

УДК 539.3

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ С РАЗРЕЗАМИ

ГРИНГАУЗ М. Г.

Для использования методов механики разрушения [1] важно, в частности, уметь определять напряженно-деформированное состояние вблизи концов разрезов в рамках классической модели упругого тела. Случаи расположения разрезов полностью (включая концы) в однородной среде изучены в двумерной постановке к настоящему времени достаточно полно [2].

Большой интерес, особенно в связи с широким распространением композиционных материалов, представляют задачи о разрезах частично или полностью расположенных на линиях раздела сред с различными упругими свойствами. Не останавливаясь здесь на многочисленных работах (указания на некоторые из них можно найти в [3–5]), посвященных такого рода задачам в случае прямолинейных, круговых и эллиптических разрезов и линий раздела, изложим кратко основные известные результаты, непосредственно касающиеся развиваемого в данной статье подхода (далее предполагается, что кривизны гладких дуг удовлетворяют условию Гельдера).

В [6] при рассмотрении задачи об упругом равновесии плоской изотропной среды с инородным включением, ограниченным произвольным гладким контуром, были построены интегральные представления (в виде интегралов типа Коши) для комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили  $\phi(z)$  и  $\psi(z)$ , удовлетворяющие условию непрерывности вектора напряжения при переходе через линию раздела сред, и выписано сингулярное интегральное уравнение задачи. В [7] было отмечено, что поскольку полученные в [6] интегральные представления для комплексных потенциалов обеспечивают непрерывность вектора напряжения при переходе через линию интегрирования, то они могут быть использованы в задачах о разрезах, где необходимо выполнение этого условия. Там же, в [7], выписаны сингулярные интегральные уравнения задач об упругом равновесии плоской изотропной среды с произвольными гладкими разрезами и плоской изотропной кусочно-однородной среды с разрезами, расположенными на прямой линии раздела.

В последующих работах [4, 8–10] использовались комплексные потенциалы  $\Phi(z) = \phi'(z)$  и  $\Psi(z) = \psi'(z)$ , интегральные представления для которых, так же как и в [6], выбирались из условия непрерывности вектора напряжения при переходе через линию интегрирования. В [8, 9] было получено сингулярное интегральное уравнение плоской задачи теории упругости для изотропной среды с произвольными гладкими разрезами, в [10] – для изотропной среды с инородным включением, ограниченным произвольным гладким контуром, в [4] – для изотропной среды с инородным включением, ограниченным произвольным гладким контуром, когда на линии раздела материалов имеется разрез.

Задача о продольном сдвиге кусочно-однородной среды с разрезами, расположенными на произвольной гладкой линии раздела материалов, рассмотрена в [11].

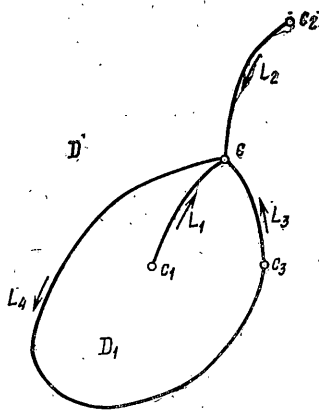
Общий подход к решению двумерных задач теории упругости для кусочно-однородной среды с разрезами, основанный на представлениях [4, 6–10], был предложен в [5].

В публикуемой статье, являющейся развитием [5], получены интегральные уравнения плоской задачи и задачи о продольном сдвиге изотропной кусочно-однородной среды с разрезами, когда граница области (объединение разрезов и линий раздела материалов) есть произвольная кусочно-гладкая линия. Такая постановка охватывает случаи инородного включения с кусочно-гладким контуром, разреза с точкой излома, ветвящегося разреза, расположения его на линии раздела материалов, выхода на эту линию или пересечения с ней. Изложение, чтобы сделать возможным применение полученных здесь уравнений в теории регулярно-армированных сред [12], ведется для кусочно-однородной среды с регулярной (двокопериодической) структурой. Случай конечной области (конечное число включений и разрезов) следует отсюда как частный.

**1. Формулировка краевых задач. Выбор представлений для комплексных потенциалов.** Пусть упругие и геометрические свойства трехмерной изотропной кусочно-однородной среды, отнесенной к некоторой прямоугольной системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , неизменны в направлении оси  $x_3$ . В частности, поверхности раздела различных материалов и поверхности разрезов перпендикулярны плоскости  $x_1Ox_2$ .

