МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1984

УДК 531.38

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УГЛОВОГО ПОЛОЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

ИЛЮХИН А. А.

В задачах ориентации вращающихся тел основными параметрами, определяющими взаимное положение двух систем координат, являются направляющие косинусы. Вычисление их через измеряемые величины является главной проблемой ориентации, решение которой зависит как от выбора измеряемых величин, так и промежуточных параметров. В свою очередь выбор существенно влияет на алгоритм вычисления направляющих косинусов [1]. К числу промежуточных параметров, иногда выступающих в качестве основных, относятся различным образом вводимые углы, параметры Родрига – Гамильтона, Кейли – Клейна и др. В практических задачах, как известно, одним из главных требований, предъявляемых к измеряемым параметрам и вычислительному алгоритму, является проведение минимума операций при определении положений тела по данным измерений. Это уменьшает запаздывание в решении задач ориентации. С другой стороны, задачи ориентации непрерывно связаны с решением задач наблюдения, так как при любом алгоритме вычисления параметров ориентации необходимо задание трех начальных условий. К решению задач наблюдения иногда привлекаются динамические уравнения движения. Таким образом, в определении углового положения тела прямо или косвенно участвуют и динамические уравнения. Представляется естественным поставить задачу ориентации так, чтобы в ее решении с самого начала использовались динамические уравнения, в частности свойства силового поля.

В публикуемой работе направляющие косинусы вычисляются через компоненты кинетического момента.

1. Движение около неподвижной точки твердого тела или тела, несущего вращающиеся тела, описывается системой дифференциальных уравнений [2]:

$$(\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})'+\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})=\mathbf{L} \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – абсолютная угловая скорость вращения тела (либо тела-носителя), $\mathbf{x}$ – вектор-момент количества движения тела, $\boldsymbol{\lambda}$ – гиростатический момент, $\mathbf{L}$ – момент внешних сил относительно неподвижной точки. Штрих в уравнениях (1.1) обозначает дифференцирование в осях, связанных с телом. Если тело движется в потенциальном осесимметрическом силовом поле, то $\mathbf{L}=\mathrm{grad}_\gamma U(\boldsymbol{\gamma})\times\boldsymbol{\gamma}$. Единичный вектор $\boldsymbol{\gamma}$ оси симметрии называется еще вектором вертикали [3]. Для завершенности конечных формул остановимся на случае потенциального осесимметричного поля. Тогда к уравнениям (1.1) необходимо добавить уравнения, определяющие направление вектора $\boldsymbol{\gamma}$ в подвижных осях

$$\boldsymbol{\gamma}'=\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega} \tag{1.2}$$

Представим, что измеряются компоненты x_n вектора $\mathbf{x}$ в подвижной системе координат, базисные векторы которой будем обозначать $\mathbf{i}_n$. В частном случае $\mathbf{L}=\mathrm{grad}_\gamma U(\boldsymbol{\gamma})\times\boldsymbol{\gamma}$ система дифференциальных уравнений (1.1), (1.2) имеет три интеграла

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\omega}-U=h,\quad (\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\gamma}=k,\quad \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}=1 \tag{1.3}$$

из которых можно определить вектор $\boldsymbol{\gamma}$, избавившись от необходимости интегрировать уравнения (1.2). Например, когда силовое поле однородно, то эта зависимость имеет вид

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\gamma}=[(k-\mu p)(\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})-(kp-\mu\nu)\mathbf{e}+D^{1/2}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})\times\mathbf{e}]\,/\,(\nu-p^2)\\ p=(\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\mathbf{e},\quad \nu=(\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})^2,\quad \mu=(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\omega}-2h)\,/\,2\Gamma\\ D=(1-\mu^2)(\nu-p^2)-(k-\mu p)^2\end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{e}$ – единичный вектор, направленный из неподвижной точки в центр масс, Γ – произведение веса на расстояние между неподвижной точкой и центром масс тела.

Введем цилиндрическую систему координат [4], ось ζ_1 которой направим вдоль вектора $\boldsymbol{\gamma}$, а в плоскости, перпендикулярной этой оси, определим полярный угол α

и полярный радиус ρ. Базисные векторы цилиндрической системы координат обозначим $e_\zeta=\gamma$, e_ρ и e_α. В этой системе координат вычислим цилиндрические координаты конца вектора $x+\lambda$ – момента количества движения [4]:

$$
\begin{gathered}
x_\zeta=(x+\lambda)\cdot\gamma=k, \quad x_\rho^2=[(x+\lambda)\times\gamma]^2 \\
\alpha^\bullet=\{[(x+\lambda)\cdot\gamma]\gamma-(x+\lambda)\cdot \mathrm{grad}_\gamma U/|\mathrm{grad}_\gamma U|\}/[x+\lambda)\times\gamma]^2
\end{gathered} \tag{1.5}
$$

