МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1984

УДК 531.38

О ВЛИЯНИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ НА РЕШЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

КРОБКА Н. И., СВИРИДОВ М. В.

Среди аналитических методов интегрирования кинематических уравнений [1–4] особое место занимают асимптотические представления решения этих уравнений при «малых», в определенном смысле, возмущениях исходной задачи. Такой подход позволяет достаточно универсальным образом оценивать небольшие вариации кинематических параметров, обусловленные возмущениями угловой скорости твердого тела.

При исследовании влияния случайных возмущений их следует разделить на два разных по смыслу класса. К первому относятся возмущения, обусловленные внешним статистическим воздействием на твердое тело, а ко второму – наличием шумов измерения угловой скорости. Хотя в обоих случаях цели решения кинематической задачи, как правило, не совпадают, методы решения не носят принципиальных различий. Поэтому в публикуемой работе для определенности рассматриваются шумы измерений и исследуется погрешность определения углового положения твердого тела.

Известно, что в произвольном случае решение системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами дается мультипликативным интегралом [5]. Поэтому естественно аддитивным возмущениям угловой скорости ставить в соответствие мультипликативные возмущения матрицы оператора вращения, определяемой через кинематические параметры. Близкий подход предложен в [3, 4], где решение кинематической задачи представлено в виде бесконечного произведения определенным образом построенных операторов вращения (матриц направляющих косинусов) и решены вопросы о сходимости указанного представления и его преимуществах перед обычным методом последовательных приближений. Однако при случайных возмущениях (шумах) статистическое усреднение произведения операторов выполнить, как правило, труднее, чем суммы. В связи с этим представляется более удобным промежуточный подход, когда решение кинематических уравнений дается в виде оператора невозмущенного вращения, умноженного на некоторый оператор возмущения, заданный в виде обычного матрицанта [5].

В настоящей работе используются кинематические параметры Кейли – Клейна. Погрешность определения углового положения твердого тела характеризуется углом, на который надо «довернуть» рассчитанный инерциальный базис вокруг соответствующей эйлеровой оси, чтобы его положение совпало с невозмущенным положением [6]. Для получения конкретных результатов в качестве невозмущенного движения рассматривается «плоское» вращение твердого тела [1] и анализируются две статистические модели шумов измерения вектора абсолютной угловой скорости.

1. В параметрах Кейли – Клейна поворот твердого тела описывается унитарной унимодулярной матрицей u второго порядка. Зависимость u от времени дается кинематическим уравнением [1]:

$$du/dt=-{}^1/_2 i\omega u,\quad \omega=\omega_j\sigma_j \tag{1.1}$$

ω_j – компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}(t)$ угловой скорости вращения твердого тела, заданные в связанном базисе, и σ_j – спиновые матрицы Паули

$$\sigma_1=\begin{Vmatrix}0&1\\1&0\end{Vmatrix},\quad \sigma_2=\begin{Vmatrix}0&i\\-i&0\end{Vmatrix},\quad \sigma_3=\begin{Vmatrix}1&0\\0&-1\end{Vmatrix}$$

В (1.1) и в дальнейшем по немым латинским индексам предполагается суммирование.

В общем случае кинематическое уравнение для возмущенной матрицы u' может быть представлено в виде

$$du'/dt=-{}^1/_2 i(\omega+\mu\xi)u' \qquad (1.2)$$

Здесь $\xi=\xi_j\sigma_j$, ξ_j — компоненты векторного случайного процесса $\xi(t)$, описывающего шумы измерения угловой скорости твердого тела, и μ — безразмерный «малый» параметр, порядок величины которого рассматривается ниже.

