МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1984

УДК 531.36

О РЕГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ

ЧЕЛНОКОВ Ю. Н.

Регуляризации дифференциальных уравнений пространственной задачи двух тел посвящена работа [1]. В [2] предложен другой подход к регуляризации, использующий аппарат кватернионных матриц и кватернионное представление абсолютной и локальной производных от вектора.

Данная работа развивает этот подход: для регуляризации используются кватернионный формализм Гамильтона и новая, полученная здесь, кватернионная форма дифференциальных уравнений движения материальной точки. Показывается, что регуляризация достигается и в том случае, когда смысл преобразований исходных дифференциальных уравнений пространственной задачи двух тел остается тем же, что и в работах [1, 2], но не используются переменные Кустаанхеймо – Штифеля. Дается краткая характеристика предлагаемых способов регуляризации.

Развиваемый подход в отличие от подхода, описанного в [1], позволяет дать ясную кинематическую интерпретацию регуляризующему преобразованию, раскрывает геометрический смысл его неоднозначности и позволяет получить более общие регулярные уравнения пространственной задачи двух тел.

1. Рассмотрим движение материальной точки M массой m относительно системы координат $O_1X_1X_2X_3(X)$, перемещающейся по отношению к инерциальной системе координат $O_2Z_1Z_2Z_3(Z)$ поступательно. Оси системы координат X примем параллельными одноименным осям инерциальной системы координат. Уравнение динамики относительного движения материальной точки имеет вид

$$d^2\mathbf{r}/dt^2=\mathbf{F}/m-d^2\boldsymbol{\rho}/dt^2=\mathbf{w} \qquad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор материальной точки, характеризующий ее положение в системе координат X, $\mathbf{F}$ — вектор равнодействующей всех сил, действующих на точку M, $\boldsymbol{\rho}$ — вектор, характеризующий положение начала системы координат X в системе координат Z, $\mathbf{w}$ — вектор ускорения точки M относительно системы координат X.

Получим кватернионную форму дифференциального уравнения (1.1). Введем обозначения: $\mathbf{v}$ — вектор скорости точки M относительно системы координат X, $MY_1Y_2Y_3(Y)$ — система координат с началом в точке M, вращающаяся относительно $X(Z)$ с заданной абсолютной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{r}_X$, $\mathbf{v}_X$, $\mathbf{w}_X$, $\boldsymbol{\omega}_X$, $\mathbf{F}_X$ — гиперкомплексные отображения векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{F}$ на базис X [3], $\mathbf{r}_Y$, $\mathbf{v}_Y$, $\mathbf{w}_Y$, $\boldsymbol{\omega}_Y$, $\mathbf{F}_Y$ — гиперкомплексные отображения тех же векторов на базис Y.

Мгновенному винту $\mathbf{U}$ скоростей движения системы координат Y относительно X соответствует дуальный вектор $\boldsymbol{\omega}+s\mathbf{v}$ [4]:

$$\mathbf{U}\rightleftarrows\boldsymbol{\omega}+s\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}+s\,d\mathbf{r}/dt,\quad s^2=0$$

Положение системы координат Y относительно X в текущий момент времени можно характеризовать дуальным вектором конечного винтового перемещения $\boldsymbol{\Theta}$ [4]. Винту $\boldsymbol{\Theta}$ соответствуют параметры λ_j, $\lambda_j{}^\circ$ ($j=0, 1, 2, 3$) винтового движения системы координат Y относительно системы координат X [5]. Дуальные комбинации $\lambda_j+s\lambda_j{}^\circ$ этих параметров являются компонентами бикватерниона перемещения $\boldsymbol{\Theta}$. Причем величины λ_j представляют собой параметры Родрига — Гамильтона [3, 6] и характеризуют ориентацию системы координат Y относительно X.

