

УДК 539.3

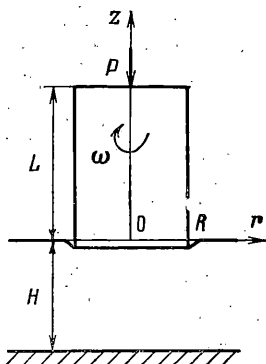
# ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ О ДАВЛЕНИИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ШТАМПА НА СЛОЙ

ГРИЛИЦКИЙ Д. В., ОКРЕПКИЙ Б. С.

Рассматривается осесимметричная контактная задача термоупругости о давлении вращающегося жесткого крутового цилиндрического штампа конечной длины с плоским основанием на изотропный слой, покоящийся на жестком гладком основании. Предполагается, что на площадке контакта выделяется тепло, количество которого пропорционально коэффициенту трения, скорости вращения и нормальному контактному напряжению. Тепловой контакт штампа со слоем неидеальный. Между свободными поверхностями рассматриваемой системы тел и окружающей средой происходит теплообмен по закону Ньютона. Предложен способ определения контактного напряжения и температурных полей в соприкасаемых телах.

Контактная задача термоупругости о давлении штампа полубесконечной длины на полупространство в предположении, что тепловой контакт тел идеальный, а их свободные поверхности теплоизолированы, исследована в [4].

1. Пусть жесткий цилиндрический штамп длины  $L$  и радиуса  $R$  с плоским основанием вдавливается силой  $P$  в изотропный слой толщины  $H$ , лежащий на жестком гладком основании. Предполагается, что штамп вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  относительно оси симметрии. За счет трения на площадке контакта выделяется тепло, количество которого пропорционально скорости  $\omega r$ , коэффициенту трения  $k_0$  и контактному напряжению  $\sigma_z(r)$ . Тепловыделение на площадке контакта приводит к появлению тепловых потоков, направленных внутрь



Фиг. 1

слоя и штампа. Поверхность слоя вне площадки контакта свободна от внешних усилий. На площадке контакта касательные напряжения  $\tau_{rz}=0$ , а  $\tau_{z\theta}$  пропорциональны напряжению  $\sigma_z(r)$ . Тепловой контакт между телами предполагается неидеальным. На свободных поверхностях цилиндра и слоя происходит теплообмен с внешней средой по закону Ньютона.

При сделанных предположениях требуется определить контактные напряжения под штампом и температурные поля в соприкасаемых телах.

Для решения задачи введем цилиндрическую систему координат  $r, \theta, z$  с плоскостью  $z=0$ , совпадающей с верхней поверхностью слоя, и осью  $z$ , направленной внутрь штампа по его оси симметрии (фиг. 1).

Все величины (напряжения, смещения, температура, упругие постоянные, коэффициенты теплопроводности и теплообмена, коэффициенты линейного температурного расширения), относящиеся к слою, обозначим верхним индексом (1); аналогичные величины для цилиндрической области записываются без верхних индексов.

Таким образом, поставленная задача решается при следующих граничных условиях:

$$\partial T / \partial z + H_1 T = 0 \quad (0 \leq r < R, z = L) \quad (1.1)$$

$$\partial T / \partial r + H_2 T = 0 \quad (r=R, 0 \leq z < L) \quad (1.2)$$

$$\lambda_z^{-1} \partial T / \partial z - \lambda_z \partial T / \partial z = \omega k_0 r \sigma_z^{-1}(r) / J$$

$$\lambda_z^{-1} \partial T^1 / \partial z = h_0 (T - T^1) \quad (0 \leq r < R, z=0) \quad (1.3)$$

$$\partial T^1 / \partial z + H_2^{-1} T^1 = 0 \quad (R \leq r < \infty, z=0)$$

$$\partial T^1 / \partial z + H_1^{-1} T^1 = 0 \quad (0 \leq r < \infty, z=-H) \quad (1.4)$$

$$u_z^{-1} = -\varepsilon \quad (0 \leq r < R, z=0), \quad \sigma_z^{-1} = 0 \quad (R < r < \infty, z=0) \quad (1.5)$$

$$\tau_{rz}^{-1} = 0 \quad (0 \leq r < \infty, z=0), \quad u_z^{-1} = 0, \quad \tau_{rz}^{-1} = 0 \quad (0 \leq r < \infty, z=-H) \quad (1.6)$$

Здесь  $H_i$ ,  $H_i^{-1}$  ( $i=1, 2$ ) и  $\lambda_z$ ,  $\lambda_z^{-1}$  — коэффициенты теплообмена и теплопроводности,  $h_0$  — контактная проводимость,  $\varepsilon$  — величина вертикального смещения штампа,  $J$  — механический эквивалент тепла.