Распределение упругих и геометрических свойств среды в плоскости  $x_1Ox_2$  предполагаем двоякопериодическим.

Как следует из результатов [13, 14], важную роль при построении осредненных уравнений, описывающих поведение такой структуры, играет двоякопериодическое решение, когда компонента  $e_{33}$  тензора деформации не зависит от всех координат, а остальные компоненты не зависят от координаты  $x_3$ . Такое напряженное состояние распадается на два двумерных линейно-независимых [15]: обобщенную плоскую деформацию и продольный сдвиг.



В соответствии с этим дальнейшее рассмотрение будем вести в плоскости комплексной переменной  $z=x_1+ix_2$ . Под положительной касательной к какой-либо дуге, лежащей в этой плоскости, будем понимать касательный вектор, направление которого совпадает с выбранным положительным направлением обхода дуги, под положительной нормалью — перпендикулярный к дуге вектор, направленный вправо, если смотреть в положительном направлении обхода, под углом между касательной и осью  $x_1$  — отсчитываемый от этой оси до положительной касательной против часовой стрелки угол.

Для описания обобщенной плоской деформации используем комплексные потенциалы Колосова — Мусхелишвили [15]:

Для описания продольного сдвига используем аналитическую функцию [15]:

$$\begin{aligned} 2\mu(u_1+iu_2) &= \kappa\Phi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\Psi(z)} - 2\mu\nu e_{33}z \\ N - iT &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + [\overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \exp(2i\theta) \\ \Phi(z) &= \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z), \quad \kappa = 3 - 4\nu \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\mu$  и  $\nu$  — модуль сдвига и коэффициент Пуассона среды;  $u_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) — компоненты вектора перемещения;  $N$  и  $T$  из (1.1) — проекции на положительную нормаль и касательную вектора напряжения (плоская задача), действующего в точке  $z$  на какую-либо дугу со стороны положительной нормали;  $T$  из (1.2) — касательное напряжение (продольный сдвиг), действующее в точке  $z$  на какую-либо дугу со стороны положительной нормали;  $\theta$  — угол между касательной к дуге и осью  $x_1$ .

Через  $\omega_1$  и  $\omega_2$  обозначим основные периоды структуры. Предполагается, что  $\omega_1=l_1>0$ ,  $\omega_2=l_2 \exp(i\alpha)$ ,  $l_2>0$ ,  $0<\alpha<\pi$ . Построенный на периодах  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  параллелограмм носит название основного параллелограмма периодов. В силу принятых допущений о двоякопериодичности структуры и напряженного состояния последнее достаточно исследовать лишь в пределах основного параллелограмма периодов.

Пусть в основном параллелограмме периодов имеется простой замкнутый кусочно-гладкий контур  $\Gamma$  с одной угловой точкой  $c$ . Упругие постоянные среды внутри контура  $\Gamma$  (область  $D_1$  — включение) и вне (область  $D$  — матрица) различны и равны  $\mu_1$ ,  $\nu_1$  и  $\mu$ ,  $\nu$  соответственно. Из точки  $c$  к точ-

кам  $c_1, c_2, c_3$  выходят три гладких разреза:  $L_1$  — в область  $D_1$ ,  $L_2$  — в область  $D$ ,  $L_3$  — вдоль контура  $\Gamma$  (фиг. 1).

Берега разрезов свободны от усилий, на  $L_4 = \Gamma \setminus L_3$  имеет место идеальный контакт материалов. Кривизну контура  $\Gamma$  в окрестности точки  $c_3$  и кривизны всех дуг  $L_j$  считаем удовлетворяющими условию Гельдера. Точки  $c, c_1, c_2, c_3$  будем называть узлами; под границей  $L$  понимается объединение всех дуг  $L_j$  ( $j=1, \dots, 4$ ).

Требуется определить кусочно-голоморфные функции  $\Phi(z), \Psi(z), F(z)$ , обеспечивающие двоякопериодическое распределение компонент тензора напряжения в структуре и удовлетворяющие в отличных от узлов точках границы  $L$  следующим краевым условиям:

(на разрезах) в задаче об обобщенной плоской деформации

$$(N-iT)^+ = (N-iT)^- = 0 \quad (1.3)$$

в задаче о продольном сдвиге

$$T^+ = T^- = 0 \quad (1.4)$$

(на участке идеального контакта) в задаче об обобщенной плоской деформации

$$(N-iT)^+ = (N-iT)^- \quad (1.5)$$

$$d[(u_1+iu_2)^+ - (u_1+iu_2)^-]/ds = 0$$

в задаче о продольном сдвиге

$$T^+ = T^-, \quad d(u_3^+ - u_3^-)/ds = 0 \quad (1.6)$$

Верхними индексами (+) и (-) в краевых условиях отмечены левые и правые предельные значения по отношению к выбранному положительному направлению обхода (на фигуре указано стрелками),  $s$  — дуговая абсцисса.

