

УДК 539.3

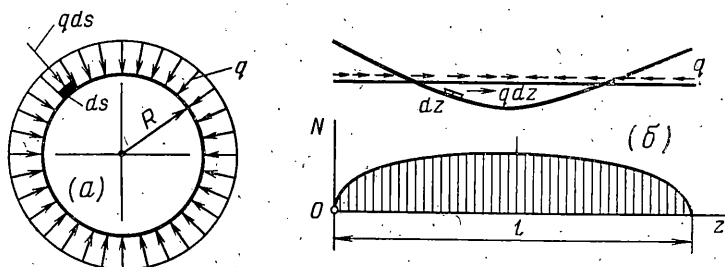
О НЕКОТОРЫХ НЕОБЫЧНЫХ ПРИМЕРАХ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

ФЕОДОСЬЕВ В. И.

Рассматриваются самогравитирующие упругие системы, для которых малые отклонения от положения равновесия вызывают у внешних сил изменения, зависящие от возмущений интегральным образом.

1. Рассмотрим упругое кольцо массы M , находящееся под действием только собственных гравитационных сил (фиг. 1, а). Такое кольцо можно считать нагруженным равномерно распределенной центральной нагрузкой q , возникающей вследствие взаимного притяжения частиц. Задаем жесткость кольца на изгиб EJ и требуется определить условия, при которых круговая исходная форма равновесия становится неустойчивой.

Естественно, здесь не будем касаться вопроса о прикладной значимости подобной задачи. Нет сомнений, что из-за малости гравитационной



Фиг. 1

постоянной условия устойчивости выходят далеко за рамки реализации такой конструкции. Но сейчас нас интересует другое. Задача обладает специфическими особенностями, с которыми до сих пор, как нам кажется, не приходилось встречаться. Вопрос заключается в поведении сил при возникновении малых возмущений формы.

Известно, что если кольцо нагружено, например, обычным давлением, то сила qds при изменении формы кольца постоянно следит за нормалью к упругой линии. Если кольцо, например, нагружено центральными силами, следящими за центром круга, то в каждой точке упругой линии возникает местная касательная сила, определяемая местным угловым перемещением упругой линии (обычно поведение местных сил зависит от местных перемещений). В предложенной задаче поведение местной силы qds зависит интегральным образом от изменения формы кольца в целом.

Аналогично можно поставить и задачу устойчивости самогравитирующего упругого стержня (см. фиг. 1, б), где под N понимается нормальная сжимающая сила в сечении, а под q — интенсивность продольной распределенной нагрузки. При искривлении стержня сила qdz , не меняясь по величине, меняет линию своего действия, а угол отклонения от оси определяется некоторым интегралом от возникающих перемещений.

При решении любой задачи устойчивости необходимо прежде всего определить докритическое состояние системы. В данном случае надо найти нагрузку q . Сделать это, казалось бы, очень просто.

Пусть m — масса кольца на единицу длины дуги. Сила, с которой масса элемента $Rd\varphi$ (фиг. 2) притягивает массу элемента ds , согласно закону Ньютона, выражается формулой $(f/r)_2 m ds m R d\varphi$, где f — гравитационная постоянная. Умножая это выражение на $\sin \varphi/2$, находим радиальную составляющую искомой силы. Разделив на ds , найдем интенсивность, т. е. силу на единицу длины дуги, а подставив $r=2R \sin^1/2\varphi$, получим

$$q = \frac{fm^2}{4R} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin^1/2\varphi} = \frac{fm^2}{2R} \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} \Big|_0^{2\pi} \quad (1.1)$$

Видно, что q обращается в бесконечность.

Аналогичный результат получается и для прямого стержня (фиг. 3). Сила взаимодействия масс mdz и mdz_1 будет $fmdzmdz_1/(z_1-z)^2$. Разделим эту силу на dz , чтобы получить интенсивность q , а затем, полагая, что силы от отрезков стержня длиной z слева и длиной z справа от элемента dz взаимно уравниваются, возьмем интеграл в пределах от $2z$ до l .