Гиперкомплексные отображения вектора $\mathbf{r}$ на базисы X и Y выражаются через параметры λ_j и λ_j° по формулам [5]

$$\mathbf{r}_X=2\lambda^\circ\circ\bar{\lambda},\quad \mathbf{r}_Y=2\bar{\lambda}\circ\lambda^\circ$$
$$\mathbf{r}_X=x_1\mathbf{i}_1+x_2\mathbf{i}_2+x_3\mathbf{i}_3,\quad \mathbf{r}_Y=y_1\mathbf{i}_1+y_2\mathbf{i}_2+y_3\mathbf{i}_3 \tag{1.2}$$
$$\lambda=\lambda_0+\lambda_1\mathbf{i}_1+\lambda_2\mathbf{i}_2+\lambda_3\mathbf{i}_3,\quad \lambda^\circ=\lambda_0^\circ+\lambda_1^\circ\mathbf{i}_1+\lambda_2^\circ\mathbf{i}_2+\lambda_3^\circ\mathbf{i}_3$$

Здесь символ $\circ$ означает кватернионное умножение, x_i и y_i ($i=1, 2, 3$) — проекции вектора $\mathbf{r}$ на базисы X и Y, $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — орты гиперкомплексного пространства [3], λ — нормированный кватернион ($\|\lambda\|=1$), $\bar{\lambda}$ — кватернион, сопряженный данному кватерниону λ; кватернион λ° имеет норму $\|\lambda^\circ\|=(r/2)^2$, где r — модуль вектора $\mathbf{r}$.

Продифференцируем первое из равенств (1.2) по времени в предположении неизменности ортов $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$. Преобразуем полученное уравнение, учитывая равенство $d\mathbf{r}_X/dt=\mathbf{v}_X$ и кинематическое уравнение вращательного движения системы координат Y относительно X [3, 6]:

$$2d\lambda/dt=\lambda\circ\omega_Y \tag{1.3}$$

Получим

$$2d\lambda^\circ/dt=\lambda^\circ\circ\omega_Y+\mathbf{v}_X\circ\lambda \tag{1.4}$$

Уравнение (1.4) является кинематическим уравнением поступательного движения системы координат Y относительно X. Так как $\mathbf{v}_X\circ\lambda=\lambda\circ\mathbf{v}_Y$, то (1.4) можно записать в другом виде:

$$2d\lambda^\circ/dt=\lambda^\circ\circ\omega_Y+\lambda\circ\mathbf{v}_Y \tag{1.5}$$

Уравнения (1.3) и (1.5) эквивалентны одному дуальному кинематическому уравнению

$$2d\Lambda/dt=\Lambda\circ\mathbf{U}_Y,\quad \Lambda=\lambda+s\lambda^\circ,\quad \mathbf{U}_Y=\omega_Y+s\mathbf{v}_Y$$

Введем кватернион

$$\lambda_+^\circ={}^1/_2\mathbf{v}_X\circ\lambda={}^1/_2\lambda\circ\mathbf{v}_Y \tag{1.6}$$
$$\mathbf{v}_X=2\lambda_+^\circ\circ\bar{\lambda},\quad \mathbf{v}_Y=2\bar{\lambda}\circ\lambda_+^\circ \tag{1.7}$$

Продифференцируем первое из равенств (1.7) по времени. При этом учтем уравнение (1.3), а также, что $d\mathbf{v}_X/dt=\mathbf{w}_X$, $\mathbf{w}_X\circ\lambda=\lambda\circ\mathbf{w}_Y$. В результате получим

$$2d\lambda_+^\circ/dt=\lambda_+^\circ\circ\omega_Y+\lambda\circ\mathbf{w}_Y=\lambda_+^\circ\circ\omega_Y+\mathbf{w}_X\circ\lambda \tag{1.8}$$

Объединяя уравнения (1.3), (1.5), (1.8) и учитывая обозначение (1.6), получаем искомую кватернионную форму дифференциального уравнения (1.1) относительного движения материальной точки

$$2d\lambda_+^\circ/dt=\lambda_+^\circ\circ\omega_Y+\lambda\circ\mathbf{w}_Y=\lambda_+^\circ\circ\omega_Y+\mathbf{w}_X\circ\lambda \tag{1.9}$$
$$2d\lambda^\circ/dt=\lambda^\circ\circ\omega_Y+2\lambda_+^\circ,\quad 2d\lambda/dt=\lambda\circ\omega_Y \tag{1.10}$$

Дифференциальные уравнения (1.9), (1.10) необходимо дополнить алгебраическими соотношениями (1.2) и (1.7).

