

Проведена численная реализация полученных напряжений при таких значениях параметров: $l=100$, $b=2$, $d=5$. Графики изменения напряжений $\sigma_{12}^* = -\sigma_{12}(V)/E$, $\sigma_{13}^* = -\sigma_{13}(V)/E$ для сечения $x_1=l/2$ показаны на фиг. 2. Кривые 1-3 построены для $x_2=0,2$; 1; 1,8 (сплошные линии соответствуют напряжению σ_{13}^* , штриховые - σ_{12}^*). Для сравнения следует отметить, что значение напряжения $\sigma_{11}^* = \sigma_{11}^0/E$ в этом сечении равно 4,25.

Для апробации предложенного подхода проведено сравнение результатов, полученных с его помощью, с известным решением, которое удастся построить в случае, если нагрузка не изменяется в осевом направлении.

Пусть на боковую поверхность стержня (фиг. 1) действует осевая нагрузка p , постоянная для всех точек поверхности. Левый конец жестко зацеплен, а правый свободен. Решение этой задачи приведено в [6] и имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \gamma(l-x_1)p, & \sigma_{12} &= px_2/b, & \sigma_{13} &= p(2x_3-d)/d \\ \sigma_{2k} &= \sigma_{33} = 0, & \gamma &= (d+2b)/db \end{aligned} \quad (2.2)$$

Решение же предложенным способом приводит к таким результатам:

$$\begin{aligned} u_1^0 &= -\frac{\gamma p}{E} (x_1^2 - lx_1), & V_1 &= V_{10} = \frac{p}{2\mu} \left[\frac{x_2^2}{b} + \frac{(2x_3-d)^2}{2d} \right] \\ V_{1j} &= 0 \quad (j \geq 1), & V_k &= 0 \end{aligned}$$

Соответствующие напряжения полностью совпадают с (2.2). Последнее обстоятельство объясняется тем, что внешняя нагрузка не изменяется по осевой координате, поэтому предложенный подход уже в нулевом приближении дает точное (в смысле Сен-Венана) решение. В общем же случае определение требуемого числа коэффициентов разложения (1.8) позволяет получить приближенное решение исходной задачи с заданной степенью точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mitchell J. H.* The Theory of Uniformly Loaded Beams.— *Quart. Pure and Appl. Math.*, 1900, v. 31, p. 377-382.
2. *Лурье А. И.* Задача Митчелла.— В кн.: *Строительная механика*. М.: Стройиздат, 1966, с. 327-334.
3. *Almansi E.* Sopra la deformazione dei cilindri sollecitati lateralmente.— *Rend. Accad. dei Lincei*, Ser. 6, 1901, v. 10, p. 333-338.
4. *Джанелидзе Г. Ю.* Задача Альманзи.— *Тр. Ленингр. политехн. ин-та*, 1960, № 210, с. 25-38.
5. *Грангер К.* Интегральные преобразования в математической физике. М.: Гостехиздат, 1956. 204 с.
6. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
30.V.1982

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОГО КОНУСА¹

ДВОРКИН Я. П., САГОМОНЯН Е. А.

В [1] рассмотрено отражение акустической волны от внутренней поверхности полого конуса. Предполагается, что пространство внутри конуса заполнено упругой средой; изучается осесимметричный процесс движения слабой продольной волны по направлению к вершине конуса. Исследование проводится для моментов времени, предшествующих приходу волны в вершину. Стенки конуса — гладкие и абсолютно жесткие. В этом случае нетрудно показать, что поперечный потенциал равен нулю и отраженные волны являются продольными. Угол раствора конуса полагается большим 90° , так что отраженные от стенок волны не пересекаются.

Уравнение движения упругой среды имеет вид

$$\psi_{RR} + R^{-1}\psi_R + \psi_{zz} = a^{-2}\psi_{tt} \quad (1)$$

где ψ — продольный потенциал, R — координата, отсчитываемая вдоль оси симметрии конуса, z — радиальная координата, t — время, момент $t=0$ соответствует приходу

¹ Доклад рассматривался на 5-м Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. Алма-Ата, 1981.

