

УДК 539.3

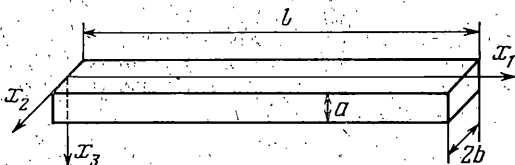
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ДЛЯ СТЕРЖНЯ, НАГРУЖЕННОГО ПО БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

ЛОБОДА В. В.

Рассмотрена трехмерная задача теории упругости для стержня, нагруженного по боковой поверхности медленно переменной по осевой координате нагрузкой. Использование аппарата асимптотического интегрирования позволило расчленить поставленную задачу на последовательность существенно более простых задач, решение которых находится в аналитическом виде. Для иллюстрации проведен расчет стержня с поверхностной нагрузкой, переменной как в осевом, так и в поперечном направлениях. На частном примере проведено сравнение результатов, полученных предложенным способом, с известным решением, которое построено для нагрузки, постоянной по осевой координате. Результаты сравнения подтверждают достоверность решений, полученных предложенным методом.

Исследование напряженно-деформированного состояния стержня, нагруженного по боковой поверхности произвольной нагрузкой в рамках соотношений трехмерной теории упругости, представляет существенные трудности. Методы решения этой задачи хорошо разработаны лишь в случае, если нагрузка не изменяется по осевой координате (задача Митчелла [1, 2]) или же изменяется по полиномиальному закону (задача Альманзи [3, 4]). В публикуемой работе на основании использования метода асимптотического интегрирования предлагается подход, позволяющий получать приближенные решения поставленной задачи.

1. Задан стержень прямоугольного поперечного сечения (фиг. 1), на боковую поверхность которого действует осевая нагрузка с невысокой изменчивостью по осевой координате x_1 . Граничные условия на торцах, вызывающие растяжение — сжатие стержня, произвольны. Сформулированная краевая задача описывается системой уравнений



Фиг. 1

$$L_i(\mathbf{u}) = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \Delta u_i = 0 \quad (1.1)$$

и граничными условиями на боковых гранях

$$\sigma_{12}|_{x_2=\pm b} = 0, \quad \sigma_{13}|_{x_3=0} = -q(x_1, x_2), \quad \sigma_{13}|_{x_3=d} = 0, \quad \sigma_{k3}|_{x_3=0, d} = 0 \quad (1.2)$$

где $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ — вектор перемещений, $L_i(\mathbf{u})$ — операторы Ламе, λ, μ — упругие постоянные Ламе, $q(x_1, x_2)$ — заданная нагрузка (не уменьшая общности, считаем, что нагрузка действует только на грань $x_3=0$); индекс i здесь и в дальнейшем принимает значения 1, 2, 3; k — значения 2, 3.

Для получения исходного приближения воспользуемся классическими уравнениями растяжения — сжатия стержня

$$E F u_1'' = -q^\circ(x_1), \quad u_k^\circ = -\nu x_k u_1', \quad \sigma_{i1}^\circ = E u_1' \quad (1.3)$$

$$u_1^\circ(x_1) = \frac{1}{F} \iint_F u_1(x_1, x_2, x_3) dF, \quad q^\circ(x_1) = \int_{-b}^b q(x_1, x_2) dx_2, \quad F = 2bd$$

и представим искомое решение в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ + \mathbf{W} + \mathbf{V}, \quad \mathbf{W} = \{W_1, W_2, W_3\}, \quad \mathbf{V} = \{V_1, V_2, V_3\} \quad (1.4)$$

где $V+W$ — вектор перемещений дополнительного решения, причем W необходимо выбрать в форме

$$W_1 = \frac{1}{2} \nu \psi u_1^{o''} = -\nu \psi q^o / 2EF, \quad W_k = 0$$

$$\psi(x_2, x_3) = x_2^2 + (x_3 - \frac{1}{2}d)^2 - c_1, \quad c_1 = \frac{1}{12}(4b^2 + d^2) \quad (1.5)$$

Основное назначение решения (1.5) состоит в компенсации сдвигающих напряжений $\sigma_{12}^o, \sigma_{13}^o$, которые возникают вследствие использования классических гипотез теории стержней.