2. Известно [2], что в осесимметричном случае термоупругий потенциал  $\varphi$  и температурное поле  $T$  для изотропного тела определяются из уравнений

$$\nabla^2 \varphi = \alpha_T (1 + \sigma) T / (1 - \sigma), \quad \nabla^2 T = 0 \quad (2.1)$$

а температурные напряжения и смещения выражаются через  $\varphi$  по формулам

$$u_z^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \sigma_z^0 = -2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), \quad \tau_{rz}^0 = 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} \quad (2.2)$$

где  $\alpha_T$  — коэффициент линейного температурного расширения,  $\mu$ ,  $\sigma$  — модуль сдвига и коэффициент Пуассона.

Для определения температурного поля в слое введем трансформанту Ханкеля функции  $T^1(r, z)$  нулевого порядка

$$\bar{T}_0^{-1}(\xi, z) = \int_0^\infty r T^1(r, z) J_0(\xi r) dr \quad (2.3)$$

при помощи которой, согласно второму уравнению (2.1), находим выражение для  $T^1(\rho, \xi)$  через две произвольные функции  $\varphi_1(\eta)$  и  $\varphi_2(\eta)$ :

$$T^1(\rho, \xi) = \int_0^\infty [\varphi_1(\eta) e^{\eta \xi} + \varphi_2(\eta) e^{-\eta \xi}] J_0(\eta \rho) d\eta \quad (2.4)$$

где  $J_0(\eta \rho)$  — функция Бесселя первого рода действительного аргумента,  $\rho = r/R$ ,  $\xi = z/R$ .

Температурное поле в цилиндре находим методом Фурье. Общее решение имеет вид

$$T(r, z) = A_0 z + B_0 + D_0 (r^2 - 2z^2) + \sum_{k=1}^\infty J_0(\beta_k r) (A_k \operatorname{sh} \beta_k z + B_k \operatorname{ch} \beta_k z) +$$

$$+ \sum_{k=1}^\infty I_0(\gamma_k r) (C_k \sin \gamma_k z + D_k \cos \gamma_k z), \quad \beta_k = \frac{\mu_k}{R}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{R} \quad (2.5)$$

где  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$ ,  $D_k$  — произвольные постоянные,  $I_0(\gamma_k r)$  — функция Бесселя первого рода мнимого аргумента,  $\beta_k$ ,  $\gamma_k$  — собственные значения, определяемые из граничных условий,  $\mu_k$  — корни уравнения  $J_1(\mu) = 0$ .

Термоупругий потенциал  $\varphi$  определяется из первого уравнения (2.1). Частное решение примем в виде

$$\varphi(\rho, \xi) = \frac{1}{2} \frac{1 + \sigma^1}{1 - \sigma^1} \alpha_T \xi \int_0^\infty \frac{1}{\eta} [\varphi_1(\eta) e^{\eta \xi} + \varphi_2(\eta) e^{-\eta \xi}] J_0(\eta \rho) d\eta \quad (2.6)$$

Компоненты температурных напряжений и смещений вычисляются по формулам (2.2).

Имея выражения для температурных напряжений и смещений, можно решить задачу при механических граничных условиях. Для этого необходимо к величинам, вычисленным по формулам (2.2), добавить компоненты напряжений и смещений от бигармонического потенциала [3].