Видоизменяя по схеме [16] представление [5] для комплексных потенциалов  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  таким образом, чтобы вычисленные по ним компоненты тензора напряжения были двоякопериодическими функциями, запишем

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(\tau) \zeta(\tau-z) d\tau + A_L + A^{(\infty)} + \begin{cases} E/\lambda & (z \in D_1) \\ 0 & (z \in D) \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(\tau)} \zeta(\tau-z) \overline{d\tau} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(\tau) [\bar{\tau} \rho(\tau-z) - \rho_1(\tau-z)] d\tau + B_L + B^{(\infty)}$$

$$E = \frac{i}{4\pi} \operatorname{Re} \int_{L_4} \frac{\omega(\tau) d\tau}{\tau - z_1}, \quad \lambda = \frac{\mu}{11}$$

$$A^{(\infty)} = 1/4 (\langle \sigma_{11} \rangle + \langle \sigma_{22} \rangle), \quad B^{(\infty)} = 1/2 (\langle \sigma_{22} \rangle - \langle \sigma_{11} \rangle + 2i \langle \sigma_{12} \rangle)$$

Для отыскания функции  $F(z)$  используем представление [2], выведенное при рассмотрении задачи о продольном сдвиге изотропной среды с разрезами, полностью расположенными в однородной среде. Примем

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L p(\tau) \exp[-i\theta(\tau)] \zeta(\tau-z) d\tau + E_L + E^{(\infty)} \quad (1.8)$$

$$E^{(\infty)} = \langle \sigma_{13} \rangle - i \langle \sigma_{23} \rangle, \quad \operatorname{Im} p(\tau) = 0$$

В (1.7), (1.8)  $\zeta(z)$  и  $\rho(z)$  — дзета-функция и ро-функция Вейерштрасса [17],  $\rho_1(z)$  — специальная мероморфная функция Натансона [18],  $z_1$  — произвольная фиксированная точка из области  $D_1$ ,  $\theta(\tau)$  — угол между касательной к  $L$  в точке  $\tau$  и осью  $x_1$ . Неизвестные комплексную  $\omega(\tau)$  и ве-

ществленную  $p(\tau)$  функции (плотности) считаем принадлежащими на  $L$  классу  $H^*$  [19] с узлами в точках  $c, c_1, c_2, c_3$ .

Чисто мнимая постоянная  $E$ , описывающая поворот включения как жесткого целого, введена в представлении (1.7) для того, чтобы полученное в следующем пункте интегральное уравнение краевой задачи (1.3); (1.5) было справедливо во всем диапазоне  $0 \leq \lambda < \infty$ . Отметим, что отсутствие чисто мнимого слагаемого в представлениях [4, 10] делает их, как показали численные эксперименты, плохо приспособленными и для исследования напряженного состояния кусочно-однородных сред с отличными от нуля, но достаточно малыми  $\lambda$ , например порядка  $1/100$  (такого порядка отношение упругих постоянных компонент характерно для многих композиционных материалов).

Соответствующий представлениям (1.7), (1.8) вектор перемещения является, вообще говоря, неоднозначным. Для однозначности вектора перемещения необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_L \omega(\tau) d\tau = 0, \quad \int_L p(\tau) \exp[-i\theta(\tau)] d\tau = 0 \quad (1.9)$$

которые в данном случае совпадают с необходимыми и достаточными условиями двоякопериодичности компонент тензора напряжения.

