

УДК 531.8

О ЗАДАЧЕ УГЛОВОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВУНОГОЙ ХОДЬБЫ

ЧУДИНОВ П. С.

В [1] рассмотрена задача угловой стабилизации ходьбы двуногого шагающего аппарата, состоящего из весомого корпуса и пары невесомых двузвельных ног, подвешенных в одной точке корпуса. Создан алгоритм угловой стабилизации, выводящий аппарат на предельный периодический режим, основные характеристики которого (длина и продолжительность шага, амплитуда колебаний корпуса, угловая скорость корпуса в начале шага) инвариантны относительно начального возмущенного состояния. В данной работе обобщаются результаты [1] — строится однопараметрическое семейство инвариантных периодических режимов ходьбы.

1. В обозначениях и предположениях работы [1] задача угловой стабилизации ставится следующим образом. Рассматривается плоское одноопорное перемещение аппарата по горизонтальной поверхности. Невозмущенное движение аппарата описывается формулами

$$\begin{aligned} \rho\theta(t) &= c_1 \exp(\alpha t) + c_2 \exp(-\alpha t) + x_v - x(t) \\ x(t) &= x_0 + Vt, \quad y(t) = h = \text{const}, \quad \alpha^2 = M\rho g / (I_0 + M\rho h) \\ c_1 &= {}^{1/2}[\rho\theta_0 - S + (\rho\theta_0^* + V)/\alpha], \quad c_2 = {}^{1/2}[\rho\theta_0 - S - (\rho\theta_0^* + V)/\alpha] \end{aligned} \quad (1.1)$$

с заданными параметрами V , h , причем колебания корпуса периодичны. В (1.1) введены обозначения: x , y — декартовы координаты точки подвеса ног, θ — угол отклонения корпуса, отсчитываемый от вертикали по направлению движения (в сторону положительного направления оси x), M — масса корпуса, I_0 — момент инерции корпуса относительно оси z , проходящей через точку подвеса ног, x_v , y_v — координаты точки опоры (для горизонтальной поверхности $y_v = 0$), g — ускорение силы тяжести, ρ — расстояние от точки подвеса ног до центра масс корпуса, $v = 1, 2, 3, \dots$ — номер шага аппарата, V — скорость поступательного перемещения, h — высота точки подвеса ног над поверхностью. Нижним индексом «ноль» отмечены значения фазовых координат аппарата ($\theta, \theta^*, x, x^*, y, y^*$) в момент начала шага; $S = x_v - x_0$ — опорный отрезок (расстояние между точкой опоры и проекцией точки подвеса ног на горизонтальную плоскость в момент начала шага).

Формулы (1.1) описывают движение с постоянной поступательной скоростью V , с постоянной высотой точки подвеса ног h над горизонтальной поверхностью и с периодическими колебаниями корпуса. Назовем движение (1.1) комфортабельным.

Пусть в момент начала очередного шага (с номером $v = 1$) аппарат подвергается воздействию возмущений по координатам θ, θ^*, x и переходит в возмущенное фазовое состояние $(\theta_0, \theta_0^*, x_0; V, h, 0)$. Требуется вернуть аппарат на периодический по углу и угловой скорости корпуса режим: $\theta(0) = \theta(T), \theta^*(0) = \theta^*(T)$, где T — продолжительность шага.

Для решения данной задачи в [1] использованы полученные в [2] условия периодичности колебаний при комфортабельном движении со скоростью V и некоторой длиной шага l_N :

$$\rho\theta_0 = S - {}^{1/2}l_N, \quad \rho\theta_0^* = {}^{1/2}\alpha l_N \operatorname{cth}({}^{1/2}\alpha l_N / V) \quad (1.2)$$

При этом задача свелась к выбору длины l и продолжительности T очередного шага аппарата согласно формулам

$$l = \frac{1}{2} l_N + \sqrt{G^2 + 4c_1 c_2}, \quad G(l_N) = \frac{1}{2} l_N \operatorname{cth}(\alpha l_N / 2V). \quad (1.3)$$

$$T = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{1}{2c_1} (G + \sqrt{G^2 + 4c_1 c_2}) \right]$$

где l_N — вспомогательная длина шага, являющаяся свободным параметром. Величина l_N выбиралась из условий существования значений l , T , т. е. из условий $G^2 + 4c_1 c_2 \geq 0$, $G + \sqrt{G^2 + 4c_1 c_2} > 2c_1$ ($c_1 > 0$) в виде

$$l_N = V\delta/\alpha, \quad \delta = (2\alpha/V) \sqrt{-4c_1 c_2} \quad (1.4)$$

Показано, что если длину и продолжительность каждого очередного шага аппарата выбирать согласно (1.3), (1.4), то в пределе (при $\nu \rightarrow \infty$) аппарат выходит на один и тот же по l , T и другим параметрам периодический режим, который инвариантен относительно начального возмущенного состояния θ_0 , θ_0' , x_0 .