Таким образом, для определений смещения и напряжений в изотропном слое имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_z^1 = & - \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left\{ \left[ \frac{1}{b_1^1 R} \eta F_1(\eta) + \left( 2 + \frac{1}{b_1^1 R} \eta \xi \right) F_2(\eta) \right] e^{-\eta \xi} + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{1}{b_1^1 R} \eta F_3(\eta) + \left( -2 + \frac{1}{b_1^1 R} \eta \xi \right) F_4(\eta) \right] e^{\eta \xi} \right\} J_0(\eta \rho) d\eta + \\ & + \frac{1}{2} \frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1} \alpha_{T^1} R \int_0^\infty \frac{1}{\eta} [\varphi_1(\eta) (1+\eta \xi) e^{\eta \xi} - \varphi_2(\eta) (1-\eta \xi) e^{-\eta \xi}] J_0(\eta \rho) d\eta \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^1 = & \frac{2b_3^1}{R} \int_0^\infty \left\{ \left[ \frac{\eta}{R} F_1(\eta) + (b_1^1 + \eta \xi) F_2(\eta) \right] e^{-\eta \xi} + \right. \\ & \left. + \left[ -\frac{\eta}{R} F_3(\eta) + (b_1^1 - \eta \xi) F_4(\eta) \right] e^{\eta \xi} \right\} J_0(\eta \rho) d\eta + \\ & + \mu^1 \frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1} \alpha_{T^1} \xi \int_0^\infty \eta [\varphi_1(\eta) e^{\eta \xi} - \varphi_2(\eta) e^{-\eta \xi}] J_0(\eta \rho) d\eta \\ \tau_{rz}^1 = & 2b_3^1 \int_0^\infty \left\{ \left[ \frac{\eta}{R} F_1(\eta) + (-b_1^1 + \eta \xi) F_2(\eta) \right] e^{-\eta \xi} + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\eta}{R} F_3(\eta) + (b_2^1 + \eta \xi) F_4(\eta) \right] e^{\eta \xi} \right\} J_1(\eta \rho) d\eta - \\ & - \mu^1 \frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1} \alpha_{T^1} \int_0^\infty [\varphi_1(\eta) (1+\eta \xi) e^{\eta \xi} - \varphi_2(\eta) (1-\eta \xi) e^{-\eta \xi}] J_1(\eta \rho) d\eta \\ b_1^1 = & \frac{\mu^1}{\lambda^1 + \mu^1}, \quad b_2^1 = \frac{\lambda^1}{\lambda^1 + \mu^1}, \quad b_3^1 = \lambda^1 + \mu^1 \end{aligned}$$

Здесь  $u_z^1$ ,  $\sigma_z^1$ ,  $\tau_{rz}^1$  — компоненты смещения и напряжений в упругом слое,  $F_i(\eta)$  ( $i=1, 4$ ) — произвольные функции,  $\lambda^1$ ,  $\mu^1$  — коэффициенты Ламе.

Для упрощения выкладок в дальнейшем предположим, что  $H_2=0$ .

Для удовлетворения граничного условия (1.2) в формуле (2.5) следует положить  $D_0=0$ ,  $D_k=0$ ,  $C_k=0$  ( $k=1, \infty$ ). Граничное условие (1.1) с учетом ортогональности функций Бесселя приводит к следующим соотношениям между оставшимися постоянными:

$$B_0 = - \left( \frac{1}{k_1} + l \right) A_0 R, \quad B_n = - \frac{\mu_n + k_1 \operatorname{th} \mu_n l}{\mu_n \operatorname{th} \mu_n l + k_1} A_n, \quad l = \frac{L}{R}, \quad k_1 = H_1 R \quad (2.8)$$

Удовлетворив граничным условиям (1.3), (1.4), с учетом (2.8) получим систему интегральных соотношений, связывающих функции  $\varphi_i(\eta)$  и