Величины  $\text{Re } A_L, B_L, E_L$  определим таким образом, чтобы соответствующие представлениям (1.7), (1.8) средние компоненты тензора напряжения в структуре [12] совпадали с постоянными  $\langle \sigma_{jk} \rangle$ , фигурирующими в этих представлениях, а величину  $\text{Im } A_L$  — таким образом, чтобы средний угол малого поворота в структуре был равен нулю [16]. Предполагая, что условия (1.9) выполняются, после некоторых преобразований находим

$$\begin{aligned} A_L &= \left( \frac{\eta_1}{l_1} - \frac{\pi}{S} \right) a + \frac{\pi}{S} \text{Re } b, & S &= l_1 l_2 \sin \alpha & (1.10) \\ B_L &= \frac{\pi}{S} \bar{a} + \left( \frac{\pi}{S} + \frac{\gamma_1 - \eta_1}{l_1} \right) a + 2 \left( \frac{\eta_1}{l_1} - \frac{\pi}{S} \right) \text{Re } b \\ E_L &= \text{Re} \left( \frac{2\pi c}{S} \right) - \frac{\eta_1 c}{l_1}, & c &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \tau p(\tau) \exp[-i\theta(\tau)] d\tau \\ a &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \tau \omega(\tau) d\tau, & b &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{\tau} \omega(\tau) d\tau \end{aligned}$$

где  $\eta_1$  и  $\gamma_1$  — некоторые постоянные, связанные соответственно с дзета-функцией Вейерштрасса [17] и функцией Натансона [18].

Схема [12] определения эффективных упругих постоянных регулярной структуры переносится на рассматриваемый случай без каких-либо существенных изменений.

**2. Интегральные уравнения краевых задач.** Представления (1.7), (1.8) сконструированы таким образом, что они автоматически удовлетворяют условию непрерывности вектора напряжения при переходе через границу  $L$ . Подставляя предельные значения представлений (1.7), (1.8) в оставшиеся краевые условия, а именно во вторые равенства из (1.3) — (1.6), приходим к сингулярным интегральным уравнениям с неподвижными особенностями (в узле  $c$ ) относительно искомых плотностей  $\omega(\tau)$  и  $p(\tau)$ .

Уравнение задачи об обобщенной плоской деформации имеет вид

$$\begin{aligned} A \omega(t) + \frac{B}{\pi i} \int_L \omega(\tau) \xi(\tau-t) d\tau + \frac{R}{2\pi i} \int_L K_1(t, \tau) \omega(\tau) d\tau + \\ + \frac{R}{2\pi i} \int_L \overline{K_2(t, \tau)} \overline{\omega(\tau)} d\tau - M\{t; \omega(\tau)\} = g(t) \quad (t \in L) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$K_1(t, \tau) = \zeta(\tau - t) \left[ \frac{\overline{\zeta(\tau - t)}}{\zeta(\tau - t)} h(t) - 1 \right], \quad h(t) = \frac{d\bar{t}}{dt}$$

$$K_2(t, \tau) = \zeta(\tau - t) \left[ \frac{(\tau - t)\rho(\tau - t)}{\zeta(\tau - t)} \overline{h(t)} - 1 \right] - \rho_1(\tau - t) \overline{h(t)}$$

$$M\{t; \omega(\tau)\} = 2B \operatorname{Re} A_L + 2i(\lambda e - A) \operatorname{Im} A_L + Rh(t) \overline{B}_L + eE$$

На участке идеального контакта  $2A = \kappa + 1 + \lambda(\kappa_1 + 1)$ ,  $2B = 1 - \kappa - \lambda(1 - \kappa_1)$ ,  $e = \kappa_1 + 1$ ,  $R = 1 - \lambda$ ,  $g(t) = 2BA^{(\infty)} + Rh(t) \overline{B^{(\infty)}} + 2\mu(\nu - \nu_1)e_{33}$ ; на разрезах  $A = e = 0$ ,  $B = R = 1$ ,  $g(t) = 2A^{(\infty)} + h(t) \overline{B^{(\infty)}}$ .

Уравнение задачи о продольном сдвиге следующее:

$$p(t) - \lambda^*/\pi \operatorname{Im} M\{t; p(\tau)\} - 2\lambda^* \operatorname{Re}[q(t)E_L] = \\ = 2\lambda^* \operatorname{Re}[q(t)E^{(\infty)}], \quad \lambda^* = (1 - \lambda)/(1 + \lambda) \quad (t \in L_4) \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} M\{t; p(\tau)\} - 2 \operatorname{Im}[q(t)E_L] = 2 \operatorname{Im}[q(t)E^{(\infty)}] \quad (t \in L_1 \cup L_2 \cup L_3)$$

$$M\{t; p(\tau)\} = \int_L p(\tau) \overline{q(\tau)} q(t) \zeta(\tau - t) d\tau, \quad q(t) = \exp[i\theta(t)]$$