Если система координат X совпадает с инерциальной Z ($\rho=0$), то уравнения (1.9), (1.10) будут кватернионной формой дифференциального уравнения абсолютного движения материальной точки, $\mathbf{w}$ в этом случае будет абсолютным ускорением, равным $\mathbf{F}/m$, поэтому уравнение (1.9) примет вид

$$2md\lambda_+^\circ/dt=m\lambda_+^\circ\circ\omega_Y+\lambda\circ\mathbf{F}_Y=m\lambda_+^\circ\circ\omega_Y+\mathbf{F}_X\circ\lambda$$

Выделяя среди сил, действующих на материальную точку, ньютоновскую силу притяжения, равную $-\mu^* m r^{-3}\mathbf{r}$, где μ^* — произведение гравитационной постоянной на массу притягивающего тела, преобразуем последнее уравнение к виду

$$2m d\lambda_+{}^\circ/dt = m\lambda_+{}^\circ\circ\omega_Y - 2\mu^* m r^{-3}\lambda^\circ + \lambda\circ F_Y{}^+, \ r = 2\|\lambda^\circ\|^{1/2}$$

Отметим, что система дифференциальных уравнений (1.9), (1.10) имеет три тривиальных частных интеграла $\lambda\circ\bar{\lambda}=1$, $\mathrm{sqal}\,(\lambda^\circ\circ\bar{\lambda})=0$, $\mathrm{sqal}\,(\lambda_+{}^\circ\circ\bar{\lambda})=0$.

2. Перейдем к регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел [1]. Поместим начало системы координат X в центр масс центрального тела A, а начало системы координат Y — в центр масс другого тела B (материальную точку M). Обозначим через m массу тела B, а через $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ — радиус-вектор, вектор скорости и вектор ускорения центра масс тела B в системе координат X.

Векторное дифференциальное уравнение движения тела B относительно центрального тела A в поступательно движущейся системе координат X имеет вид [1, 7]:

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 + \mu r^{-3}\mathbf{r} = \mathbf{p} \tag{2.1}$$

Здесь μ — произведение гравитационной постоянной на сумму масс тел A и B, $\mathbf{p}$ — вектор возмущающего ускорения, порождаемый действием на тело B возмущающих сил (для простоты записи в отличие от работы [1] среди возмущающих сил не выделяется сила, порождаемая возмущающим потенциалом; при необходимости такое выделение может быть легко проведено в конечных уравнениях).

Уравнение (2.1) имеет особенность в начале системы координат X (при соударении тел A и B), для устранения которой, т. е. регуляризации уравнения (2.1), в работе [1] используется регуляризующее преобразование Кустаанхеймо — Штифеля[1]:

$$\mathbf{r}_X = \bar{\mathbf{u}}\circ\mathbf{i}_1\circ\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i}_1 + u_2\mathbf{i}_2 + u_3\mathbf{i}_3 \tag{2.2}$$

обобщающее преобразование Леви-Чивита для плоского движения, и билинейное соотношение

$$u_0\frac{du_1}{dt} - u_1\frac{du_0}{dt} - u_3\frac{du_2}{dt} + u_2\frac{du_3}{dt} = 0 \tag{2.3}$$

Кроме того, вместо реального времени t в качестве независимой переменной вводится фиктивное время t^* по формулам

$$\frac{d}{dt} = r^{-1}\frac{d}{dt^*}, \qquad \frac{d^2}{dt^2} = r^{-3}\left(r\frac{d^2}{dt^{*2}} - \frac{dr}{dt^*}\frac{d}{dt^*}\right) \tag{2.4}$$

а также новая переменная — кеплеровская энергия $-h$, определяемая уравнением энергии

$$h = \mu r^{-1} - {}^1/_2 v^2, \ r = |\mathbf{r}|, \ v = |\mathbf{v}| \tag{2.5}$$

и меняющаяся в соответствии с законом

$$dh/dt = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{v} \tag{2.6}$$

Регуляризующее преобразование (2.2) неоднозначно при переходе от координат x_i ($i=1, 2, 3$) к параметрам u_j ($j=0, 1, 2, 3$). Поэтому метод получения регулярных уравнений пространственной задачи двух тел, приведенный в [1], является во многом искусственным. Регулярные уравнения пространственной задачи двух тел, записанные авторами [1] по аналогии с регулярными уравнениями Леви-Чивита для движения в плоскости, постулируются. После чего проверяется, удовлетворяется ли при этом

[1] В работе [1] величина u_0 обозначается через u_4; здесь и далее черта используется для обозначения комплексно-сопряженных величин.

