

Уравнения (8) позволяют найти выражения всех вторых производных потенциала Φ вдоль отраженной волны

$$\begin{aligned}\Phi_{yy} &= \varepsilon \sin^2 2\alpha f(x)/x, & \Phi_{xx} &= \varepsilon \cos^2 2\alpha f(x)/x + \varepsilon/x^3 \\ \Phi_{xy} &= -1/2 \varepsilon \sin 4\alpha f(x)/x, & f(x) &= [(x + \cos \alpha)/(x \cos \alpha + 1)]^{1/2}\end{aligned}\quad (11)$$

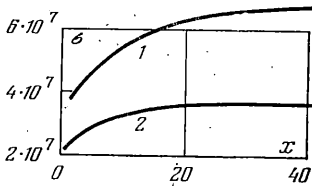
Напряжения, возникающие в среде за отраженной волной, определяются по формулам (λ и μ — константы Ламе):

$$\begin{aligned}\sigma_{Rz} &= \mu \varepsilon \sin 4\alpha f(x), & \sigma_{\theta\theta} &= \lambda \varepsilon [1 + f(x)] \\ \sigma_{zz} &= \varepsilon \{ \lambda [1 + f(x)] + 2\mu [1 + f(x) \cos^2 2\alpha] \} \\ \sigma_{RR} &= \varepsilon \{ \lambda (1 + f(x)) + 2\mu f(x) \sin^2 2\alpha \}\end{aligned}$$

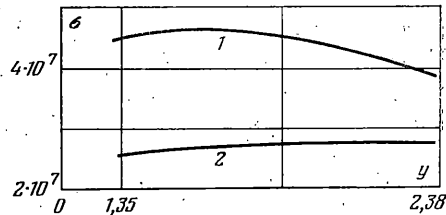
Полагая $\mu=0$, получим решение [1]:

$$\sigma_{Rz} = 0, \quad \sigma_{RR} = \sigma_{zz} = \sigma_{\theta\theta} = \lambda \varepsilon [1 + f(x)]$$

Численные расчеты проводились при следующих значениях параметров: $\alpha=40^\circ$, $\lambda=1,16 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu=0,76 \cdot 10^{11}$ Па, $\varepsilon=10^{-4}$.



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 2 даны зависимости напряжений на отраженной волне от координаты x . Зависимости напряжений за отраженной волной от координаты y при $x=2$ приведены на фиг. 3. Кривые 1 на фиг. 2, 3 соответствуют σ_{RR} , а кривые 2 — $\sigma_{\theta\theta}$. Интенсивность отраженной волны растет по мере удаления от вершины конуса. Результаты численных расчетов подтверждают применение формул (11).

ЛИТЕРАТУРА

- Сагомонян А. Я. Отражение акустической волны от внутренней поверхности поло-го конуса. — Вестн. МГУ. Матем., механ., 1975, № 4, с. 103–108.
- Сагомонян А. Я. Волны напряжения в сплошных средах. Ч. I. М.: Изд-во МГУ, 1978. 134 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.VIII.1984

УДК 539.3:534.1

О НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПРОДОЛЖАЮЩЕМСЯ НАГРУЖЕНИИ

БАРЧЕНКОВА Н. А., МИНАЕВ В. А.

На примере двойного маятника, находящегося под действием следящей силы P , устойчивость формы равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ($P = \text{const}$) рассматривается как предельный случай устойчивости движения при продолжающемся нагружении [1–4]. Найденная величина критической нагрузки для упругого стержня совпадает с известным результатом [5, 6], где критическое значение нагрузки для упругой системы найдено как предельное значение критической нагрузки для вязкоупругой системы при исчезающе малом влиянии вязкости.