Для того чтобы подчинить решения уравнений (2.1), (2.2) условиям однозначности вектора перемещений (1.9), поступим следующим образом. Обозначим через  $[u_1 + iu_2]_1$  и  $[u_3]_1$  приращения комбинации  $u_1 + iu_2$  и компоненты  $u_3$  на лежащем в  $D_1$  пути: левый берег разреза  $L_3$  от узла  $s_3$  до узла  $s$ , правый берег разреза  $L_1$  от узла  $s$  до узла  $s_1$ , левый берег разреза  $L_1$  от узла  $s_1$  до узла  $s$ . Через  $[u_1 + iu_2]$  и  $[u_3]$  обозначим приращения тех же функций на лежащем в  $D$  пути: правый берег разреза  $\overline{L}_3$  от узла  $s_3$  до узла  $s$ , левый берег разреза  $L_2$  от узла  $s$  до узла  $s_2$ , правый берег разреза  $L_2$  от узла  $s_2$  до узла  $s$  (левый и правый берега определены по отношению к указанному на фигуре стрелками положительному направлению обхода границы  $L$ ). Будем разыскивать решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условию

$$[u_1 + iu_2]_1 = [u_1 + iu_2] \quad (2.3)$$

а решение уравнения (2.2) — условию

$$[u_3]_1 = [u_3] \quad (2.4)$$

Поскольку при составлении интегральных уравнений (2.1), (2.2) были учтены вторые равенства из (1.5), (1.6), любое решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условию (2.3), и любое решение уравнения (2.2), удовлетворяющее условию (2.4), удовлетворяют условиям однозначности вектора перемещений (1.9).

Справедливы следующие утверждения: решение уравнения (2.1) в классе  $H^*$ , удовлетворяющее условию (2.3), если такое решение существует, единственно; решение уравнения (2.2) в классе  $H^*$ , удовлетворяющее условию (2.4), если такое решение существует, единственно.

Доказательство этих утверждений проводится аналогичными [12, 16] методами. При этом существенно используются теоремы о единственности решения исходных краевых задач [15] и то, что комплексные потенциалы разыскиваются в виде (1.7), (1.8).

Параметры (коэффициенты интенсивности напряжений [1]), характеризующие асимптотическое распределение компонент тензора напряжения вблизи узлов границы, определяются после решения уравнений (2.1), (2.2) по обычной схеме. Представления (1.7) и (1.8) подставляются в выражения  $(N - iT)$  из (1.1) и  $T$  из (1.2). Записываются формулы для асимптоти-

ческих значений встречающихся при этом интегралов типа Коши [19] и интегралов вида [5]:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\bar{\tau} - \bar{z}) \omega(\tau)}{(\tau - z)(\tau - \bar{z})} d\tau$$

Тем самым коэффициенты интенсивности напряжений оказываются выраженными (в явном виде) через значения плотностей  $\omega(\tau)$  и  $p(\tau)$ .

Отметим ряд частных ситуаций, описываемых представлениями (1.7), (1.8) и уравнениями (2.1), (2.2).

Если упругие постоянные среды внутри и вне контура  $\Gamma$  одинаковы, то из (2.1) и (2.2) следует, что  $\omega(\tau) = 0$  и  $p(\tau) = 0$  на  $L_4$ , и имеем представления и интегральные уравнения для ветвящихся разрезов в однородной среде.

Если отсутствуют разрезы  $L_1$  и  $L_2$ , то уравнения (2.1), (2.2) и представления (1.7), (1.8) соответствуют случаю инородных включений с кусочно-гладкими контурами, когда на линиях раздела материалов расположены разрезы. Если при этом также  $\lambda = 0$  (абсолютно жесткое включение), то получаем интегральные уравнения и представления смешанной задачи для области  $D$  с кусочно-гладкой границей: на  $L_3$  заданы усилия (нулевые), на  $L_4$  — перемещения (поворот включения как жесткого целого в плоскости  $x_1 O x_2$ , описываемый постоянной  $E$ ).