уравнение (2.1). Достижению этой цели служат ряд теорем, доказанных в [1].

В работе [2] дана ясная кинематическая интерпретация регуляризующего преобразования (2.2). На ее основе, используя аппарат кватернионных матриц и кватернионное представление абсолютной и локальной производных от вектора, был дан прямой вывод регулярных уравнений пространственной задачи двух тел, из которых известные регулярные уравнения [1] следуют как частные. Укажем другой вывод регулярных уравнений пространственной задачи двух тел, использующий кватернионный формализм Гамильтона и кватернионную форму дифференциальных уравнений движения материальной точки, полученную в п. 1.

В рамках принятых в этом параграфе обозначений уравнения (1.9) — (1.10), (1.2), (1.7) являются кватернионной формой дифференциального уравнения (2.1) пространственной задачи двух тел. Вектор ускорения центра масс тела B относительно системы координат X имеет вид $\mathbf{w}=-\mu r^{-3}\mathbf{r}+\mathbf{p}$. Поэтому уравнение (1.9) преобразуется к виду

$$2d\lambda_+^\circ/dt=\lambda_+^\circ\circ\omega_Y-2\mu r^{-3}\lambda^\circ+\mathbf{p}_X\circ\lambda \qquad (2.7)$$

Угловое движение системы координат Y выберем таким, чтобы ось BY_1 во все время движения была направлена вдоль вектора $\mathbf{r}$. Для такого движения трехгранника Y второе из соотношений (1.2) принимает вид: $2\bar{\lambda}\circ\lambda^\circ=r\mathbf{i}_1$. Отсюда имеем

$$\lambda^\circ={}^1/_2 r\lambda\circ\mathbf{i}_1,\quad \lambda=-2r^{-1}\lambda^\circ\circ\mathbf{i}_1 \qquad (2.8)$$

Подставляя равенства (2.8) в первое из соотношений (1.2), находим

$$\mathbf{r}_X=r\lambda\circ\mathbf{i}_1\circ\bar{\lambda}=4r^{-1}\lambda^\circ\circ\mathbf{i}_1\circ\bar{\lambda}^\circ \qquad (2.9)$$

Сопоставляя выражения (2.2) и (2.9) и учитывая равенства (2.8), получаем следующие связи между кватернионами $\mathbf{u}$, λ, λ°:

$$\lambda=r^{-1/2}\bar{\mathbf{u}},\quad \lambda^\circ={}^1/_2 r^{1/2}\bar{\mathbf{u}}\circ\mathbf{i}_1,\quad \mathbf{u}=r^{1/2}\bar{\lambda}=2r^{-1/2}\mathbf{i}_1\circ\bar{\lambda}^\circ \qquad (2.10)$$

Это говорит о том, что регуляризующее преобразование Кустаанхеймо — Штифеля (2.2) заключается в переходе от декартовых координат x_i центра масс тела B в системе координат X к параметрам λ_j, λ_j° такого винтового движения системы координат Y, при котором ее начало перемещается вместе с центром масс тела B, а ось BY_1 во все время движения направлена по радиус-вектору $\mathbf{r}$. Проекции ω_2, ω_3 вектора ω абсолютной угловой скорости вращения координатного трехгранника Y на его оси BY_2, BY_3 определяются в этом случае формулами

$$\omega_2=-r^{-1}v_3,\quad \omega_3=r^{-1}v_2 \qquad (2.11)$$

где v_2, v_3 — проекции вектора $\mathbf{v}$ на оси BY_2, BY_3.

На проекцию ω_1 вектора ω при таком движении трехгранника Y не накладываются никакие ограничения, поэтому она в общем случае может быть задана произвольной функцией величин $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, t.