Подставляя (1.4) в (1.1), (1.2) и учитывая (1.3), (1.5), получаем для определения V следующую краевую задачу:

$$L_i(V) = T_i(x_1, x_2, x_3) \quad (1.6)$$

$$\sigma_{12}(V)|_{x_2=\pm b} = 0, \quad \sigma_{22}(V)|_{x_2=\pm b} = \frac{\kappa\nu}{2} \left[\left(x_3 - \frac{d}{2} \right)^2 + c_2 \right] \frac{q^{o'}}{F}, \quad \sigma_{23}(V)|_{\substack{x_2=\pm b \\ x_3=0, d}} = 0 \quad (1.7)$$

$$\sigma_{13}(V)|_{x_3=0} = -q(x_1, x_2), \quad \sigma_{13}(V)|_{x_3=d} = 0, \quad \sigma_{33}(V)|_{x_3=0, d} = \frac{\kappa\nu}{2} (x_2^2 - c_3) \frac{q^{o'}}{F}$$

$$T_1 = \frac{q^o}{F} + \frac{\kappa(1-\nu)}{2F} \psi q^{o''}, \quad T_2 = \nu \kappa x_2 \frac{q^{o'}}{F}, \quad T_3 = \nu \kappa \left(x_3 - \frac{d}{2} \right) \frac{q^{o'}}{F}$$

$$\kappa = \lambda/E, \quad c_2 = (8b^2 - d^2)/12, \quad c_3 = (d^2 - 2b^2)/6$$

Правые части системы (1.6), которые можно рассматривать как массовые силы, а также несамобалансированное поверхностное напряжение $\sigma_{13}(V)$, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\iint_F T_1 dF + \int_{-b}^b \sigma_{13}(V)|_{x_3=0} dx_2 = 0, \quad \iint_F T_k dF = 0$$

Это означает, что система нагрузок, обуславливающая дополнительное решение V , самообалансирована в каждом поперечном сечении. Следовательно, соответствующее решение будет быстропеременным по x_2, x_3 и может ввести лишь самообалансированные невязки в граничные условия на торцах. Вводя поэтому замену координат $x_2 = \varepsilon x_2^o, x_3 = \varepsilon x_3^o$, представим неизвестные перемещения в виде разложений по малому параметру $\varepsilon = d/l$:

$$V_i = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j V_{ij} \quad (1.8)$$

Подставляя (1.8) в (1.6), (1.7) и группируя члены одного порядка при одинаковых степенях ε , получим

$$\mu \left(\frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial x_2^{o2}} + \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial x_3^{o2}} \right) = -(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial V_{2,j-1}}{\partial x_2^o} + \frac{\partial V_{3,j-1}}{\partial x_3^o} + \frac{\partial V_{1,j-2}}{\partial x_1} \right) -$$

$$- \mu \frac{\partial^2 V_{1,j-2}}{\partial x_1^2} + \delta_j^o t q^o + \delta_j^2 \frac{\kappa(1-\nu)}{2} \left(x_2^{o2} + z^2 - \frac{c_1}{\varepsilon^2} \right) t q^{o''} \quad (1.9)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_k^o} \left(\frac{\partial V_{2j}}{\partial x_2^o} + \frac{\partial V_{3j}}{\partial x_3^o} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 V_{kj}}{\partial x_2^{o2}} + \frac{\partial^2 V_{kj}}{\partial x_3^{o2}} \right) =$$

$$= -(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 V_{1,j-1}}{\partial x_1 \partial x_k^o} - \mu \frac{\partial^2 V_{k,j-2}}{\partial x_1^2} + \delta_j^1 P_k \quad (j=0,1,2,\dots) \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial V_{1j}}{\partial x_2^o} \Big|_{x_1^o = \pm b/\varepsilon} = - \frac{\partial V_{2,j-1}}{\partial x_1} \Big|_{x_2 = \pm b}, \quad \frac{\partial V_{1j}}{\partial x_3^o} \Big|_{x_3=0, d} = - \frac{\partial V_{3,j-1}}{\partial x_1} \Big|_{x_3=0, d} - \delta_j^o \frac{\varepsilon}{\mu} q \quad (1.11)$$

$$(1-\nu) \frac{\partial V_{2j}}{\partial x_2^o} + \nu \frac{\partial V_{3j}}{\partial x_3^o} \Big|_{x_2^o = \pm b/\varepsilon} = -\nu \frac{\partial V_{1,j-1}}{\partial x_1} \Big|_{x_2 = \pm b} + \delta_j^1 \frac{t\nu^2}{2E} \left(z^2 + \frac{c_2}{\varepsilon^2} \right) q^{o'} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{2j}}{\partial x_3^0} + \frac{\partial V_{3j}}{\partial x_2^0} \Big|_{\substack{x_2^0 = \pm b/\varepsilon \\ x_3^0 = 0, l}} = 0, \quad (1-\nu) \frac{\partial V_{3j}}{\partial x_3^0} + \nu \frac{\partial V_{2,j}}{\partial x_2^0} \Big|_{x_3^0 = 0, l} = \\ = -\nu \frac{\partial V_{1,j-1}}{\partial x_1} \Big|_{x_3^0 = d} + \delta_j^1 \frac{t\nu^2}{2E} \left(x_2^{\circ 2} - \frac{c_3}{\varepsilon^2} \right) q^{\circ}, \quad t = \varepsilon^2 F \\ P_2 = \nu k x_2^{\circ} t q^{\circ}, \quad P_3 = \nu k z t q^{\circ}, \quad z = x_3^{\circ} - d / (2\varepsilon) \end{aligned}$$

где значения V_{ij} для $j < 0$ равны нулю, δ_j^m — символ Кронеккера.