Для максимального упрощения анализа, следуя [5, 7], рассмотрим модель кон-сольного стержня, находящегося под действием следящей нагрузки P , состоящую из двух одинаковых жестких стержней массы m и длины $2l$, соединенных между собой и с опорой вязкоупругими связями. За обобщенные координаты примем углы поворота стержней φ_1 и φ_2 . Линеаризованные уравнения движения будут сле-

дующими:

$$\begin{aligned} & 16/3 ml^2 \varphi_1'' + 2ml^2 \varphi_2'' + (b_1 + b_2) \varphi_1' - b_2 \varphi_2' + 2c\varphi_1 - c\varphi_2 - 2Pl\varphi_1 + 2Pl\varphi_2 = 0 \\ & 2ml^2 \varphi_1'' + 4/3 ml^2 \varphi_2'' - b_2 \varphi_1' + b_2 \varphi_2' - c\varphi_1 + c\varphi_2 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

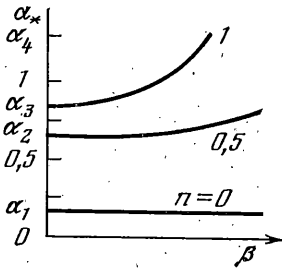
где c — коэффициент, характеризующий упругость связей, а в b_1 и b_2 — вязкость связей в опоре и между стержнями.

В безразмерной форме уравнения (1) имеют вид

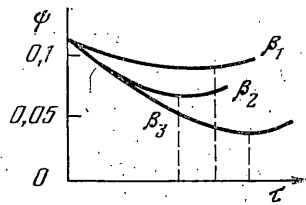
$$\begin{aligned} & 16/3 \varphi_1'' + 2\varphi_2'' + 22\beta(n+1)\varphi_1' - 22\beta\varphi_2' + 968(1-\alpha)\varphi_1 + 484(2\alpha-1)\varphi_2 = 0 \\ & 2\varphi_1'' + 4/3 \varphi_2'' - 22\beta\varphi_1' + 22\beta\varphi_2' - 484\varphi_1 + 484\varphi_2 = 0 \\ & \alpha = Pl/c, \quad b_1 = nb_2 = b, \quad \beta = b/(l\sqrt{mc}), \quad t = T\tau, \quad T = 22l(m/c)^{1/2} \end{aligned} \quad (2)$$

— период собственных колебаний рассматриваемой системы при $P=b=0$, соответствующий наименьшей частоте. Дифференцирование в (2) осуществляется по переменной τ .

При исследовании устойчивости формы равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ($\alpha = \text{const}$) рассматриваемой деформируемой системы решение уравнений (2) ищется в виде $\varphi_i = A_i e^{\lambda\tau}$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Состояние, соответствующее некоторому значению параметра α , считается устойчивым, если для него $\text{Re} \lambda \leq 0$.

На фиг. 1 приведены качественные графики зависимости критического значения параметра нагрузки α_* от параметра вязкости β для некоторых значений параметра n ($\alpha_1=0,15$, $\alpha_2=0,6$, $\alpha_3=0,82$, $\alpha_4=1,27$). Из этих графиков следует, что влияние неравномерности распределения демпфирования по длине стержня (величины n) на значение критической нагрузки весьма существенно. Аналогичные эффекты влияния неравномерности распределения демпфирования по формам колебаний сплошных деформируемых систем отмечены в [6, 8].

Рассмотрим влияние процесса увеличения внешней нагрузки на поведение возмущений во времени. Для этого в качестве метрики примем $\psi(\tau)$ — огибающую функции $\varphi_1^2(\tau) + \varphi_2^2(\tau)$. При $\alpha = a\tau$ и начальных условиях $\varphi_1(0)=0,2$, $\varphi_2(0)=0,263$, $\varphi_1'(0)=\varphi_2'(0)=0$, соответствующих первой собственной форме колебаний рассматриваемой системы при $\alpha=\beta=0$, задача (2) была решена на ЭВМ.