Можно показать [2], что билинейное соотношение (2.3) эквивалентно равенству $\omega_1=0$.

Поэтому в случае Кустаанхеймо — Штифеля на вектор ω накладывается дополнительное условие, заключающееся в равенстве нулю проекции ω_1 этого вектора на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$.

Указанная кинематическая интерпретация регуляризующего преобразования (2.2) раскрывает геометрический смысл неоднозначности перехода от координат x_i к параметрам u_j в этом преобразовании. Она заключается в имеющемся произволе в задании ориентации трехгранника Y относительно X [2].

Преобразуем уравнения (1.10), (2.7). При этом компоненту ω_1 считаем произвольно заданной функцией $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, t (т. е. примем, что билинейное соотношение (2.3) не выполняется) и учтем соотношения (2.8), (2.10), а также обозначение $\boldsymbol{\alpha}=\bar{\mathbf{u}}\circ\mathbf{i}_1$. Кроме того, в соответствии с известными методами регуляризации [1] осуществим переход от реального времени t к фиктивному t^* по формулам (2.4) и введем в качестве новой переменной кеплеровскую энергию $-h$, удовлетворяющую уравнению (2.6). В результате этих преобразований получим следующие регулярные уравнения пространственной задачи двух тел:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\alpha}''+{}^1/_2h\boldsymbol{\alpha}-{}^3/_2r\omega_1\boldsymbol{\alpha}'\circ\mathbf{i}_1-{}^1/_2\omega_1\boldsymbol{\alpha}\circ\mathbf{i}_1\circ\bar{\boldsymbol{\alpha}}\circ\boldsymbol{\alpha}'-{}^1/_2r^2\omega_1^2\boldsymbol{\alpha}- \\
-{}^1/_2r^2\varepsilon_1\boldsymbol{\alpha}\circ\mathbf{i}_1=-{}^1/_2r\mathbf{p}_X\circ\boldsymbol{\alpha}\circ\mathbf{i}_1 \\
h'=-\mathbf{p}_X\cdot(\boldsymbol{\alpha}'\circ\mathbf{i}_1\circ\bar{\boldsymbol{\alpha}}+\boldsymbol{\alpha}\circ\mathbf{i}_1\circ\bar{\boldsymbol{\alpha}}'),\; t'=r \\
\boldsymbol{\alpha}=\bar{\mathbf{u}}\circ\mathbf{i}_1=\alpha_0+\alpha_1\mathbf{i}_1+\alpha_2\mathbf{i}_2+\alpha_3\mathbf{i}_3=u_1+u_0\mathbf{i}_1-u_3\mathbf{i}_2+u_2\mathbf{i}_3 \\
r=\|\boldsymbol{\alpha}\|=\|\mathbf{u}\|=\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2,\; \mathbf{p}_X=p_1{}^+\mathbf{i}_1+p_2{}^+\mathbf{i}_2+p_3{}^+\mathbf{i}_3
\end{gathered}\tag{2.12}$$

В уравнениях (2.12) штрих означает дифференцирование по фиктивному времени t^*, $\boldsymbol{\alpha}$, h, t — неизвестные функции независимой переменной t^*; проекции $p_i{}^+$ вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения на оси координатного трехгранника X являются заданными функциями реального времени; ω_1 и ε_1 — проекции векторов угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ трехгранника Y на ось BY_1, заданные как функции переменных t, α_j, α_j'.

Для нахождения проекций радиус-вектора $\mathbf{r}$ и вектора скорости $\mathbf{v}$ центра масс тела B на оси системы координат X через величины α_j и α_j' необходимо воспользоваться соотношениями

$$\mathbf{r}_X=\boldsymbol{\alpha}\circ\mathbf{i}_1\circ\bar{\boldsymbol{\alpha}},\quad \mathbf{v}_X=r^{-1}(\boldsymbol{\alpha}'\circ\mathbf{i}_1\circ\bar{\boldsymbol{\alpha}}+\boldsymbol{\alpha}\circ\mathbf{i}_1\circ\bar{\boldsymbol{\alpha}}')\tag{2.13}$$