Согласно сказанному, матрицу u' представим в виде $u'=uv$, где v — матрица оператора возмущения. В соответствии с (1.1) и (1.2) v удовлетворяет уравнению

$$dv/dt=-{}^1/_2 i\mu\varepsilon v \qquad (1.3)$$

с единичным начальным условием. В (1.3) введено обозначение

$$\varepsilon=u^+\xi u \qquad (1.4)$$

(u^+ — эрмитово сопряженная матрица). Решение (1.3) может быть представлено в виде матриканта

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{2}\mu\Gamma\right)^n E \qquad (1.5)$$

где E — единичная матрица и Γ — интегральный оператор, действующий на произвольную матрицу w по правилу

$$\Gamma w=\int_0^t dt_1\,\varepsilon(t_1)\,w(t_1) \qquad (1.6)$$

В случае плоского вращения твердого тела

$$\omega(t)=\mathbf{s}f(t) \qquad (1.7)$$

Здесь $\mathbf{s}$ — постоянный единичный вектор, направленный по оси вращения, $f(t)$ — произвольная функция. В этом случае решение (1.1) имеет вид

$$u=\exp\left(-\frac{i}{2}sF\right)=E\cos\frac{F}{2}-is\sin\frac{F}{2},\quad F(t)=\int_0^t dt_1 f(t_1). \qquad (1.8)$$

где $s=s_j\sigma_j$ и F — угол поворота твердого тела. Без существенного ограничения общности в (1.8) принято единичное начальное условие.

В соответствии с теоремой Эйлера любая унитарная унимодулярная матрица может быть представлена аналогично (1.8). В частности

$$v=E\cos(\varphi/2)-ip\sin(\varphi/2) \qquad (1.9)$$

Параметр φ имеет смысл угла, на который (согласно $u'=uv$) надо довернуть рассчитанный инерциальный базис, чтобы его положение совпало с невозмущенным положением, p — матрица, соответствующая единичному вектору $\mathbf{p}(t)$, направленному вдоль эйлеровой оси, вокруг которой этот угол отсчитывается. Из (1.9) следует

$$\varphi=2\arccos({}^1/_2\mathrm{Sp}\,v) \qquad (1.10)$$

Угол φ как случайная величина может быть охарактеризован набором моментов $\langle\varphi^m\rangle$, $m=1, 2, \ldots$, где $\langle\ \rangle$ означают статистическое усреднение. Соотношения (1.10) и (1.5) в принципе позволяют представить эти моменты в виде асимптотических рядов по степеням μ, однако в силу неоднозначности выбора либо знака φ, либо направления $\mathbf{p}$ эйлеровой оси наиболее просто операция усреднения выполняется только для четных m.

В этом случае усредняемый ряд содержит лишь целые положительные степени членов матриканта. Поэтому в дальнейшем для оценки погрешности углового положения твердого тела используется второй момент $M=\langle\varphi^2\rangle$.

Согласно (1.5) и (1.10)

$$\varphi^2=\mu^2H_2+{}^1/_2 i\mu^3H_3+{}^1/_4\mu^4({}^1/_{12}H_2{}^2-H_4)+\ldots \tag{1.11}$$

$$H_n=\mathrm{Sp}\,(\Gamma^nE) \tag{1.12}$$

Усреднение этого ряда позволяет получить ряд для искомого момента

$$M(t)=\sum_{n=2}^{\infty}\mu^nM_n(t) \tag{1.13}$$

2. Как следует из (1.12) и (1.6), для конкретного расчета какого-либо слагаемого M_n в (1.13) необходимо задать моменты порядка n векторной случайной функции $\xi(t)$. Далее рассматриваются возмущения, обусловленные аддитивными помехами, возникающими в процессе преобразования измеряемых величин. Предполагается, что эти помехи независимы по каждому каналу измерения и имеют вид стационарных нормальных белых шумов с одинаковыми характеристиками (например, шумы усилителей или шумы квантования [7]). По способу измерения различаются два варианта. В первом измеряются величины, пропорциональные компонентам вектора угловой скорости. В этом случае матрица $R_{jk}(t_1, t_2)$ смешанных моментов второго порядка функции $\xi(t)$ имеет вид

$$R_{jk}=\langle\xi_j(t_1)\,\xi_k(t_2)\rangle=K\delta_{jk}\delta(t_1-t_2) \tag{2.1}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера и K — деленная на квадрат масштабного коэффициента спектральная плотность помехи. Во втором варианте измеряются величины, пропорциональные компонентам вектора

$$\theta(t)=\int_0^t dt_1\,\omega(t_1)$$

«кажущегося» поворота [1]. Тогда при том же, как в первом варианте, масштабном коэффициенте

$$R_{jk}=KT^2\delta_{jk}\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2}\delta(t_1-t_2) \tag{2.2}$$

где T — постоянная времени операции дифференцирования.