Если отсутствуют разрезы  $L_1$  и  $L_2$  и кривизна окрестности точки с контура  $\Gamma$  удовлетворяет условию Гельдера (случай инородных включений с гладкими контурами, когда на линиях раздела материалов расположены разрезы), то уравнения (2.1), (2.2) превращаются в классические сингулярные интегральные уравнения с разрывными коэффициентами [19]. Порядки особенностей функций  $\omega(\tau)$  и  $p(\tau)$  в узлах  $s_3$ , с находятся при этом из соответствующих уравнениям (2.1) и (2.2) задач сопряжения. Можно показать, используя методы [19], что в рассматриваемом случае уравнение (2.1) совместно с условием (2.3) и уравнение (2.2) совместно с условием (2.4) разрешимы единственным образом в классе  $H^*$  с порядками особенностей в узлах  $1/2 \pm i/(2\pi) \ln [(\lambda + \kappa)/(1 + \lambda \kappa_1)]$  и  $1/2$  соответственно.

Если в (1.7), (1.8), (2.1), (2.2) функции  $\xi(z)$  и  $\rho(z)$  заменить соответственно на функции  $1/z$  и  $1/z^2$  и отбросить слагаемые, содержащие функцию  $\rho_1$  и постоянные  $A_L, B_L, E_L$ , то приходим к случаю конечносвязной области. Средние напряжения  $\langle \sigma_{jk} \rangle$  будут при этом играть роль напряжений на бесконечности [15].

Представления типа (1.7), (1.8) могут быть с успехом использованы и при решении отличных от (1.3) — (1.6) краевых задач, если только там необходимо выполнение условия непрерывности вектора напряжения при переходе через границу. К такого рода задачам относятся, в частности, задача о частичном контакте берегов разреза, расположенного на линии раздела материалов [20], задача о соединении материалов при помощи клеевого слоя [21] и т. д. Получающиеся при этом интегральные уравнения могут содержать сопряженные значения искомым функций (плотностей) и в характеристической части.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
2. Саерук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. — Киев: Наукова думка, 1981. 324 с.
3. Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S. Numerical solution of singular integral equations. — In: Mechanics of fracture. V. 1. Methods of analysis and solutions of crack problems. Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1973, p. 368—425.
4. Ioakimidis N. I., Theocaris P. S. A curvilinear crack along the interface of two isotropic elastic media. — Rev. roum. sci. techn. Sér. méc. appl., 1978, t. 23, No. 4, p. 563—575.
5. Григолюк Э. И., Грингауз М. Г., Фильштинский Л. А. Об одном подходе к исследованию сингулярных полей напряжений в кусочно-однородной среде с ветвящимися разрезами. — Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 3, с. 567—570.
6. Sherman D. I. On the problem of plane strain in non-homogeneous media. — In: Non-homogeneity in elasticity and plasticity. N. Y.: Pergamon Press, 1959, p. 3—20.
7. Паргон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения основных пространственных и плоских задач упругого равновесия. — В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформируемых тел. Т. 8. М.: ВИНТИ, 1975, с. 5—84.
8. Фильштинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде. — Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5, с. 91—97.
9. Саерук М. П. О построении интегральных уравнений двумерных задач теории упругости для тела с криволинейными трещинами. — Физ.-хим. механ. материалов, 1976, т. 12, 6, с. 111—113.

10. *Theocaris P. S., Ioakimidis N. I.* The inclusion problem in plane elasticity.— *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1977, v. 30, No. 4, p. 437–448.
11. *Долгих В. Н., Фильштинский Л. А.* Продольный сдвиг композиционного материала с дефектами.— *Изв. АН СССР. МТТ*, 1980, № 4, с. 103–110.
12. *Грингауз М. Г., Фильштинский Л. А.* Теория упругого линейно-армированного композиционного материала.— *ПММ*, 1975, т. 39, вып. 3, с. 537–546.
13. *Бажалов Н. С.* Осреднение уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами.— В кн.: *Проблемы математической физики и вычислительной математики*. М.: Наука, 1977, с. 34–51.
14. *Бердичевский В. Л.* Об осреднении периодических структур.— *ПММ*, 1977, т. 41, вып. 6, с. 993–1006.
15. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
16. *Фильштинский Л. А.* К теории упругих неоднородных сред с регулярной структурой.— *ПММ*, 1973, т. 37, вып. 2, с. 262–273.
17. *Гуриц А., Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968. 648 с.
18. *Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.* Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
19. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
20. *Дундурс Дж., Комниноу М.* Обзор и перспективы исследования межфазной трещины.— *Механ. композитн. материалов*, 1979, № 3, с. 387–396.
21. *Веденева Н. Н., Клошников В. Д., Мазинг Р. И.* Задача о склейке двух полуплоскостей.— *Изв. АН СССР. МТТ*, 1974, № 1, с. 133–135.

Сумы

Поступила в редакцию  
15.IV.1982