$\varphi_2(\eta)$  с коэффициентами  $A_k$  ( $k=0, \infty$ ) и напряжением  $\sigma_z^1(\rho)$  ( $\rho \leq 1$ ):

$$\int_0^\infty [(h_0^1 + \eta)\varphi_1(\eta) + (h_0^1 - \eta)\varphi_2(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta = \quad (2.9)$$

$$= -h_0^1 \left[ \left( \frac{1}{k_1} + l \right) A_0 R + \sum_{k=1}^\infty \frac{\mu_k + k_1 \operatorname{th} \mu_k l}{\mu_k \operatorname{th} \mu_k l + k_1} J_0(\mu_k \rho) A_k \right] \quad (\rho < 1)$$

$$\frac{\lambda_z^1}{R} \int_0^\infty \eta [\varphi_1(\eta) - \varphi_2(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta - \frac{\lambda_z}{R} \left( A_0 R + \sum_{k=1}^\infty \mu_k J_0(\mu_k \rho) A_k \right) = \\ = \omega k_0 \rho R \sigma_z^1(\rho) J^{-1} \quad (\rho < 1) \quad (2.10)$$

$$\int_0^\infty [(k_2^1 + \eta)\varphi_1(\eta) + (k_2^1 - \eta)\varphi_2(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta = 0 \quad (\rho > 1) \quad (2.11)$$

$$\int_0^\infty [(\eta - k_1^1) e^{-\eta h} \varphi_1(\eta) - (\eta + k_1^1) e^{\eta h} \varphi_2(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta = 0 \quad (0 \leq \rho < \infty) \quad (2.12)$$

$$h = H/R, \quad k_1^1 = H_1^1 R, \quad k_2^1 = H_2^1 R, \quad h_0^1 = h_0 R / \lambda_z^1$$

Применив формулу обращения интегрального преобразования Ханкеля [4] к уравнению (2.12), получим систему уравнений относительно  $\varphi_1(\eta)$  и  $\varphi_2(\eta)$ , решение которых имеет вид

$$\varphi_1(\eta) = \frac{1}{2} (\eta + k_1^1) e^{\eta h} \Phi(\eta) / Q(\eta), \quad \varphi_2(\eta) = \frac{1}{2} (\eta - k_1^1) e^{-\eta h} \Phi(\eta) / Q(\eta) \\ \Phi(\eta) = (k_2^1 + \eta)\varphi_1(\eta) + (k_2^1 - \eta)\varphi_2(\eta) \\ Q(\eta) = (\eta^2 + k_1^1 k_2^1) \operatorname{sh} \eta h + \eta (k_1^1 + k_2^1) \operatorname{ch} \eta h \quad (2.13)$$

Подставив функции  $\varphi_1(\eta)$ ,  $\varphi_2(\eta)$  в уравнение (2.11), получим

$$\int_0^\infty \Phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0 \quad (\rho > 1) \quad (2.14)$$

Удовлетворив граничным условиям (1.6), с учетом (2.13) для напряжения  $\sigma_z^1(\rho, 0)$  и смещения  $u_z^1(\rho, 0)$  на поверхности слоя найдем формулы

$$u_z^1(\rho, 0) = \frac{1 + b_1^1}{b_1^1} R \int_0^\infty [1 - G(2\eta h)] \Phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta - \quad (2.15)$$

$$- \alpha_T R \delta \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \frac{Q_2(\eta) \Phi(\eta)}{Q(\eta) Q_1(\eta)} J_0(\eta\rho) d\eta, \quad \sigma_z^1(\rho, 0) = 2b_3^1 \int_0^\infty \eta \Phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta$$

$$R\Phi(\eta) = \eta R^{-1} F_1(\eta) + b_1^1 F_2(\eta) - \eta R^{-1} F_3(\eta) + b_1^1 F_4(\eta) \\ Q_1(\eta) = \operatorname{sh} 2\eta h + 2\eta h, \quad Q_2(\eta) = -(\eta \operatorname{sh} \eta h \operatorname{ch} \eta h + k_1^1 \operatorname{sh}^2 \eta h + \\ + \eta^2 h) \operatorname{sh} \eta h$$

$$G(2\eta h) = \frac{1 + 2\eta h - e^{-2\eta h}}{Q_1(\eta)}, \quad \delta = \frac{1 + \sigma^1}{1 - \sigma^1} (1 + b_1^1)$$

Потребовав выполнения граничных условий (1.5), приходим к системе интегральных уравнений относительно функций  $\Phi(\eta)$  и  $\varphi(\eta)$ :

$$\int_0^{\infty} \Phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = -\frac{\varepsilon}{R} + \int_0^{\infty} G(2\eta h) \Phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta + \\ + \alpha_{Ti} \delta \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \frac{Q_2(\eta) \varphi(\eta)}{Q(\eta) Q_1(\eta)} J_0(\eta\rho) d\eta \quad (0 \leq \rho < 1) \quad (2.16)$$

$$\int_0^{\infty} \eta \Phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0 \quad (\rho > 1) \quad (2.17)$$