3. Как следует из (1.11), первый неисчезающий вклад в M дает слагаемое M_2 порядка μ^2. Если учесть, что $\sigma_j\sigma_k=\delta_{jk}E-ie_{jkl}\sigma_l$, то в приближении (1.7) выражение (1.4) может быть преобразовано: $\varepsilon(t)=g_{jk}(t)\,\xi_j(t)\sigma_k$, $g_{jk}(t)=g_{jk}(F(t))=s_js_k+(\delta_{jk}-s_js_k)\cos F+e_{jkl}s_l\sin F$, где e_{jkl} — символ Леви-Чивита. Вводя обозначения $F_1=F(t_1)$, $F_2=F(t_2)$, $F_{12}=F_1-F_2$ и воспользовавшись свойством

$$g_{jl}(F_1)\,g_{kl}(F_2)=g_{jk}(F_{12}) \tag{3.1}$$

нетрудно получить следующее выражение для H_2:

$$H_2(t)=2\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\,g_{jk}(F_{12})\,\xi_j(t_1)\,\xi_k(t_2) \tag{3.2}$$

Если движение твердого тела детерминированное, то усреднение (3.2) дает функциональную зависимость $M_2=\langle H_2\rangle$ от R_{jk}. Особенно простой вид эта зависимость приобретает при некоррелированных компонентах вектора ξ, имеющих одинаковые функции распределения. В этом случае

$$R_{jk}(t_1, t_2) = R(t_1, t_2)\delta_{jk} \tag{3.3}$$

$$M_2 = 2\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 (1+2\cos F_{12}) R(t_1, t_2) \tag{3.4}$$

Если движение твердого тела является случайным или задано вероятностной моделью и, кроме того, статистически не зависит от ξ, то для определения M_2 необходимо усреднение синуса и косинуса, входящих в (3.2). В частном случае, когда $f(t)$ является нормальным случайным процессом, имеющим корреляционную функцию $\psi(t_1, t_2)$, можно получить [8]:

$$\langle\cos F_{12}\rangle = \cos(\langle F_{12}\rangle)\exp\left\{-\frac{1}{2}\Delta^2(t_1, t_2)\right\}, \quad \Delta^2 = \int_{t_2}^{t_1} d\tau_1 \int_{t_2}^{t_1} d\tau_2\, \psi(\tau_1, \tau_2) \tag{3.5}$$

При условии (3.3) соответствующая формула для M_2 принимает вид

$$M_2 = 2\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \left[1+2\cos(\langle F_{12}\rangle)\exp\left\{-\frac{1}{2}\Delta^2(t_1, t_2)\right\}\right] R(t_1, t_2)$$

Когда $\xi(t)$ и $f(t)$ — стационарные случайные процессы, то появляющаяся под интегралом в (3.2) при усреднении функция $W(t_1, t_2) = \langle g_{jk}(F_{12})\xi_j(t_1)\xi_k(t_2)\rangle$ будет зависеть только от $\tau = t_1 - t_2$. В этом случае полезно соотношение

$$M_2(t) = Bt - C + Q(t)$$

$$B = \int_0^\infty d\tau\, W(\tau), \qquad C = \int_0^\infty d\tau\, \tau W(\tau), \qquad Q = \int_t^\infty d\tau (\tau - t) W(\tau) \tag{3 5}$$

Отсюда видно, что если $|W(\tau)| < \mathrm{const}/\tau^2$ при $\tau \to \infty$, то при больших t будет $Q \to 0$ и M_2 начинает расти линейно по времени с коэффициентом пропорциональности B.

