МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1984

УДК 531.3

К ЗАДАЧЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

ЛЕБЕДЕВ Д. В.

Используя аппарат винтового исчисления [1, 2], получены общие структуры алгоритмов вычисления кажущейся скорости центра масс твердого тела по интегральной информации о его эволюциях.

Структуры этих алгоритмов полностью определяются структурами алгоритмов вычисления параметров ориентации твердого тела.

1. Введем две правые ортогональные системы координат: жестко связанную с телом систему E, начало O которой для определенности поместим в центре масс твердого тела, и инерциальную систему I. Введем, далее, вектор $\mathbf{W}$ кажущейся скорости — разность между абсолютной скоростью $\mathbf{V}$ центра масс объекта и ее составляющей $\mathbf{V}_*$, обусловленной гравитационным ускорением [3].

Располагая в базисе E информацией о векторах $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости вращения твердого тела и кажущегося ускорения $\mathbf{a}$ его центра масс, необходимо определить взаимную ориентацию трехгранников E и I и найти в них вектор $\mathbf{W}$ кажущейся скорости полюса O.

Обозначая через s символ Клиффорда ($s^2=0$), взаимное положение координатных систем E и I будем характеризовать комплексным вектором

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\varphi}+s\boldsymbol{\varphi}^\circ \tag{1.1}$$

представляющим дуальный аналог вектора истинного поворота [4], или вектора ориентации [5]. Модули векторов $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\varphi}^\circ$ в (1.1) определяются соотношениями

$$\varphi=(\boldsymbol{\varphi}'\boldsymbol{\varphi})^{1/2},\quad \varphi^\circ=\boldsymbol{\varphi}'\boldsymbol{\varphi}^\circ/\varphi \tag{1.2}$$

Комплексному вектору (1.1) поставим в соответствие собственный бикватернион [6]

$$\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\Lambda}+s\mathbf{M} \tag{1.3}$$

компоненты $\theta_i=\lambda_i+sm_i$ ($i=0, 1, 2, 3$) которого — дуальные параметры Родрига — Гамильтона.

Поскольку компоненты λ_i кватерниона $\boldsymbol{\Lambda}$, характеризующего взаимную ориентацию базисов E и I, являются вещественными параметрами Родрига — Гамильтона, то связь их с вектором $\boldsymbol{\varphi}$ определяется известными соотношениями [3, 4, 7]. Связь же кватерниона $\mathbf{M}=\{m_i\}$ ($i=0, 1, 2, 3$) с векторами $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\varphi}^\circ$ устанавливается формулами, приведенными в [6].

Кажущаяся скорость $\mathbf{W}$ в базисах E и I в соответствии с [6] выражается через кватернионы $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\mathbf{M}$ равенствами

$$\mathbf{W}_E=2\operatorname{vect}(\overline{\boldsymbol{\Lambda}}\circ\mathbf{M}),\quad \mathbf{W}_I=2\operatorname{vect}(\mathbf{M}\circ\overline{\boldsymbol{\Lambda}}) \tag{1.4}$$

где $\overline{\boldsymbol{\Lambda}}$ — кватернион, сопряженный $\boldsymbol{\Lambda}$.

Отметим, что в рассматриваемом случае изменения кватернионов $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\mathbf{M}$ во времени описываются уравнениями

$$2\boldsymbol{\Lambda}^{\boldsymbol{\cdot}}=\boldsymbol{\Lambda}\circ\boldsymbol{\omega}_*,\quad 2\mathbf{M}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{M}\circ\boldsymbol{\omega}_*+\boldsymbol{\Lambda}\circ\mathbf{a}_* \tag{1.5}$$

в которых ω_* и a_* — гиперкомплексные отображения векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{a}$ на базис E.

Поставленная задача сводится, таким образом, либо к интегрированию уравнений (1.5), либо к отысканию параметров φ и φ^c комплексного вектора (1.1).

2. Пусть в базисе E измерению доступна информация о движении твердого тела в виде

$$\mathbf{p}_{n+1}=\int_{t_n}^{t_n+h}\boldsymbol{\omega}(\tau)\,d\tau,\quad \mathbf{b}_{n+1}=\int_{t_n}^{t_n+h}\mathbf{a}(\tau)\,d\tau \tag{2.1}$$

где h — постоянный шаг интегрирования (параметр квантования первичной информации по времени).

