., Krupp W. E. Prediction of component life by application of fatigue crack growth knowledge.— Eng. Fract. Mech., 1974, v. 6, No 1, p. 47–70.
24. Каминский А. А. Исследования в области механики разрушения вязкоупругих тел.— Прикл. механика, 1980, т. 16, № 9, с. 3–26.
25. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.X.1983