Результаты решения при $a=0,004$, $n=1$ для $\beta_1=0$, $\beta_2=0,05$ и $\beta_3=0,3$ представлены на фиг. 2 в виде качественных графиков зависимостей $\psi(\tau)$. Из этих графиков следует, что даже при $\beta=0$ увеличение параметра нагрузки до некоторого значения $\alpha_* = a\tau_*$ приводит к затуханию начальных возмущений. Как и в [9–12], назовем процесс устойчивым на конечном интервале времени $[0, \tau_*)$, если возмущения при $\tau \in [0, \tau_*)$ затухают. В рассматриваемом примере процесс устойчив на интервале $[0, \tau_*)$, если $\psi'(\tau) < 0$ для всех $\tau \in [0, \tau_*)$. Критическое значение параметра $\alpha_* = a\tau_*$ зависит в этом случае от скорости увеличения нагрузки, т. е. от величины a .

Рассмотрим следующее определение неустойчивости формы равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Форму равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ деформируемой системы, соответствующую значению параметра внешней нагрузки α , будем называть неустойчивой, если при сколь угодно медленном росте внешней нагрузки возмущения возрастают. Итак, критическое значение параметра α_* для формы равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ будет определяться как предельное значение $\alpha_*(a)$ для процесса при $a \rightarrow 0$.

В результате расчетов, выполненных на ЭВМ при $\beta=0$ и некоторых значениях величины a , были найдены следующие значения критической величины: $\alpha_*(0,004) \approx 0,87$, $\alpha_*(0,002) \approx 0,86$, $\alpha_*(2 \cdot 10^{-6}) \approx 0,82$. При исследовании влияния вязкости на значение α_* были получены следующие результаты для $a=0,004$: при $n=1$ имеем $\alpha_*(0,1) \approx 0,825$, $\alpha_*(0,05) \approx 0,83$, $\alpha_*(0,01) \approx 0,86$, $\alpha_*(0) \approx 0,87$; при $n=0$ имеем $\alpha_*(0,1) \approx 0,25$, $\alpha_*(0,05) \approx 0,3$, $\alpha_*(0,01) \approx 0,7$, $\alpha_*(0) \approx 0,87$. Отсюда следует, что критическое значение параметра внешней нагрузки α_* для формы равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ действительно равно 0,82, что совпадает с известными результатами [5].

Как следует из приведенных выше результатов расчетов (а также из графиков на фиг. 2), при фиксированном значении величины $a=0,004$ существует интервал из-

менения коэффициента вязкости $0 \leq \beta \leq \epsilon$, на котором увеличение величины β приводит не только к более интенсивному затуханию возмущений, но и к смещению точки минимума функции $\psi(\tau)$ влево, т. е. к уменьшению величины α_* . Последнее обстоятельство, по-видимому, и послужило причиной так называемого парадоксального влияния вязкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. О равновесии сжатых стержней за пределом пропорциональности. — Инж. сб., 1952, № 11, с. 123–126.
2. Ключников В. Д. Бифуркация процесса деформирования и конценция продолжающегося нагружения. — Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 5, с. 16–20.
3. Ключников В. Д. Развитие теории устойчивости конструкций за пределом упругости и критерий бифуркации процесса деформирования. — Прикл. механика, 1975, т. 11, № 6, с. 3–11.
4. Ключников В. Д. Неустойчивость пластических конструкций. — В кн.: Механика. Новое в зарубежной науке, № 7. М.: Мир, 1976, с. 148–177.
5. Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik. — Ing-Arch., 1952, B. 20, H. 1, S. 49–56.
6. Bolotin V. V., Zhinzher N. I. Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces. — Internat. J. Solids and Struct., 1969, v. 5, No. 9, p. 965–989.
7. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1967. 376 с.
8. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1964. 399 с.
9. Чугаев Н. Г. Об одной мысли Пуанкаре: Сб. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та, 1953, № 3, с. 3–6.
10. Каменков Г. В. Об устойчивости движения на конечном интервале времени. — ПММ, 1953, т. 17, вып. 5, с. 529–540.
11. Лебедев А. А. Об устойчивости движения на заданном интервале времени. — ПММ, 1954, т. 18, вып. 2, с. 139–148.
12. Абгарян К. А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М.: Наука, 1973. 431 с.

Воронеж

Поступила в редакцию
1.IV.1982