Полагая $\omega_1\equiv0$ и $\varepsilon_1\equiv0$, из уравнений (2.12) получаем кватернионную форму известных регулярных уравнений пространственной задачи двух тел [1]:

$$\boldsymbol{\alpha}''+{}^1/_2h\boldsymbol{\alpha}=-{}^1/_2r\mathbf{p}_X\circ\boldsymbol{\alpha}\circ\mathbf{i}_1,\; h'=-\mathbf{p}_X\cdot(\boldsymbol{\alpha}'\circ\mathbf{i}_1\circ\bar{\boldsymbol{\alpha}}+\boldsymbol{\alpha}\circ\mathbf{i}_1\circ\bar{\boldsymbol{\alpha}}'),\; t'=r$$

Уравнение (2.12) представляет собой кватернионную форму регулярных уравнений пространственной задачи двух тел, полученных в [2]. Указанный их вывод отличается от приведенного в [2] большей компактностью и использует хорошо разработанный кватернионный формализм.

Отметим, что предложенный в [2] и развитый в данной работе подход к регуляризации, основанный на кватернионном способе описания движения, в отличие от подхода, описанного в [1], позволяет дать ясную кинематическую интерпретацию регуляризующему преобразованию, раскрывает геометрический смысл его неоднозначности и позволяет получить более общие регулярные уравнения пространственной задачи двух тел. В связи с этим приведем следующее высказывание авторов работы [1] (см. с. 288): «любая попытка заменить теорию KS-матриц более популярной теорией матриц кватернионов приводит поэтому к неудаче или во всяком случае к очень громоздкому формализму». Работа [2] и данная работа опровергают эту точку зрения и показывают эффективность применения для регуляризации как кватернионного формализма Гамильтона, так и формализма, использующего аппарат кватернионных матриц.

3. Представляется интересным выяснить, может ли быть достигнута регуляризация уравнения (2.1), если не использовать переменные u_j Кустаанхеймо — Штифеля, определяемые соотношением (2.2), но осуществить такие же преобразования уравнения (2.1), как и рассмотренные в п. 2: переход от поступательно перемещающейся системы координат к вращающейся, увеличение размерности системы за счет введения вместо времени t новой независимой переменной t^*, а также за счет введения в качестве новой переменной кеплеровской энергии $-h$.

Для этого запишем дифференциальное уравнение (2.1) пространственной задачи двух тел в произвольно вращающейся системе координат Y:

$$(d\mathbf{v}/dt)_1+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}+\mu r^{-3}\mathbf{r}=\mathbf{p},\quad (d\mathbf{r}/dt)_1+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}=\mathbf{v} \tag{3.1}$$

Здесь $(d/dt)_1$ — символ локального дифференцирования в системе координат Y.

Если вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ известен как функция t, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ и задан своими проекциями ω_i в системе координат Y, а вектор возмущающего ускорения $\mathbf{p}$ также задан своими проекциями p_i в этой системе координат, то интегрирование уравнений (3.1) при заданных начальных условиях $y_{i0}=y_i(t_0)$, $v_{i0}=v_i(t_0)$ позволяет находить проекции y_i и v_i векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ на оси системы координат Y. Однако вектор $\mathbf{p}$ задан своими проекциями p_i^+ в системе координат X, в этой же системе координат необходимо знать проекции x_i и v_i^+ векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$. Поэтому уравнения (3.1) необходимо дополнить кинематическим уравнением[2]

$$2d\lambda/dt=\lambda\circ\omega_Y \tag{3.2}$$

и алгебраическими соотношениями

$$\mathbf{p}_Y=\bar{\lambda}\circ\mathbf{p}_X\circ\lambda,\quad \mathbf{r}_X=\lambda\circ\mathbf{r}_Y\circ\bar{\lambda},\quad \mathbf{v}_X=\lambda\circ\mathbf{v}_Y\circ\bar{\lambda} \tag{3.3}$$

Кроме того, необходимо задать начальную ориентацию трехгранника Y относительно X.