где $\alpha^\bullet$ – производная угла α по времени. Базисные векторы e_ρ и e_α также вычисляются через известные величины

$$
e_\zeta=\gamma, \quad e_\rho=\{(x+\lambda)-[(x+\lambda)\cdot\gamma]\}/x_\rho, \quad e_\alpha=[\gamma\times(x+\lambda)]/x_\rho \tag{1.6}
$$

Определим проекции векторов i_n на направление базисных векторов e_ζ, e_ρ и e_α:

$$
\begin{gathered}
i_{n\zeta}=i_n\cdot e_\zeta=i_n\cdot\gamma=\gamma_n \\
i_{n\alpha}=i_n\cdot e_\alpha=i_n[\gamma\times(x+\lambda)]/x_\rho=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{njk}\gamma_n(x_k+\lambda_k)/x_\rho \\
i_{n\rho}=i_n\cdot e=i_n\cdot\{(x+\lambda)-[(x+\lambda)\cdot\gamma]\gamma\}/x_\rho=\{(x_n+\lambda_n)-[(x+\lambda)\cdot\gamma]\gamma_n\}/x_\rho
\end{gathered} \tag{1.7}
$$

где ε_{njk} – символ Леви-Чивита. В формулах (1.7) можно заменить $(x+\lambda)\cdot\gamma$ через k из второго интеграла в (1.3).

Пусть e_n – базисные векторы неподвижной системы координат, причем $e_1=e_\zeta=\gamma$, а угол α отсчитывается от вектора e_2. Разложим векторы e_2 и e_3 по векторам e_ρ и e_α:

$$
e_2=e_\rho\cos\alpha-e_\alpha\sin\alpha, \quad e_3=e_\rho\sin\alpha-e_\alpha\cos\alpha \tag{1.8}
$$

Спроектировав векторы i_n на направление векторов e_j, с учетом (1.7) и (1.8) получим следующие выражения для направляющих косинусов i_{nj}:

$$
\begin{gathered}
i_{11}=\gamma_1, \quad i_{21}=\gamma_2, \quad i_{31}=\gamma_3 \\
i_{12}=\{[x_1+\lambda_1-\gamma_1(x+\lambda)\cdot\gamma]\cos\alpha-[\gamma_2(x_3+\lambda_3)-\gamma_3(x_2+\lambda_2)]\sin\alpha\}/x_\rho \\
i_{22}=\{[x_2+\lambda_2-\gamma_2(x+\lambda)\cdot\gamma]\cos\alpha-[\gamma_3(x_1+\lambda_1)-\gamma_1(x_3+\lambda_3)]\sin\alpha\}/x_\rho \\
i_{32}=\{[x_3+\lambda_3-\gamma_3(x+\lambda)\cdot\gamma]\cos\alpha-[\gamma_1(x_2+\lambda_2)-\gamma_2(x_1+\lambda_1)]\sin\alpha\}/x_\rho \\
i_{13}=\{[x_1+\lambda_1-\gamma_1(x+\lambda)\cdot\gamma]\sin\alpha+[\gamma_2(x_3+\lambda_3)-\gamma_3(x_2+\lambda_2)]\cos\alpha\}/x_\rho \\
i_{23}=\{[x_2+\lambda_2-\gamma_2(x+\lambda)\cdot\gamma]\sin\alpha+[\gamma_3(x_1+\lambda_1)-\gamma_1(x_3+\lambda_3)]\cos\alpha\}/x_\rho \\
i_{33}=\{[x_3+\lambda_3-\gamma_3(x+\lambda)\cdot\gamma]\sin\alpha+[\gamma_1(x_2+\lambda_2)-\gamma_2(x_1+\lambda_1)]\cos\alpha\}/x_\rho
\end{gathered} \tag{1.9}
$$

Отсюда следует, что если измеряются компоненты вектора кинетического момента вращения тела в потенциальном осесимметричном силовом поле, то для определения направляющих косинусов достаточно вычислить квадратуру для угла α, а затем при помощи конечных соотношений (1.9) найти искомые величины.

Поделив числитель и знаменатель в (1.5) и (1.9) на модуль вектора кинетического момента, получим, что задачу ориентации можно решить измеряя, например, γ_1, γ_2 и угол между векторами γ и $x+\lambda$.