После интегрирования получим

$$q = fm^2 [1/z - 1/(l-z)] \quad (1.2)$$

На концах стержня интенсивность распределенных сил обращается в бесконечность. Соответственно в бесконечность обращается и нормальная сила в сечениях стержня $N = \int q dz$ (интеграл берется в пределах от 0 до z).

Парадокс легко объясняется. Здесь принята одномерная схема, т. е. пренебрегается размерами поперечного сечения стержня и тем самым приписывается телу бесконечно большая плотность. Это и порождает проявившуюся особенность. Чтобы ее устранить, надо вести интегрирование по всему объему, а не только по длине стержня.

Рассмотрим сначала прямой стержень с прямоугольным поперечным сечением. На фиг. 4 показаны две прямоугольные призмы толщиной dz и dz_1 . В пределах каждой из них выделяются элементы объемом $dx dy dz$ и $dx_1 dy_1 dz_1$.

Если обозначить через ρ плотность материала, то сила взаимодействия между двумя элементами будет $(f/r^2) \rho^2 dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1$, где r — расстояние между элементами: $r^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$.

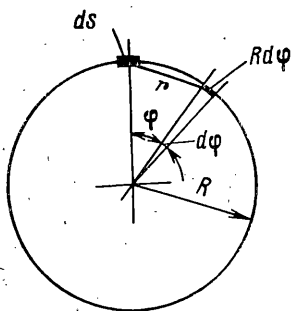
Чтобы получить составляющую по оси z , силу надо умножить на $(z_1 - z)/r$. Распределенная нагрузка q определяется последующим пятикратным интегрированием:

$$q = f\rho^2 \int_{2z}^l dz_1 \int_{-a/2}^{+a/2} dx \int_{-a/2}^{+a/2} dx_1 \int_{-b/2}^{+b/2} dy \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{z_1 - z}{r^3} dy_1$$

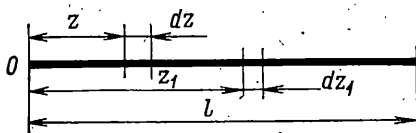
где a и b — размеры сторон прямоугольника.

Интегрирование, хотя и выполняется в элементарных функциях, но оказывается очень громоздким. Поэтому здесь невозможно не только привести этапы проведенных выкладок, но не целесообразно писать и само итоговое выражение для q , едва укладывающееся на одной странице. Это — набор радикалов из сумм квадратов постоянных и переменных величин, расположенных в различных комбинациях под знаками логарифма и арктангенса.

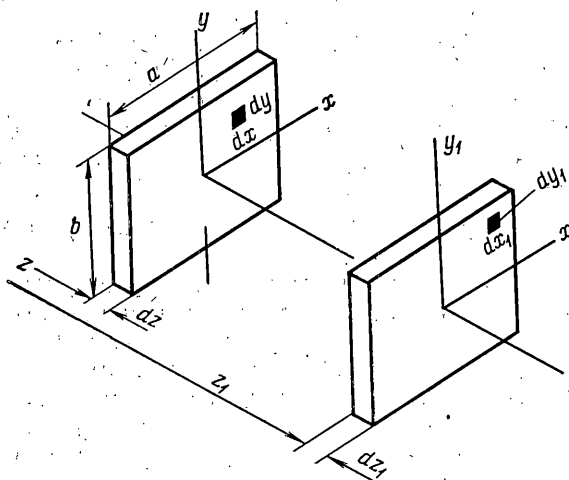
Важно другое. После интегрирования по объему бесконечность на концах стержня устраняется, но сохраняется некоторый затухающий краевой эффект, зависящий от отношения сторон прямоугольника.