Сообщим системе координат Y такое угловое движение, при котором ось BY_1 во все время движения будет направлена вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$. В этом случае $\mathbf{r}=r\mathbf{e}_1$, где $\mathbf{e}_1$ — орт оси BY_1, и уравнения (3.1) в скалярной записи примут вид

$$d^2r/dt^2-r(\omega_2^2+\omega_3^2)+r^{-2}\mu=p_1 \tag{3.4}$$

$$2\omega_3 dr/dt+rd\omega_3/dt+r\omega_1\omega_2=p_2 \tag{3.5}$$

$$2\omega_2 dr/dt+rd\omega_2/dt-r\omega_1\omega_3=-p_3$$

Учтем, что

$$dr/dt=v_1,\quad r\omega_3=v_2,\quad -r\omega_2=v_3 \tag{3.6}$$

а также выражение (2.5) для кеплеровской энергии $-h$. Тогда уравнение (3.4) можно представить в виде

$$dv_1/dt+r^{-1}[h+{}^1/_2v_1^2-{}^1/_2r^2(\omega_2^2+\omega_3^2)]=p_1,\quad dr/dt=v_1 \tag{3.7}$$

Присоединим к уравнениям (3.5), (3.7) уравнение (2.6) и перейдем в этих уравнениях к фиктивному времени t^* по первой из формул (2.4). В результате, принимая во внимание равенства (3.6), получим

$$v_1'+h+{}^1/_2v_1^2-{}^1/_2r^2(\omega_2^2+\omega_3^2)=rp_1,\quad r'=rv_1 \tag{3.8}$$

$$\omega_3'+2\omega_3v_1+r\omega_1\omega_2=p_2,\quad \omega_2'+2\omega_2v_1-r\omega_1\omega_3=-p_3$$

$$h'=-r(p_1v_1+rp_2\omega_3-rp_3\omega_2),\quad t'=r$$

Здесь штрих по-прежнему означает дифференцирование по переменной t^*, а проекции p_i вектора $\mathbf{p}$ на оси системы координат Y выражаются через заданные проекции p_i^+ этого вектора на оси системы координат X в соответствии с первым из соотношений (3.3):

$$\mathbf{p}_Y=\bar{\lambda}\circ\mathbf{p}_X\circ\lambda \tag{3.9}$$

Перейдем также к фиктивному времени в кинематическом уравнении (3.2):

$$2\lambda'=r\lambda\circ\omega_Y \tag{3.10}$$

Уравнения (3.8)—(3.10) образуют замкнутую систему регулярных дифференциальных уравнений пространственной задачи двух тел относи-

[2] Разумеется, можно воспользоваться кинематическими уравнениями в другой форме, например кинематическими уравнениями Пуассона.

тельно неизвестных v_1, r, ω_2, ω_3, h, t, λ_j. Координаты x_i центра масс тела B и проекции v_i^+ его скорости на оси системы координат X определяются через найденные в результате интегрирования уравнений (3.8)–(3.10) величины r, v_1, ω_2, ω_3, λ_j по формулам, следующим из соотношений (3.3) и (3.6):

$$\mathbf{r}_X=r\lambda\circ\mathbf{i}_1\circ\bar{\lambda},\quad \mathbf{v}_X=\lambda\circ\mathbf{v}_Y\circ\bar{\lambda},\quad \mathbf{v}_Y=v_1\mathbf{i}_1+r\omega_3\mathbf{i}_2-r\omega_2\mathbf{i}_3 \tag{3.11}$$

Компонента ω_1 в уравнениях (3.8) задается как функция величин t, r, v_1, ω_2, ω_3, h, подлежащих определению. Для $\omega_1=0$ уравнения (3.8), (3.10) упрощаются.

Заметим, что из уравнения (3.4) можно получить известное [1] регулярное уравнение для расстояния r

$$r''+2hr=\mu+r^2p_1$$

Однако полной регуляризации при использовании этого уравнения достичь не удается. Действительно, вводя новые переменные[3] $s_2=rv_2=r^2\omega_3$, $s_3=rv_3=-r^2\omega_2$, уравнения (3.2)–(3.5) можно привести к виду