2. Рассмотрим отдельно случай вращения тела по инерции. Уравнения движения примут вид

$$
(x+\lambda)'+\omega\times(x+\lambda)=0 \tag{2.1}
$$

Система дифференциальных уравнений (2.1) допускает интеграл [5], смысл которого состоит в том, что вектор $x+\lambda$ остается неизменным по длине и направлению. Это позволяет направить одну из осей неподвижной системы координат вдоль вектора $x+\lambda$. Предположим, что известны компоненты в подвижной системе координат вектора $e_1=(x+\lambda)/|x+\lambda|=e_{11}i_1+e_{12}i_2+e_{13}i_3$. Как и в предыдущем случае, вводим цилиндрическую систему координат с базисом $e_\zeta=e_1$, $e_{\alpha 1}$ и $e_{\rho 1}$. Векторы $e_{\alpha 1}$ и $e_{\rho 1}$ задаем равенствами

$$
e_{\alpha 1}=(e_1\times i_1)/\sqrt{1-e_{11}^2}, \quad e_{\rho 1}=[i_1-(e_1\cdot i_1)e_1]/\sqrt{1-e_{11}^2} \tag{2.2}
$$

Угол α_1 между векторами $e_{\rho 1}$ и e_2 вычислим, используя правило дифференцирования в полярной системе координат

$$
\sqrt{1-e_{11}^2}\,\frac{d\alpha_1}{dt}=\frac{di_1}{dt}\,e_{\alpha 1}=\frac{(e_1\times i_1)(\omega\times i_1)}{\sqrt{1-e_{11}^2}}
$$

или

$$
d\alpha_1/dt=(e_{12}\omega_2+e_{13}\omega_3)/(1-e_{11}^2) \tag{2.3}
$$

Теперь можно выписать значение компонент вектора i_1 в неподвижном базисе e_1, e_2 и e_3:

$$
i_{11}=e_{11}, \quad i_{12}=\sqrt{1-e_{11}^2}\cos\alpha_1, \quad i_{13}=\sqrt{1-e_{11}^2}\sin\alpha_1 \tag{2.4}
$$

Поскольку выбор вектора $\mathbf{e}_1$ однозначно определен, а нумерация подвижных осей не была привязана к каким-либо измеряемым величинам, то применительно к векторам $\mathbf{i}_2$ и $\mathbf{i}_3$ предыдущие рассуждения повторяются. Это позволяет сразу же записать и выражения для компонент векторов $\mathbf{i}_2$ и $\mathbf{i}_3$:

$$\begin{aligned} &i_{21}=e_{12}, \quad i_{22}=\sqrt{1-e_{12}^2}\cos\alpha_2, \quad i_{23}=\sqrt{1-e_{12}^2}\sin\alpha_2 \\ &i_{31}=e_{13}, \quad i_{32}=\sqrt{1-e_{13}^2}\cos\alpha_3, \quad i_{33}=\sqrt{1-e_{13}^2}\sin\alpha_3 \end{aligned} \tag{2.5}$$

где значения углов α_2 и α_3 получим из (2.3) соответствующей заменой индексов у e_{1k} и ω_k:

$$\frac{d\alpha_2}{dt}=\frac{e_{11}\omega_1+e_{13}\omega_3}{1-e_{12}^2}, \quad \frac{d\alpha_3}{dt}=\frac{e_{11}\omega_1+e_{12}\omega_2}{1-e_{13}^2} \tag{2.6}$$

Условие нормировки строк матриц $\|i_{nj}\|$ выполняется. Для ортогональности этих строк необходим соответствующий выбор постоянных интегрирования в (2.6). В силу произвольности выбора векторов $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ постоянная интегрирования в (2.3) может быть фиксирована также произвольно, тогда как начальные значения углов α_2 и α_3 должны определяться через нее однозначно. В реальных условиях инерциальная система координат выбирается заранее, поэтому, возможно, возникнет необходимость пересчета направляющих косинусов i_{nj}, определенных в специально выбранной системе координат. Однако произвол в выборе векторов $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ может значительно упростить матрицу перехода. В рассматриваемой задаче нет необходимости в вычислении компонент i_{3n} по формулам (2.5) и (2.6), так как можно воспользоваться равенством $\mathbf{i}_3=\mathbf{i}_1\times\mathbf{i}_2$. Тогда для решения задачи об ориентации твердого тела в случае вращения по инерции достаточно вычисления двух квадратур для α_1 и α_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
2. *Харламов П. В.* Лекции по динамике твердого тела. Ч. I. Новосибирск: Изд-е Новосиб. ун-та, 1965. 221 с.
3. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
4. *Илюхин А. А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. Киев: Наук. думка, 1979. 216 с.
5. *Euler L.* Du mouvement de rotation des corps solides sutour d'un axe variable.— Mem. Acad. Roy Sci. et bells-letters. Berlin, 1765, v. 14, p. 154—193.

Донецк

Поступила в редакцию 21.V.1981

Технический редактор *Т. В. Скворцова*

Сдано в набор 05.12.83 Подписано к печати 25.01.84 Т-05229 Формат бумаги 70×108¹/₁₆
Высокая печать Усл. печ. л. 15,4 Усл. кр.-отт. 21,4 тыс. Уч.-изд. л.16,6 Бум. л. 5,5
Тираж 1424 экз. Зак. 3445

Издательство «Наука». 103717, ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Шубинский пер., 10