В данной работе построение однопараметрического семейства инвариантных периодических режимов аналогично [1]. Длину и продолжительность каждого очередного шага аппарата зададим соотношениями (1.3), в которых $l_N = kV\delta/\alpha$ (k — некоторый положительный безразмерный параметр). Тогда для $l_N^{(\nu)}$ получим рекуррентную формулу

$$d_\nu = kd_{\nu-1} / \operatorname{sh} d_{\nu-1}, \quad d_\nu = \alpha l_N^{(\nu)} / 2V \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.5)$$

Применяя принцип сжатых отображений [3], найдем неподвижную точку точечного преобразования (1.5): $d^* = \ln[k + (1+k^2)^{1/2}]$, где d^* — корень уравнения $\operatorname{sh} d^* = k$. Предельное значение вспомогательной длины шага l_N при $\nu \rightarrow \infty$ имеет вид

$$l_N = Va^*/\alpha, \quad a^* = 2d^* = 2 \ln(k + \sqrt{1+k^2}) \quad (1.6)$$

При помощи (1.2), (1.3), (1.6) определяются предельные значения для фактических параметров ходьбы l , T , θ_0 :

$$l = \frac{Va^*}{\alpha}, \quad T = \frac{a^*}{\alpha}, \quad \theta_0 = \frac{Vb^*}{\rho}, \quad b^* = d^* \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} - 1 \quad (1.7)$$

Эти результаты означают следующее. Если длина и продолжительность каждого очередного шага выбираются согласно формулам (1.3) при фиксированном значении k , то независимо от значений θ_0 , θ_0' , x_0 в начале процесса угловой стабилизации аппарат через ν шагов выходит на один и тот же по длине шага, продолжительности шага и начальной угловой скорости корпуса периодический режим, который назовем инвариантным. Угол наклона корпуса в начале шага при таком режиме может быть различным.

Формулы для амплитуды колебаний корпуса, опорного отрезка и угла наклона корпуса в начале шага имеют вид

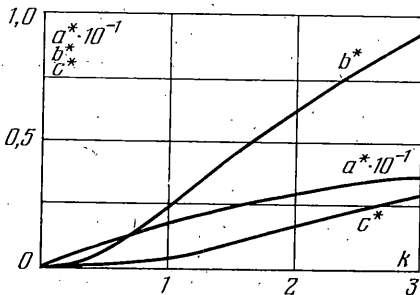
$$A_k = \max|\theta - \langle \theta \rangle| = \frac{Vc^*}{\alpha\rho}, \quad c^* = \ln \left(\frac{k + \sqrt{k^2 - d^{*2}}}{d^*} \right) - \sqrt{1 - \frac{d^{*2}}{k^2}} \quad (1.8)$$

$$S = S_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (l_\nu - VT_\nu), \quad \theta_0 = \langle \theta \rangle = \frac{1}{\rho} \left(S - \frac{1}{2} l \right)$$

При фиксированном значении k продолжительность шага построеного режима зависит только от высоты точки подвеса ног $T = T(h) = a^* [(I_0/M\rho + h)/g]^{1/2}$.

Длина шага и амплитуда колебаний корпуса определяются высотой точки подвеса ног и поступательной скоростью $l=l(h, V)=VT$, $A_k=A_k(h, V)=Vc^*/\alpha\rho$, а угловая скорость корпуса в момент начала шага определяется только поступательной скоростью $\theta_0=\theta_0(V)=Vb^*/\rho$.

Таким образом, варьируя значения параметра k , получаем однопараметрическое семейство инвариантных периодических режимов ходьбы (1.7), (1.8). Характеристики $l, T, \theta_0, \theta_0', A_k, S$ режимов семейства зависят от k ($0 < k < k^*$) через константы a^*, b^*, c^* . Верхняя граница k^* интервала значений k определяется из уравнения



$$\left| \frac{d\varphi}{dz} \right|_{z=d^*} = |1 - d^* \sqrt{1 + k^{-2}}| = 1,$$

$$\varphi(z) = k \frac{z}{\text{sh } z} \quad (1.9)$$

вытекающего из неравенства $|d\varphi/dz|_{z=d^*} < 1$, выражающего условие устойчивости неподвижной точки d^* точечного преобразования (1.5). Из (1.9) находим $k^* = 3,319826$. Графики

функций $a^*(k), b^*(k), c^*(k)$ представлены на фигуре. Конкретное значение параметра k в (1.7), (1.8) может быть выбрано из дополнительных соображений, например из условия энергетической оптимальности движения либо из условия $\langle \theta \rangle = 0$. Кроме того, для выбора k можно использовать характеристики нормальной ходьбы человека.