падающей волны в вершину конуса, a — скорость распространения продольных волн. Введем безразмерные автомодельные переменные по формулам $x = -z/(at)$, $y = -R/(at)$, $\psi(z, R, t) = -atz\varphi(x, y)$. Тогда уравнение (1) преобразуется к виду

$$\varphi_{xx}(1-x^2) - 2xy\varphi_{xy} + \varphi_{yy}(1-y^2) - 2\varphi_x/x + \varphi_y/y = 0 \quad (2)$$

Характеристики этого уравнения и соотношения на них таковы [2]:

$$dy/dx = (-xy \pm \sqrt{x^2 + y^2 - 1}) / (1 - x^2) \quad (3)$$

$$d\varphi_x + \frac{-xy \pm \sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{1 - x^2} d\varphi_y + \frac{\varphi_y/y + 2\varphi_x/x}{1 - x^2} dx = 0$$

Эти линии — прямые, касающиеся единичной окружности с центром в начале координат (фиг. 1).

Параметры падающей волны зададим соотношением $\varphi = \varepsilon(x + 1/x - 2)/2$ (ε — параметр интенсивности волны). Из непрерывности смещений следует непрерывность на отраженной волне производных φ_x и φ_y , т. е. на линии AB (фиг. 1):

$$\varphi_x = 1/2\varepsilon(1 - 1/x^2), \quad \varphi_y = 0 \quad (4)$$

На образующей конуса AC выполняется условие

$$(\varphi_x + \varphi/x) \cos \alpha - \varphi_y \sin \alpha = 0 \quad (5)$$

где α — угол наклона образующей конуса к оси y .

Разобьем область BAC характеристиками обоих семейств на расчетную сетку (фиг. 1). Использование соотношений (3) — (5) позволяет применить метод характеристик для численного нахождения параметров движения среды за отраженной волной.

Для определения параметров непосредственно на отраженной волне можно получить аналитическое решение рассматриваемой задачи. На линии AB имеем соотношения

$$d\varphi_y = 0 = \varphi_{yx}dx + \varphi_{yy}dy \quad (6)$$

$$d\varphi_x = (\varepsilon/x^3)dx = \varphi_{xx}dx + \varphi_{xy}dy$$

Уравнение линии AB имеет вид [4]:

$$y = x \operatorname{ctg} 2\alpha + 1/\sin 2\alpha \quad (7)$$

Из (6), (7) получим соотношения на AB :

$$\varphi_{xy} + \varphi_{yy} \operatorname{ctg} 2\alpha = 0, \quad \varphi_{xx} + \varphi_{xy} \operatorname{ctg} 2\alpha = \varepsilon/x^3 \quad (8)$$

Дифференцируя уравнение (2) по y и обозначая $\Phi = \varphi_y$, получим уравнение

$$\Phi_{xx}(1-x^2) - 2xy\Phi_{xy} + \Phi_{yy}(1-y^2) + \Phi_y(y^{-1} - 2y) + 2\Phi_x(x^{-1} - x) - \Phi/y^2 = 0$$

Характеристики этого уравнения совпадают с характеристиками уравнения (2), а соотношения на них таковы

$$d\Phi_x + \frac{-xy \mp \sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{1 - x^2} d\Phi_y + \frac{\Phi_y(1/y - 2y) + 2\Phi_x(1/x - x) - \Phi/y^2}{1 - x^2} dx = 0$$

Из первого уравнения (8) на линии AB будем иметь $\Phi_x = -\Phi_y \operatorname{ctg} 2\alpha$. Кроме того, на этой линии $\Phi = \varphi_y = 0$. Используя эти соотношения, можно привести уравнение (9) к виду

$$d\Phi_y + \Phi_y \left[\frac{1}{x} - \frac{\sin^2 2\alpha}{2(x \cos 2\alpha + 1)(x + \cos 2\alpha)} \right] dx = 0$$

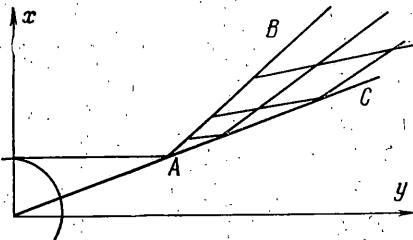
Решением этого уравнения будет функция $\Phi_y = (c_1/x) [(x + \cos \alpha)/(x \cos \alpha + 1)]^{1/2}$, где c_1 — произвольная константа.