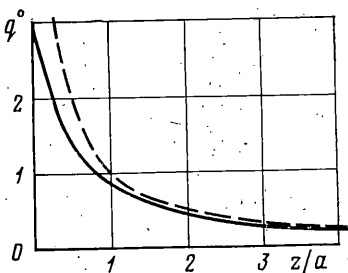
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 5 показан закон изменения q вблизи конца стержня, имеющего квадратное сечение. Штриховая линия соответствует одномерному интегрированию, сплошная — объемному ($q^0 = qal^3 / (fM^2)$).

Величина q на концах такого стержня определяется выражением (a — сторона квадрата)

$$q|_{z=0} = \frac{fM^2}{l^3} \frac{l}{a} 2 \left[\ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{2}{3} (\sqrt{2}-1) \right]$$

На расстоянии порядка $3a-4a$ от конца стержня закон изменения q уже с достаточной точностью подчиняется одномерному решению (1.2).

Чтобы найти значение сжимающей силы N , функцию q необходимо проинтегрировать по z . Такое (шестое) интегрирование нами уже не проводилось. Удобнее было вычислить q в окрестности концов для нескольких точек, а затем полученную зависимость аппроксимировать некоторой степенной зависимостью q от z . Тогда легко определить и силу N , воспользовавшись соотношением (1.2). В итоге был определен закон изменения N . Характерная зависимость N от z показана на фиг. 1, б.

Решить задачу устойчивости прямого стержня не удалось, так как требовались новые громоздкие выкладки. Видимо, форму упругой линии следовало бы разложить в степенные ряды и составить некоторый алгоритм численного решения.

2. Задача об устойчивости кольца в отличие от стержня обнадеживает скрытыми возможностями периодичности форм упругой линии. И эти на-

дежды оправдались. Но определение сил докритического состояния для кольца оказалось более трудным, чем для стержня.

Примем, что кольцо имеет прямоугольную форму сечения, хотя, как кажется, нагрузка q при большом радиусе кольца не должна зависеть от формы сечения. Именно это обстоятельство подсказывает, что есть, наверное, какое-то простое решение. Можно найти какой-то простой ход мысли, позволяющий выйти на итоговую зависимость. Но такое решение найдено не было. Пришлось проводить пятикратное интегрирование того же типа, что и для прямого стержня.

Рассмотрим два элемента с массами $\rho V = \rho(Y/R) ds dx dY$ и $\rho V_1 = \rho Y_1 d\varphi dx_1 dY_1$ (фиг. 6) и примем следующие обозначения: $R + y = Y$, $R + y_1 = Y_1$, а также $r^2 = (Y - Y_1 \cos \varphi)^2 + Y_1^2 \sin^2 \varphi + (x_1 - x)^2$. Координаты x и x_1 направлены перпендикулярно плоскости чертежа и на фиг. 6 не показаны.

Сила взаимодействия двух элементарных масс имеет вид

$$(f/r^2) \rho \frac{Y}{R} ds dx dY \rho Y_1 dx_1 dY_1 d\varphi.$$

Это выражение надо разделить на ds и, чтобы найти радиальную составляющую, умножить еще на $(Y - Y_1 \cos \varphi)/r$. Тогда

$$q = \frac{f \rho^2}{R} \int_{-b/2}^{+b/2} dy \int_{-b/2}^{+b/2} dy_1 \int_{-a/2}^{+a/2} dx \int_{-a/2}^{+a/2} dx_1 \int_0^{2\pi} \frac{(Y - Y_1 \cos \varphi) d\varphi}{[Y^2 - 2Y Y_1 \cos \varphi + Y_1^2 + (x_1 - x)^2]^{3/2}} \quad (2.1)$$

Интегрирование выглядит абсолютно бесперспективным. И такого взгляда, подкрепленного рядом неудачных попыток, автор долго придерживался. Однако выявилась одна возможность.

Если сначала провести интегрирование по φ в пределах от 0 до 2π , то приходим к эллиптическим интегралам, в модуль которых входят все четыре остающиеся переменные: $k^2 = 4Y Y_1 [(Y + Y_1)^2 + (x_1 - x)^2]^{-2}$.