Располагая информацией (2.1) (первая формула) о вращательном движении твердого тела, приращение вектора φ на шаге $H=kh$ ($k=1, 2, \ldots$) вычисляем по формуле [8]:

$$\varphi_{n+k}=\mathbf{p}_{n+k}+\mathbf{F}(\mathbf{p}_{n+\alpha},\ \mathbf{p}_{n+\beta},\ldots)\quad(\alpha\leqslant k,\ \beta<k,\ldots) \tag{2.2}$$

Если из соотношений (2.1) образовать дуальный вектор $\mathbf{q}_{n+\gamma}=\mathbf{p}_{n+\gamma}+s\mathbf{b}_{n+\gamma}$ ($\gamma=k,\ \alpha,\ \beta,\ldots$) и к выражению (2.2) применить принцип перенесения Котельникова — Штуди [2], то приращение вектора $\Phi=\varphi+s\varphi^\circ$ определяется соотношением

$$\Phi_{n+k}=\mathbf{q}_{n+k}+\mathbf{F}(\mathbf{q}_{n+\alpha},\ \mathbf{q}_{n+\beta},\ldots) \tag{2.3}$$

Из равенства (2.3) следует, что приращение вектора φ° на шаге H вычисляется по формуле

$$\overset{\circ}{\varphi}_{n+k}=\mathbf{b}_{n+k}+\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{p}_{n+\alpha},\mathbf{p}_{n+\beta},\mathbf{b}_{n+\alpha},\mathbf{b}_{n+\beta},\ldots)$$

Например, общая структура алгоритмов третьего порядка точности для вычисления приращения вектора φ, задаваемая выражением [8]

$$\varphi_{n+k}=\mathbf{p}_{n+k}+\xi\mathbf{p}_{I,i}\times\mathbf{p}_{J,j},\quad \xi=k^3/(6\mu_1) \tag{2.4}$$

с погрешностью на шаге H:

$$\delta\varphi_{n+k}=\frac{k^3h^4}{72\mu_1}(2\mu_2-3k\mu_1)\,\boldsymbol{\omega}_n\times\boldsymbol{\omega}_n^{\cdot\cdot}+O(h^5) \tag{2.5}$$

порождает следующую структуру алгоритмов вычисления вектора $\overset{\circ}{\varphi}_{n+k}$.

$$\overset{\circ}{\varphi}_{n+k}=\mathbf{b}_{n+k}+\xi(\mathbf{b}_{I,i}\times\mathbf{p}_{J,j}+\mathbf{p}_{I,i}\times\mathbf{b}_{J,j}) \tag{2.6}$$

погрешность которой оценивается соотношением

$$\delta\overset{\circ}{\varphi}_{n+k}=\frac{k^3h^4}{72\mu_1}(2\mu_2-3k\mu_1)(\mathbf{a}_n\times\boldsymbol{\omega}_n^{\cdot\cdot}+\boldsymbol{\omega}_n\times\mathbf{a}_n^{\cdot\cdot})+O(h^5) \tag{2.7}$$

В выражениях (2.4) — (2.7) обозначено

$$\mathbf{p}_{I,i}=\mathbf{p}_{n+I}-\mathbf{p}_{n+i},\qquad \mathbf{p}_{n+\nu}=\begin{cases}\displaystyle\int_{t_n}^{t_n+\nu h}\boldsymbol{\omega}(\tau)\,d\tau, & \nu>0\\ \displaystyle\int_{t_n+\nu h}^{t_n}\boldsymbol{\omega}(\tau)\,d\tau, & \nu<0\end{cases}$$

$$\mu_\sigma=|iI|(i^\sigma-I^\sigma)+|Ij|(I^\sigma-j^\sigma)-|IJ|(I^\sigma-J^\sigma)-|ij|(i^\sigma-j^\sigma)\quad(\sigma=1,\ 2)$$

Векторы $\mathbf{p}_{J,j}$, $\mathbf{b}_{I,i}$, $\mathbf{b}_{J,j}$ определяются аналогичными соотношениями с соответствующей заменой индексов и вектора $\boldsymbol{\omega}$ на $\mathbf{a}$.