Если ввести функцию  $f(t)$  соотношением

$$\Phi(\eta) = \frac{b_1^4}{1+b_1^4} \int_0^1 f(t) \cos \eta t dt \quad (2.18)$$

то уравнение (2.17) удовлетворяется тождественно, а уравнение (2.16) сводится к интегральному уравнению Абеля

$$\int_0^{\rho} \frac{f(t)}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} dt = g(\rho) \quad (2.19)$$

решение которого согласно [5] определяется формулой

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho g(\rho)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho \quad (2.20)$$

$$(2.21)$$

$$g(\rho) = -\frac{\varepsilon}{R} + \int_0^{\infty} G(2\eta h) \Phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta + \alpha_{Ti} \delta \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \frac{Q_2(\eta) \varphi(\eta)}{Q(\eta) Q_1(\eta)} J_0(\eta\rho) d\eta$$

Подставив выражение (2.21) в формулу (2.20), учитывая при этом (2.18), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции  $f(t)$ :

$$f(t) = -\frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon}{R} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \int_0^{\infty} G(2\eta h) \cos \eta x \cos \eta t d\eta + \\ + \frac{2\delta}{\pi} \alpha_{Ti} \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \frac{Q_2(\eta) \varphi(\eta)}{Q(\eta) Q_1(\eta)} \cos \eta t d\eta \quad (0 \leq t < 1) \quad (2.22)$$

Контактные напряжения под штампом  $\sigma_z^1(\rho, 0)$  с учетом (2.18) определяются формулой

$$\sigma_z^1(\rho, 0) = \kappa_0 \left[ \frac{f(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_{\rho}^1 \frac{f'(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \right] \quad \kappa_0 = \frac{2b_1^4 b_3^4}{1+b_1^4} \quad (2.23)$$

Используя условие равновесия штампа  $P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho \sigma_z^1(\rho) d\rho$  и фор-

малу (2.23), уравнение (2.22) приводится к виду

$$f(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \int_0^\infty G(2\eta h) \cos \eta x \left( \cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta - \\ - \frac{2\delta}{\pi} \alpha_{T^1} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \frac{Q_2(\eta) \varphi(\eta)}{Q(\eta) Q_1(\eta)} \left( \cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta = - \frac{P}{2\pi R^2 \kappa_0} \quad (0 \leq t < 1) \quad (2.24)$$

Для определения функции  $\varphi(\eta)$  продолжим уравнение (2.14) на весь интервал  $0 \leq \rho < \infty$ :

$$\int_0^\infty \varphi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = U(1-\rho) X(\rho) \quad (0 \leq \rho < \infty) \quad (2.25)$$

Здесь  $U(x)$  — функция Хевисайда,  $X(\rho)$  — неизвестная функция, которую представим соотношением

$$X(\rho) = a_0 + \sum_{k=1}^{N_1} a_k J_0(\mu_k \rho) \quad (0 \leq \rho < 1) \quad (2.26)$$

где  $a_k$  ( $k=0, N_1$ ) — подлежащие определению коэффициенты; значение  $N_1$  выбирается из условия выполнения требуемой точности решения задачи.

Применив к обеим частям уравнения (2.25) формулу обращения интегрального преобразования Ханкеля, найдем функцию  $\varphi(\eta)$  через неизвестные коэффициенты  $a_k$ :

$$\varphi(\eta) = a_0 J_1(\eta) + \eta^2 J_1(\eta) \sum_{k=1}^{N_1} \frac{a_k J_0(\mu_k)}{\eta^2 - \mu_k^2} \quad (2.27)$$