Видно, что трехмерная задача распадается на последовательность двумерных краевых задач для прямоугольной области $|x_2| \leq b$, $0 \leq x_3 \leq d$. Причем уравнение (1.9) необходимо решать при граничных условиях (1.11), а систему (1.10) — при условиях (1.12).

В нулевом приближении ($j=0$) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_{10}}{\partial x_2^{\circ 2}} + \frac{\partial^2 V_{10}}{\partial x_3^{\circ 2}} = \frac{t}{\mu} q, \quad \frac{\partial V_{10}}{\partial x_2^{\circ}} \Big|_{x_2^{\circ} = \pm b/\varepsilon} = 0 \\ \frac{\partial V_{10}}{\partial x_3^{\circ}} \Big|_{x_3^{\circ} = 0} = -\frac{\varepsilon}{\mu} q, \quad \frac{\partial V_{10}}{\partial x_3^{\circ}} \Big|_{x_3^{\circ} = l} = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Решение краевой задачи (1.13) ищется методом интегральных преобразований Фурье с конечными пределами [5] в виде (для удобства записано в основных координатах):

$$\begin{aligned} V_{10} = \frac{d q^{\circ}(x_1)}{b \mu} z_3 + \\ + \frac{2}{\alpha \pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Q(x_1, p)}{p} \frac{\operatorname{ch} \alpha p (y_3 - \pi)}{\operatorname{sh} \alpha p \pi} \cos p y_2 \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$Q(x_1, p) = \frac{d}{\pi \mu} \int_0^{\pi} q(x_1, x_2) \cos p y_2 dy_2,$$

$$z_3 = \frac{y_3^2}{4\pi^2} - \frac{y_3}{2\pi} + \frac{1}{6}$$

$$y_2 = \pi(x_2 + b)/2b, \quad y_3 = \pi x_3/d, \quad \alpha = d/2b$$

Следует отметить, что $V_{20} = V_{30} = 0$, а получение последующих приближений V не представляет принципиальных трудностей. Из асимптотического анализа следует, что основные напряжения дополнительного состояния являются величинами $\sim \varepsilon \sigma_{11}^{\circ}$.

Таким образом, основное решение (1.3) в совокупности с дополнительным (1.5), (1.14) с точностью до величин $\sim \varepsilon$ по сравнению с единицей удовлетворяет уравнениям Ламе, граничным условиям на боковых гранях и в смысле Сен-Венана — граничным условиям на торцах. Поэтому построенные решения в совокупности являются асимптотически точным решением задачи теории упругости для всей области стержня, за исключением зон, непосредственно прилегающих к торцам.

2. В качестве примера рассмотрим стержень, один из торцов которого (например, $x_1=0$) зашпелен, а другой — свободен. Нагрузка, действующая на грань $x_3=0$, имеет вид $q(x_1, x_2) = E(1 - x_2^2/b^2) \sin(\pi x_1/l)$.

В этом случае классическое решение (1.3), удовлетворяющее граничным условиям на торцах $u_1^{\circ}(0) = 0$, $\sigma_{11}^{\circ}(l) = 0$, следующее:

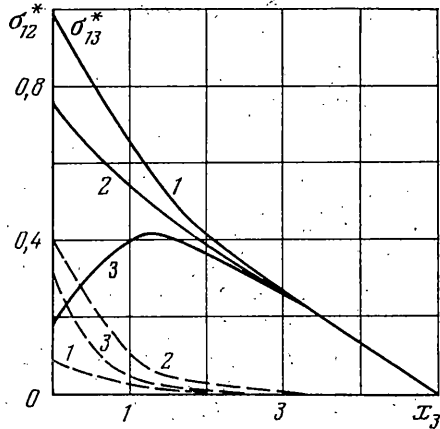
$$u_1^{\circ} = D \left(\frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi x_1}{l} + x_1 \right), \quad u_h^{\circ} = -\nu D x_h \left(1 + \cos \frac{\pi x_1}{l} \right) \quad (2.1)$$

$$\sigma_{11}^{\circ} = DE [1 + \cos(\pi x_1/l)], \quad D = 4bl/3\pi F$$

а основные составляющие дополнительного решения определяются формулами

$$V_1 \approx V_{10} = \frac{4Ed}{\mu} \sin \frac{\pi x_1}{l} \left[\frac{z_3}{3} - \frac{4}{\alpha \pi^3} \sum_{p=2,4} \frac{\operatorname{ch} \alpha p (y_3 - \pi)}{\operatorname{sh} \alpha p \pi} \frac{\cos p y_2}{p^3} \right]$$

$$\sigma_{12}(V) \approx \mu \partial V_{10} / \partial x_2, \quad \sigma_{13}(V) \approx \mu \partial V_{10} / \partial x_3$$