В частном случае постоянного вращения твердого тела со скоростью $f = f_0 = \mathrm{const}$ и некоррелированных стационарных шумах ξ_j, имеющих одинаковую спектральную плотность $G(\nu)$:

$$B = G(0) + 2G(f_0) \tag{3.6}$$

Отсюда видно, что рост погрешности не зависит от скорости вращения твердого тела только в случае, когда ξ_j — белые шумы ($G = \mathrm{const}$).

Для конкретных значений (2.1), (2.2) матрицы R_{jk} соотношение (3.4) принимает вид для первого и второго случая соответственно

$$M_2 = 3Kt,$$

$$M_2 = 2KT^2 \int_0^t dt_1 f^2(t_1) \tag{3.7}$$

Приведенные соотношения показывают, что в первом варианте зависимость погрешности определения углового положения твердого тела от вида его движения отсутствует, а во втором — эта зависимость является существенной, поскольку скорость роста погрешности становится пропорциональной среднему за время измерения квадрату скорости вращения твердого тела. Если вращение твердого тела случайно и стационарно, то вместо второго уравнения (3.7) будет

$$M_2 = 2KT^2\langle f^2\rangle t \tag{3.8}$$

т. е., как и для первого варианта, линейный по времени рост второго момента.

4. Для оценки качества рассмотренного приближения или исследования тенденции накопления погрешности определения углового положения твердого тела при длительных временах измерения представляет интерес расчет следующих членов ряда (1.13). Как следует из (1.12), нечетные слагаемые в (1.13) отличны от нуля при не равных нулю нечетных моментах случайной функции $\xi(t)$. В случае гауссовых шумов это означает наличие систематической погрешности измерения угловой скорости. Если такая погрешность отсутствует, то зависимость M от μ является четной и следующая после M_2 поправка имеет порядок μ^4.

Расчет M_4 в общем случае является громоздким. Однако он упрощается, если $\xi_j(t)$ — независимые нормальные процессы, имеющие одинаковые функции корреляции, когда [8]:

$$\begin{gathered}\langle\xi_m(t_1)\xi_j(t_2)\xi_k(t_3)\xi_l(t_4)\rangle=R(t_1,t_2)R(t_3,t_4)\delta_{mj}\delta_{kl}+\\+R(t_1,t_3)R(t_2,t_4)\delta_{mk}\delta_{jl}+R(t_1,t_4)R(t_2,t_3)\delta_{ml}\delta_{jk}\end{gathered}\tag{4.1}$$

С учетом этого соотношения усреднение третьего слагаемого в (1.11) приводит к выражению

$$\begin{gathered}M_4=-\frac{2}{3}\int\limits_0^t dt_1\int\limits_0^{t_1}dt_2\int\limits_0^{t_2}dt_3\int\limits_0^{t_3}dt_4\{(\cos F_{12}+\cos F_{34}+\cos F_{12}\cos F_{34}-\\-3\sin F_{12}\sin F_{34})R(t_1,t_2)R(t_3,t_4)-2(\cos F_{13}+\cos F_{24}+\\+\cos F_{13}\cos F_{24})R(t_1,t_3)R(t_2,t_4)+(\cos F_{14}+\cos F_{23}+\cos F_{14}\cos F_{23}+\\+3\sin F_{14}\sin F_{23})R(t_1,t_4)R(t_2,t_3)\end{gathered}\tag{4.2}$$

Для рассмотренных в п. 2 примеров подстановка (2.1), (2.2) в (4.2) дает для первого и второго вариантов соответственно

$$M_4=-\frac{1}{4}K^2t^2\tag{4.3}$$

$$M_4=6K^2Tt-\frac{5}{3}K^2T^3\int\limits_0^t dt_1 f^2(t_1)-\frac{1}{12}K^2T^4\left[\int\limits_0^t dt_1 f^2(t_1)\right]^2\tag{4.4}$$

В случае стационарного движения твердого тела вместо (4.4) будет

$$M_4=\frac{1}{6}K^2T\{(36-10T^2\langle f^2\rangle-T^3B)t+T^3[C-Q(t)]\}\tag{4.5}$$

где B, C и Q определяются соотношениями (3.5), если положить $W(\tau)=\langle f^2(0)f^2(\tau)\rangle$.