Подставив  $\varphi(\eta)$  (2.27) в интегральные уравнения (2.9), (2.10), (2.24), используя при этом (2.13) и (2.23), придем к соотношениям, связывающим между собой функцию  $f(t)$  и коэффициенты  $A_k$  ( $k=0, \infty$ ),  $a_k$  ( $k=0, N_1$ ):

$$\sum_{k=0}^{N_1} a_k \alpha_k(\rho) + \frac{A_0 R}{\varepsilon_0} + \sum_{k=1}^\infty \frac{J_0(\mu_k \rho)}{\varepsilon_k} A_k = 0 \quad (\rho < 1) \quad (2.28)$$

$$\varepsilon_0 = k_1 (1 + l k_1)^{-1} (h_0^4)^{-1}, \quad \varepsilon_k = \frac{\mu_k \operatorname{th} \mu_k l + k_1}{\mu_k + k_1 \operatorname{th} \mu_k l} \frac{1}{h_0^4}$$

$$- \frac{\lambda_z^{-1}}{\lambda_z} \sum_{k=0}^{N_1} a_k \beta_k(\rho) - A_0 R - \sum_{k=1}^\infty \mu_k J_0(\mu_k \rho) A_k = \\ = \frac{\omega k_0 \kappa_0 R^2}{\lambda_z J} \rho \left[ \frac{f(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_\rho^1 \frac{f'(t) dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \right] \quad (\rho < 1) \quad (2.29)$$

$$f(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \int_0^\infty G(2\eta h) \cos \eta x \left( \cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta - \\ - \frac{2\delta}{\pi} \alpha_{T^1} \sum_{k=0}^{N_1} \delta_k(t) a_k = - \frac{P}{2\pi R^2 \kappa_0} \quad (0 \leq t < 1) \quad (2.30)$$

где  $\alpha_k(\rho)$ ,  $\beta_k(\rho)$ ,  $\delta_k(t)$  — известные функции.

Умножив обе части уравнений (2.28), (2.29) на  $\rho$ ,  $\rho J_0(\mu_n \rho)$  и проинтегрировав их по  $\rho$  в пределах от 0 до 1, используя при этом условие ортогональности функций Бесселя, находим

$$A_0 R \alpha_{T^1} = \frac{P \varepsilon_0}{\pi R^2 \kappa_0} \sum_{k=0}^{N_1} \alpha_k^{(1)} c_k^{(1)}, \quad A_n \alpha_{T^1} = \frac{P \varepsilon_n}{\pi R^2 \kappa_0 J_0^2(\mu_n)} \sum_{k=0}^{N_1} \alpha_{n,k}^{(1)} c_k^{(1)} \quad (2.31)$$

$$\sum_{k=0}^{N_1} \alpha_{n,k}^{(2)} c_k^{(1)} - \frac{\pi}{2} \Lambda \int_0^1 t g_n(t) \psi(t) dt = 0 \quad (n=\overline{0, N_1}) \quad g_0(t)=1$$

$$g_n(t) = \frac{1}{\mu_n} \left[ J_0\left(\frac{1}{2} \mu_n t\right) - \mu_n t J_1\left(\frac{1}{2} \mu_n t\right) \right], \quad \Lambda = \frac{\omega \kappa_0 R^2}{\lambda_z J} \alpha_{T^1} \quad (n=\overline{1, N_1})$$

$$\alpha_{T^1} a_k = -P c_k^{(1)} / (2\pi R^2 \kappa_0), \quad f(t) = -P \psi(t) / (2\pi R^2 \kappa_0) \quad (2.32)$$

где  $\alpha_k^{(1)}, \alpha_{n,k}^{(1)} (k=\overline{0, N_1}; n=\overline{1, \infty})$ ,  $\alpha_{n,k}^{(2)} (k, n=\overline{0, N_1})$  — известные величины.