Дифференцируя соотношение (5) вдоль образующей конуса и записывая его в точке отражения A , приходим к равенству

$$\varphi_{xx} - \varphi_{yy} + 2 \operatorname{ctg} 2\alpha \varphi_{xy} = 0 \quad (10)$$

Из (8) и (10) следует, что $\Phi_y = \varepsilon \sin^2 2\alpha$ при $x=1$. Отсюда

$$c_1 = \varepsilon \sin^2 2\alpha, \quad \Phi_y = (\varepsilon \sin^2 \alpha / x) \sqrt{(x + \cos \alpha)/(x \cos \alpha + 1)}$$



Фиг. 1

Уравнения (8) позволяют найти выражения всех вторых производных потенциала Φ вдоль отраженной волны

$$\begin{aligned}\Phi_{yy} &= \varepsilon \sin^2 2\alpha f(x)/x, & \Phi_{xx} &= \varepsilon \cos^2 2\alpha f(x)/x + \varepsilon/x^3 \\ \Phi_{xy} &= -1/2 \varepsilon \sin 4\alpha f(x)/x, & f(x) &= [(x + \cos \alpha)/(x \cos \alpha + 1)]^{1/2}\end{aligned}\quad (11)$$

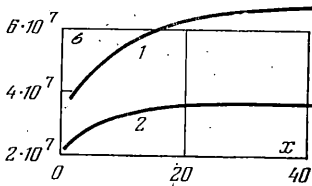
Напряжения, возникающие в среде за отраженной волной, определяются по формулам (λ и μ — константы Ламе):

$$\begin{aligned}\sigma_{Rz} &= \mu \varepsilon \sin 4\alpha f(x), & \sigma_{\theta\theta} &= \lambda \varepsilon [1 + f(x)] \\ \sigma_{zz} &= \varepsilon \{ \lambda [1 + f(x)] + 2\mu [1 + f(x) \cos^2 2\alpha] \} \\ \sigma_{RR} &= \varepsilon \{ \lambda (1 + f(x)) + 2\mu f(x) \sin^2 2\alpha \}\end{aligned}$$

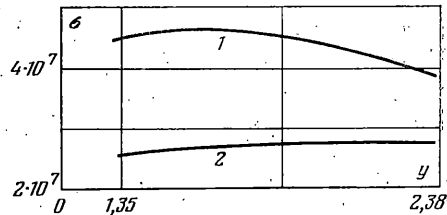
Полагая $\mu=0$, получим решение [1]:

$$\sigma_{Rz} = 0, \quad \sigma_{RR} = \sigma_{zz} = \sigma_{\theta\theta} = \lambda \varepsilon [1 + f(x)]$$

Численные расчеты проводились при следующих значениях параметров: $\alpha=40^\circ$, $\lambda=1,16 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu=0,76 \cdot 10^{11}$ Па, $\varepsilon=10^{-4}$.



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 2 даны зависимости напряжений на отраженной волне от координаты x . Зависимости напряжений за отраженной волной от координаты y при $x=2$ приведены на фиг. 3. Кривые 1 на фиг. 2, 3 соответствуют σ_{RR} , а кривые 2 — $\sigma_{\theta\theta}$. Интенсивность отраженной волны растет по мере удаления от вершины конуса. Результаты численных расчетов подтверждают применение формул (11).

ЛИТЕРАТУРА

- Сагомонян А. Я. Отражение акустической волны от внутренней поверхности поло-го конуса. — Вестн. МГУ. Матем., механ., 1975, № 4, с. 103–108.
- Сагомонян А. Я. Волны напряжения в сплошных средах. Ч. I. М.: Изд-во МГУ, 1978. 134 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.VIII.1984

УДК 539.3:534.1

О НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПРОДОЛЖАЮЩЕМСЯ НАГРУЖЕНИИ

БАРЧЕНКОВА Н. А., МИНАЕВ В. А.

На примере двойного маятника, находящегося под действием следящей силы P , устойчивость формы равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ($P = \text{const}$) рассматривается как предельный случай устойчивости движения при продолжающемся нагружении [1–4]. Найденная величина критической нагрузки для упругого стержня совпадает с известным результатом [5, 6], где критическое значение нагрузки для упругой системы найдено как предельное значение критической нагрузки для вязкоупругой системы при исчезающе малом влиянии вязкости.

Для максимального упрощения анализа, следуя [5, 7], рассмотрим модель кон-сольного стержня, находящегося под действием следящей нагрузки P , состоящую из двух одинаковых жестких стержней массы m и длины $2l$, соединенных между собой и с опорой вязкоупругими связями. За обобщенные координаты примем углы поворота стержней φ_1 и φ_2 . Линеаризованные уравнения движения будут сле-