$$r''+2hr=\mu+r^2p_1,\quad s_2'-r\omega_1s_3=r^2p_2 \tag{3.12}$$
$$s_3'+r\omega_1s_2=r^2p_3,\quad h'=-p_1r'-p_2s_2-p_3s_3,\quad t'=r$$
$$2\lambda'=r^{-1}\lambda\circ(r^2\omega_1\mathbf{i}_1-s_3\mathbf{i}_2+s_2\mathbf{i}_3),\quad \mathbf{p}_Y=\bar{\lambda}\circ\mathbf{p}_X\circ\lambda$$
$$\mathbf{r}_X=r\lambda\circ\mathbf{i}_1\circ\bar{\lambda},\quad \mathbf{v}_X=r^{-1}\lambda\circ(r'\mathbf{i}_1+s_2\mathbf{i}_2+s_3\mathbf{i}_3)\circ\bar{\lambda} \tag{3.13}$$

Видно, что достигается лишь частичная регуляризация: регуляризуются лишь динамические уравнения (3.12), в кинематическом же уравнении (3.13) появляется нерегулярность, обусловленная «опасным» множителем r^{-1}.

Отметим, что уравнения (3.12), (3.13) оказываются удобными в ряде случаев. Так, полагая $\omega_1=0$, из этих уравнений легко установить, что для невозмущенного кеплеровского движения (когда $p_i=0$) вектор $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости вращения системы координат Y постоянен по направлению в этой системе координат. Это позволяет предложить отличный от рассмотренного в [1] способ построения универсального решения задачи двух тел для трех типов невозмущенного кеплеровского движения. Действительно, уравнения (3.12) для невозмущенного кеплеровского движения дают $s_2=\mathrm{const}$, $s_3=\mathrm{const}$, $h=\mathrm{const}$. Общее решение первого уравнения системы (3.12) в этом случае можно записать вне зависимости от знака коэффициента h, если использовать функции Штумпфа [1]. Кинематическое же уравнение (3.13) легко интегрируется в силу указанного свойства вектора ω.

Рассмотренные в пп. 2 и 3 способы регуляризации имеют много общего: для достижения регуляризации осуществляется переход от поступательно перемещающейся системы координат к вращающейся, одна из осей которой направлена по радиус-вектору $\mathbf{r}$, вместо реального времени в качестве независимой переменной вводится «фиктивное» время, а также вводится новая переменная — кеплеровская энергия. Вместе с тем второй способ существенно отличается от первого: в нем не используется преобразование Кустаанхеймо — Штифеля (2.2). Основное достоинство использования переменных u_j заключается в том, что регулярные уравнения (2.12) пространственной задачи двух тел в этих переменных для $\omega_1=0$, $\varepsilon_1=0$ изоморфны уравнениям возмущенного осциллятора, а в случае невозмущенного кеплеровского движения — уравнениям гармонического осциллятора. Регулярные уравнения (3.8)–(3.10) второго способа такими свойствами не обладают. Однако они более наглядны и более просты в случае, когда $\omega_1\neq0$, $\varepsilon_1\neq0$. (Этот общий случай регулярных уравнений требует отдельного рассмотрения для того, чтобы обоснованно установить такие зависи-

[3] Для кеплеровского невозмущенного движения величины s_2, $-s_3$ являются проекциями векторного интеграла площадей $\mathbf{s}$ на оси системы координат Y.

мости $\omega_1=\omega_1(t, \mathbf{r}, \mathrm{v})$, $\varepsilon_1=\varepsilon_1(t, \mathbf{r}, \mathrm{v})$, при которых численное интегрирование регулярных уравнений дает наилучшую точность.) Отметим также, что алгебраическое соотношение (2.13) первого способа для определения скорости тела B через переменные u_j имеет особенность при $r=0$, в то время как ни одно из алгебраических соотношений (3.11) второго способа такой особенности не имеет.

Подробный сравнительный анализ предлагаемых регулярных уравнений выходит за рамки данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stiefel E. L., Scheifele G.* Linear and regular celestial mechanics. B.: Springer, 1971. 301 p.— Рус. перев.: М.: Наука, 1975. 303 с.
2. *Челноков Ю. Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 6, с. 12–21.
3. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
4. *Диментберг Ф. М.* Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 327 с.
5. *Челноков Ю. Н.* Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 1, с. 32–39.
6. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
7. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 799 с.

Саратов

Поступила в редакцию 13.V.1982