Тогда интегральное уравнение (2.30) примет вид

$$\psi(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \psi(x) dx \int_0^\infty G(2\eta h) \cos \eta x \left( \cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta -$$

$$- \frac{2\delta}{\pi} \sum_{k=0}^{N_1} c_k^{(1)} \delta_k(t) = 1 \quad (0 \leq t < 1) \quad (2.33)$$

Применив метод конечных сумм [6] для решения системы интегральных уравнений (2.32), (2.33), придем к системе линейных алгебраических уравнений  $(N+N_1+2)$ -го порядка относительно неизвестных  $\psi(t_i)$  ( $i=\overline{1, N+1}$ ) и коэффициентов  $c_k^{(1)} (k=\overline{0, N_1})$ :

$$\sum_{k=0}^{N_1} \alpha_{n,k}^{(2)} c_k^{(1)} - \frac{\pi}{2} \Lambda \sum_{i=1}^{N+1} t_i A_i^{(1)} g_n(t_i) \psi(t_i) = 0 \quad (n=\overline{0, N_1})$$

$$\psi(t_i) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N+1} A_k^{(1)} g(t_k, t_i) \psi(t_k) - \frac{2\delta}{\pi} \sum_{k=0}^{N_1} c_k^{(1)} \delta_k(t_i) = 1 \quad (i=\overline{1, N+1}) \quad (2.34)$$

$$g(t_k, t_i) = \int_0^\infty G(2\eta h) \cos \eta t_k \left( \cos \eta t_i - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta$$

$$t_i = (i-1)/N \quad (i=\overline{1, N+1}), \quad A_1^{(1)} = A_{N+1}^{(1)} = 1/(2N)$$

где  $A_k = 1/N$  ( $k=\overline{2, N}$ ) — числовые коэффициенты для квадратурной формулы трапеций (значение  $N$  выбирается таким, чтобы обеспечить требуемую точность решения).

Определив неизвестные  $\psi(t_k)$  из системы линейных алгебраических уравнений (2.34), для функции  $\psi(x)$  построим аппроксимирующий полином [6]:

$$Q_{2m}(x) = \sum_{k=0}^m c_k^{(2)} x^{2k} \quad (2.35)$$

который используется для нахождения напряженно-деформированного состояния слоя.

Так, например, для вычисления контактных напряжений под штампом с учетом формул (2.23), (2.32), (2.35) получим следующее выражение:

$$\sigma_z^{(1)}(\rho, 0) = -\frac{P}{2\pi R^2} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[ \sum_{k=0}^m c_k^{(2)} - \right. \\ \left. - 2\sqrt{1-\rho^2} \sum_{k=1}^m k c_k^{(2)} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (1-\rho^2)^{2k-2i-2} \right] \quad (\rho < 1) \quad (2.36)$$

Для определения температурных полей в цилиндре и слое с учетом (2.4), (2.5), (2.8), (2.13), (2.27), (2.31), (2.32) имеем формулы:

цилиндрическая область. ( $0 \leq \rho < 1$ ,  $0 \leq \xi \leq l$ )

$$T(\rho, \xi) = -\frac{P}{2\pi R^2 \kappa_0 \alpha_{T^1}} \left\{ 2 \left( \xi - \frac{1}{k_1} - l \right) \varepsilon_0 \sum_{k=0}^{N_1} \alpha_k^{(1)} c_k^{(1)} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{k=0}^{N_1} c_k^{(1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_m \rho) \alpha_{m,k}^{(1)}}{J_0^2(\mu_m)} \varepsilon_m P_2(\mu_m, \xi) \right\} \quad (2.37)$$

слой ( $-h \leq \xi \leq 0$ ,  $0 \leq \rho < \infty$ )

$$T^1(\rho, \xi) = -\frac{P}{2\pi R^2 \kappa_0 \alpha_{T^1}} \left\{ c_0^{(1)} \left[ \left( \frac{1 + k_1^1(h + \xi)}{k_1^1 k_2^1 h + k_1^1 + k_2^1} \right) + \right. \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_1^*(y_m, \xi)}{Q'(iy_m)} \left( -\frac{K_1(y_m) I_0(y_m \rho)}{K_0(y_m \rho) I_1(y_m)} \right) \right] + \sum_{k=1}^{N_1} c_k^{(1)} \left[ \left( \frac{P_1(\mu_k, \xi) J_0(\mu_k \rho)}{Q(\mu_k) J_0(\mu_k)} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m^2 P_1^*(y_m, \xi)}{(y_m^2 + \mu_k^2) Q'(iy_m)} \left( -\frac{K_1(y_m) I_0(y_m \rho)}{K_0(y_m \rho) I_1(y_m)} \right) \right] \right\} \quad (2.38)$$

$$P_1(x, \xi) = x \operatorname{ch} x(h + \xi) + k_1^1 \operatorname{sh} x(h + \xi)$$

$$P_1^*(y_m, \xi) = y_m \cos y_m(h + \xi) + k_1^1 \sin y_m(h + \xi)$$

$$P_2(x, \xi) = [k_1 \operatorname{sh} x(l - \xi) + x \operatorname{ch} x(l - \xi)] / (x \operatorname{ch} xl + k_1 \operatorname{sh} xl)$$