Сравнение (4.5) с (3.8) показывает, что при случайном стационарном движении твердого тела темп роста погрешности для случая (2.2) оказывается одним и тем же для обоих приближений: M_2 и M_4 пропорциональны t.

Из первого выражения (3.7) и (4.3) видно, что в случае (2.1) M с точностью до μ^4 не зависит от скорости вращения твердого тела. Этот результат справедлив для всего ряда (1.13), если возмущения ξ_j являются независимыми нормальными белыми шумами. Такой вывод следует из «расцепления» корреляций произвольного порядка, аналогичного (4.1), для гауссовых процессов и свойства (3.1) для g_{ik}. Действительно, любая пара $\langle\varepsilon(t_n)\varepsilon(t_m)\rangle=g_{ik}(t_n)g_{jl}(t_m)\sigma_k\sigma_l\langle\xi_i(t_n)\xi_j(t_m)\rangle\sim g_{kl}(F(t_m)-F(t_n))\sigma_k\sigma_l\delta(t_m-t_n)=g_{kl}(0)\sigma_k\sigma_l\delta(t_m-t_n)$ не зависит от F, т. е. от движения твердого тела.

5. Если рассматривать детерминированные возмущение ξ и движение $\boldsymbol{\omega}$, то для оценки μ удобно воспользоваться тем обстоятельством, что каждый из четырех скалярных рядов (1.5) мажорируется рядом [5]:

$$1+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{2\cdot 2!}+\ldots=\frac{1}{2}(1+e^h),\quad h(t)=\mu\int\limits_0^t dt_1|\varepsilon(t_1)|=\mu\int\limits_0^t dt_1|\xi(t_1)|$$

причем согласно (1.4) $|\varepsilon|=\det\varepsilon=\det\xi=|\xi|$. Из требования малости h следует $\mu\sim h$. Точность асимптотических оценок в этом случае не зависит от вида движения твердого тела и определяется только возмущением.

Иная ситуация при случайных возмущениях. Теперь для получения удовлетворительной точности не всегда достаточна малость моментов величины h. Как показывает проведенный анализ, порядок μ может зависеть от движения твердого тела. Так, для первого варианта (2.1) $\mu^2\sim\sim 3Kt=\langle h^2\rangle$ и достаточна малость второго момента $\langle h^2\rangle$. Но уже во втором случае (2.2) согласно (4.4) по крайней мере

$$\mu^4\sim K^2T\left\{t+T^2\int\limits_0^t dt_1 f^2(t_1)+T^3\left[\int\limits_0^t dt_1 f^2(t_1)\right]^2\right\}$$

Теперь требуется не только малость $\langle h^2\rangle=6KT$, но и малость времени t измерения, а также малость среднеквадратичной скорости вращения твердого тела. Таким образом, решение вопросов сходимости и качества асимптотических представлений при наличии случайных возмущений требует не только статистической модели этих возмущений, но и модели нулевого приближения (движения твердого тела).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. *Челноков Ю. Н.* Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига – Гамильтона по его угловой скорости.– Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 3, с. 11–20.
3. *Леви Ю. В.* Об определении ориентации подвижного объекта по его угловой скорости.– Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 6, с. 7–13.
4. *Леви Ю. В.* Об оценках погрешности определения ориентации подвижного объекта по его угловой скорости.– Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 2, с. 31–36.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
6. *Андреев В. Д.* Теория инерциальной навигации. М.: Наука, 1967. 647 с.
7. *Бесекерский В. А.* Цифровые автоматические системы. М.: Наука, 1976. 575 с.
8. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 463 с.

Москва

Поступила в редакцию 15.I.1982