Определив приращения векторов $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\varphi}^\circ$ на шаге kh (текущий номер шага вычислений будем далее обозначать через N) и учтя формулы (1.2), находим приращения $\boldsymbol{\lambda}_{N+1}=\{\lambda_{i,N+1}\}$ и $\mathbf{m}_{N+1}=\{m_{i,N+1}\}$ ($i=0, 1, 2, 3$) кватернионов $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\mathbf{M}$, вызванные эволюцией твердого тела

$$\lambda_{0,N+1}=\cos {}^1/_2\varphi_{N+1}=1-{}^1/_8\overset{2}{\varphi}_{N+1}+{}^1/_{384}\overset{4}{\varphi}_{N+1}-\ldots, \quad \lambda_{j,N+1}=\alpha_{N+1}\varphi_{j,N+1} \quad (j=1,2,3)$$

$$m_{0,N+1}=-{}^1/_2\alpha_{N+1}(\boldsymbol{\varphi}'_{N+1}\overset{\circ}{\boldsymbol{\varphi}}_{N+1}), \quad m_{j,N+1}=\alpha_{N+1}\overset{\circ}{\varphi}_{j,N+1}-\beta_{N+1}(\boldsymbol{\varphi}'_{N+1}\overset{\circ}{\boldsymbol{\varphi}}_{N+1})\varphi_{j,N+1}$$

$$\alpha_{N+1}=\overset{-1}{\varphi}_{N+1}\sin {}^1/_2\varphi_{N+1}={}^1/_2-{}^1/_{48}\overset{2}{\varphi}_{N+1}+{}^1/_{3840}\overset{4}{\varphi}_{N+1}-\ldots$$

$$\beta_{N+1}=\overset{-2}{\varphi}_{N+1}({}^1/_2\cos {}^1/_2\varphi_{N+1}-\overset{-1}{\varphi}_{N+1}\sin {}^1/_2\varphi_{N+1})={}^1/_{24}-{}^1/_{960}\overset{2}{\varphi}_{N+1}+\ldots$$

Параметры ориентации вычисляются по известным формулам

$$\boldsymbol{\Lambda}_{N+1}=\boldsymbol{\Lambda}_N\circ\boldsymbol{\lambda}_{N+1} \tag{2.8}$$

а векторы $\mathbf{W}_{E,N+1}$ и $\mathbf{W}_{I,N+1}$ определяются рекуррентными соотношениями:

$$\mathbf{W}_{E,N+1}=\operatorname{vect}(\overline{\boldsymbol{\lambda}}_{N+1}\circ\overset{\circ}{\mathbf{W}}_{E,N}\circ\boldsymbol{\lambda}_{N+1}+\Delta\mathbf{W}_{E,N+1})$$

$$\mathbf{W}_{I,N+1}=\operatorname{vect}(\mathbf{W}_{I,N}+\boldsymbol{\Lambda}_N\circ\Delta\mathbf{W}_{I,N+1}\circ\overline{\boldsymbol{\Lambda}}_N), \quad \Delta\mathbf{W}_{E,N+1}=2\overline{\boldsymbol{\lambda}}_{N+1}\circ\mathbf{m}_{N+1}, \tag{2.9}$$

$$\Delta\mathbf{W}_{I,N+1}=2\mathbf{m}_{N+1}\circ\overline{\boldsymbol{\lambda}}_{N+1}$$

в которых $\mathbf{W}^\circ_{E,N}$ и $\mathbf{W}^\circ_{IN}$ — гиперкомплексные отображения вектора $\mathbf{W}_N$ на базисы $\mathbf{E}$ и I соответственно.

Выражения (2.8), (2.9) следуют из представления бикватерниона (1.3) в виде произведения двух бикватернионов θ_N и $\vartheta_{N+1}=\lambda_{N+1}+s\mathbf{m}_{N+1}$ и равенств (1.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Котельников А. П.* Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1895. 215 с.
2. *Диментберг Ф. М.* Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 327 с.
3. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
4. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
5. *Bortz J. E.* A new mathematical formulation for strap – down inertial navigation.– IEEE Trans. Aerospace and Electron. Syst., 1971, v. 7, No. 1, p. 61–66.
6. *Челноков Ю. Н.* Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела.– ПММ, 1980, т. 44, вып. 1, с. 32–39.
7. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
8. *Лебедев Д. В.* О вычислении параметров ориентации твердого тела.– Докл. АН УССР. Сер. А, 1982, № 4, с. 27–31.

Киев

Поступила в редакцию
25.XI.1982