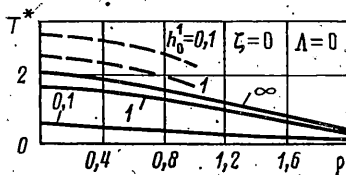
где  $y_m$  ( $m=1, \infty$ ) — корни уравнения  $Q(iy)=0$ ,  $Q'(x)$  — производная от функции  $Q(x)$ ; при  $0 \leq \rho < 1$  множителем берется верхнее выражение в круглых скобках, при  $\rho > 1$  — нижнее.

3. Приведем результаты численного анализа температурных полей и контактных напряжений под штампом в зависимости от контактной проводимости  $h_0^1$  и параметра  $\Lambda$  в предположении, что  $\sigma=0,3$ ,  $l=2$ ,  $h=2$ ,  $\lambda_z/\lambda_z^1=1$ ,  $k_1^1=\infty$ ,  $k_2^1=1$ ,  $k_1^1=k_2^1=0$ .

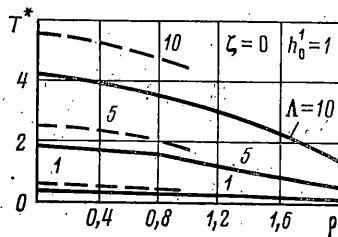
На ЭВМ ЕС-1022 решались системы (2.34) линейных алгебраических уравнений 42-го порядка относительно неизвестных  $\psi(t_k)$  ( $k=\overline{1, 21}$ ) и  $c_k^{(1)}$  ( $k=\overline{0, 20}$ ). В этом случае погрешность удовлетворения граничным условиям задачи составляет не более 2%.

Для функции  $\psi(x)$  достаточно построить аппроксимирующий полином 10-го порядка  $Q_{10}(x) = \sum c_k^{(2)} x^{2k}$  ( $k=0, 1, 2, \dots, 5$ ), который используется для определения напряжений под штампом согласно формулы (2.36).

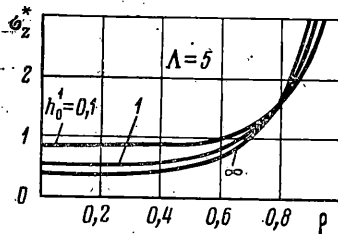




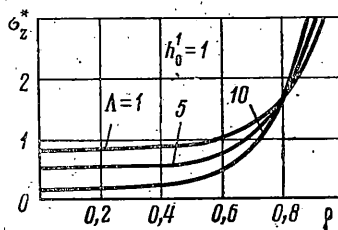
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Графики зависимости температуры  $T^*(\rho) = -2\alpha_T \pi R^2 \kappa_0 T^1(\rho, 0)/P$  (штриховые линии соответствуют цилиндрической области) и нормального контактного напряжения  $\sigma_z^*(\rho) = -2\pi R^2 \sigma_z^1(\rho, 0)/P$  представлены на фиг. 2–5.

Из приведенных результатов видно, что контактная проводимость  $h_0^1$  и параметр  $\Lambda$  значительно влияют на распределение температурных полей и контактных напряжений под штампом

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Генералов М. Б., Кудрявцев В. А., Паргон В. З. Осесимметричная контактная задача термоупругости для вращающегося конечного штампа. — Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 6, с. 133–143.
2. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Киев: Наук. думка, 1970. 304 с.
3. Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов: Вища школа, 1981. 136 с.
4. Снеддон И. Н. Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
5. Уиттекер Э. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа: М.: Физматгиз, 1963. 343 с.
6. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. М.: Физматгиз, 1967. 368 с.

Львов, Тернополь

Поступила в редакцию  
21.XII.1981