Выход из возмущенного начального состояния на инвариантный периодический режим, соответствующий заданным высоте точки подвеса ног и поступательной скорости, происходит за конечное число шагов (для $k=1$, например, за пять — десять шагов в зависимости от начальных возмущений):

Замечание. Формулы (3.7) работы [1] получены при $k=1$. Только при этом значении k получается обзримая формула для опорного отрезка.

2. Выберем значение параметра k при помощи экспериментальных данных о ходьбе человека. Согласно [4, 5], нормальная ходьба человека имеет следующие характеристики: $T_2 = 1,21$ с, $l = 0,7$ м, $V = 1,15$ м/с (4,14 км/ч). Здесь T_2 — период двойного шага, l — длина одиночного шага. Кроме того, ходьба характеризуется длительностью одиночного шага $T_1 = 1/2 T_2 = 0,605$ с, где n — темп ходьбы (число шагов в мин). В обозначениях данной работы $T_1 = T$. Согласно [6], при ходьбе длительность одиночного шага лежит в пределах $0,26 \text{ с} \leq T_1 \leq 1,5 \text{ с}$.

Для T_1 отмечено [7] интересное свойство — длительность одиночного шага в случае нормальной ходьбы остается неизменной при существенном ограничении длины шага, т. е. фактически не зависит от скорости движения. Аналогичным свойством обладает продолжительность шага T построенного семейства инвариантных периодических режимов. Независимость T от V согласуется с опытом, так как продолжительность шага существует и при «движении» с нулевой скоростью (топтанье на месте).

Выберем параметр k из условия $T = T_1 = 0,605$ с, которое представляет собой уравнение относительно k : $a^*(k) = \alpha T_1$. При вычислении α используем значения I_0, M, ρ, h , типичные для человека массой 70 кг и ростом 1,7 м: $I_0 = 11,348 \text{ кгм}^2$, $M = 43,904 \text{ кг}$, $\rho = 0,44 \text{ м}$, $h = 0,8 \text{ м}$, $\alpha = 2,659 \text{ с}^{-1}$.

В результате получим $k = 0,90055$. Таким образом, передвижение аппарата с указанными параметрами соответствующими нормальной ходьбе человека, происходит при значении k , близком к единице. Амплитуда колебаний корпуса для заданных параметров составляет $1,8^\circ$.

Выше из условия для устойчивости неподвижной точки d^* точечного преобразования (1.5) найдено граничное значение параметра k : $k^* = 3,319826$. Используем это значение для определения максимальной допу-

стимой продолжительности шага T . Имеем $T_{\max} = a^*(k^*)/\alpha \approx 1,44$ с. Это значение T_{\max} хорошо согласуется с условием $0,26 \text{ с} \leq T_1 \leq 1,5 \text{ с}$.

Отметим, что полученному семейству инвариантных периодических режимов ходьбы соответствует однопараметрическое семейство законов управления аппаратом. Поэтому выбор конкретного значения параметра k эквивалентен заданию соответствующих управляющих моментов в коленном и бедренном шарнирах опорной ноги аппарата [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Чудинов П. С. Одна задача угловой стабилизации двуногой ходьбы.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 6, с. 49–54.
2. Белецкий В. В. Динамика двуногой ходьбы.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, с. 3–14;— Там же, 1975, № 4, с. 3–13.
3. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Наука, 1966. 632 с.
4. Морейнис И. Ш., Славуцкий Я. Л., Курильская Н. А., Баскакова Н. В., Гриценко Г. П. Математическое моделирование ходьбы и электромиография.— Протезирование и протезостроение, 1969, вып. 22, с. 109–118.
5. Соловьев П. П., Вовк В. П. Комплексное исследование кинематических и динамических параметров ходьбы человека.— Механика машин: Сб. статей, 1974, вып. 46, с. 63–65.
6. Богданов В. А., Гурфинкель В. С. Биомеханика локомоций человека.— В кн.: Физиология движений. Л.: Наука, 1976, с. 276–315.
7. Баскакова Н. В., Витензон А. С. Влияние темпа и длины шага на основные параметры ходьбы человека.— В кн.: Биомеханика. Рига: Рижск. н.-и. ин-т травматол. и ортопед., 1975, с. 242–247.

Москва

Поступила в редакцию
8.II.1982