Фиг. 2

Проведена численная реализация полученных напряжений при таких значениях параметров: $l=100$, $b=2$, $d=5$. Графики изменения напряжений $\sigma_{12}^* = -\sigma_{12}(V)/E$, $\sigma_{13}^* = -\sigma_{13}(V)/E$ для сечения $x_1=l/2$ показаны на фиг. 2. Кривые 1-3 построены для $x_2=0,2$; 1; 1,8 (сплошные линии соответствуют напряжению σ_{13}^* , штриховые - σ_{12}^*). Для сравнения следует отметить, что значение напряжения $\sigma_{11}^* = \sigma_{11}^0/E$ в этом сечении равно 4,25.

Для апробации предложенного подхода проведено сравнение результатов, полученных с его помощью, с известным решением, которое удастся построить в случае, если нагрузка не изменяется в осевом направлении.

Пусть на боковую поверхность стержня (фиг. 1) действует осевая нагрузка p , постоянная для всех точек поверхности. Левый конец жестко зацеплен, а правый свободен. Решение этой задачи приведено в [6] и имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \gamma(l-x_1)p, & \sigma_{12} &= px_2/b, & \sigma_{13} &= p(2x_3-d)/d \\ \sigma_{2k} &= \sigma_{33} = 0, & \gamma &= (d+2b)/db \end{aligned} \quad (2.2)$$

Решение же предложенным способом приводит к таким результатам:

$$\begin{aligned} u_1^0 &= -\frac{\gamma p}{E}(x_1^2 - lx_1), & V_1 &= V_{10} = \frac{p}{2\mu} \left[\frac{x_2^2}{b} + \frac{(2x_3-d)^2}{2d} \right] \\ V_{1j} &= 0 \quad (j \geq 1), & V_k &= 0 \end{aligned}$$

Соответствующие напряжения полностью совпадают с (2.2). Последнее обстоятельство объясняется тем, что внешняя нагрузка не изменяется по осевой координате, поэтому предложенный подход уже в нулевом приближении дает точное (в смысле Сен-Венана) решение. В общем же случае определение требуемого числа коэффициентов разложения (1.8) позволяет получить приближенное решение исходной задачи с заданной степенью точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mitchell J. H.* The Theory of Uniformly Loaded Beams.— *Quart. Pure and Appl. Math.*, 1900, v. 31, p. 377-382.
2. *Лурье А. И.* Задача Митчелла.— В кн.: *Строительная механика*. М.: Стройиздат, 1966, с. 327-334.
3. *Almansi E.* Sopra la deformazione dei cilindri sollecitati lateralmente.— *Rend. Accad. dei Lincei*, Ser. 6, 1901, v. 10, p. 333-338.
4. *Джанелидзе Г. Ю.* Задача Альманзи.— *Тр. Ленингр. политехн. ин-та*, 1960, № 210, с. 25-38.
5. *Грангер К.* Интегральные преобразования в математической физике. М.: Гостехиздат, 1956. 204 с.
6. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
30.V.1982

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОГО КОНУСА¹

ДВОРКИН Я. П., САГОМОНЯН Е. А.

В [1] рассмотрено отражение акустической волны от внутренней поверхности полого конуса. Предполагается, что пространство внутри конуса заполнено упругой средой; изучается осесимметричный процесс движения слабой продольной волны по направлению к вершине конуса. Исследование проводится для моментов времени, предшествующих приходу волны в вершину. Стенки конуса — гладкие и абсолютно жесткие. В этом случае нетрудно показать, что поперечный потенциал равен нулю и отраженные волны являются продольными. Угол раствора конуса полагается большим 90° , так что отраженные от стенок волны не пересекаются.

Уравнение движения упругой среды имеет вид

$$\psi_{RR} + R^{-1}\psi_R + \psi_{zz} = a^{-2}\psi_{tt} \quad (1)$$

где ψ — продольный потенциал, R — координата, отсчитываемая вдоль оси симметрии конуса, z — радиальная координата, t — время, момент $t=0$ соответствует приходу

¹ Доклад рассматривался на 5-м Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. Алма-Ата, 1981.