Поскольку Y и Y_1 мало отличаются от R , а x и x_1 много меньше R , модуль k мало отличается от единицы и представляется возможность разложить эллиптические интегралы по степеням дополнительного модуля

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{(Y_1 - Y)^2 + (x_1 - x)^2}{(Y_1 + Y)^2 + (x_1 - x)^2}$$

Были удержаны слагаемые до степеней порядка x^2/R^2 и y^2/R^2 по сравнению с единицей и проведено дальнейшее четырехкратное интегрирование. Оно было очень непростым, поскольку разложение эллиптических интегралов по k'^2 содержит логарифмические слагаемые. По ходу выкладок можно было бы пойти на упрощения и принять, что сечение имеет форму квадрата, а не прямоугольника. Но тогда терялась бы одна из возможных форм контроля: итог интегрирования не должен зависеть от ориентации длинной и короткой сторон прямоугольника.

В итоге получили

$$q = f M^2 K / (4\pi^2 R^3) \quad (2.2)$$

$$K = \ln \frac{8R}{c} + 1 - \frac{2}{3} \frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{b} - \frac{2}{3} \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \\ + \frac{1}{12} \left[1 + \frac{a^2}{b^2} \ln \left(\frac{b^2}{a^2} + 1 \right) + \frac{b^2}{a^2} \ln \left(\frac{a^2}{b^2} + 1 \right) \right] \quad (2.3)$$

где c — диагональ прямоугольника.

В полученном выражении, как и следовало ожидать, перемена местами сторон прямоугольника a и b не сказывается на величине q . Первое слагаемое в коэффициенте K показывает, что при неизменной массе кольца M

и неизменном радиусе R уменьшение сторон поперечного сечения приводит к неограниченному возрастанию q , что связано с возрастанием плотности материала ρ .

При $R > 100$ с первое слагаемое $\ln(8R/c)$ становится доминирующим и прочими слагаемыми выражения (2.3) можно пренебречь.

3. Рассмотрим задачу устойчивости кольца. Малые отклонения кольца от круговой формы характеризуются перемещениями u и w (фиг. 7), а угол поворота элемента дуги будет $\vartheta = dw/(Rd\varphi) - u/R$. При малых возмущениях нагрузка q меняется и получает соответственно малые, дополнительные составляющие: нормальную q_n и касательную q_t . Их необходимо вычислить.

Зафиксируем точку A с угловой координатой φ и обозначим ее перемещения через u_0 и w_0 (фиг. 8). Перемещения некоторой точки B будут u и w .

Расстояние между точками A и B есть r , а между точками A' и B' — $(r + \Delta r)$, где $\Delta r = (w + w_0) \sin \frac{1}{2}\alpha + (u - u_0) \cos \frac{1}{2}\alpha$.

Вертикальная и горизонтальная составляющие погонной силы притяжения массы в точке A' массой точки B' будут

$$dq_1 = \frac{fm^2 R d\alpha}{(r + \Delta r)^3} [R + w_0 - (R + w) \cos \alpha + u \sin \alpha]$$

$$dq_2 = \frac{fm^2 R d\alpha}{(r + \Delta r)^3} [(R + w) \sin \alpha + u \cos \alpha - u_0]$$

Взяв проекции этих сил на нормаль и касательную к элементу дуги в точке A' , получим

$$d(q + q_n) = \frac{fm^2 R d\alpha}{(r + \Delta r)^3} \left[R + w_0 - (R + w) \cos \alpha + u \sin \alpha - \left(\frac{dw_0}{d\varphi} - u_0 \right) \sin \alpha \right]$$

$$dq_t = \frac{fm^2 R d\alpha}{(r + \Delta r)^3} \left[\left(\frac{dw_0}{d\varphi} - u_0 \right) (1 - \cos \alpha) - (R + w) \sin \alpha - u \cos \alpha + u_0 \right]$$

Так как $r = 2R \sin \frac{1}{2}\alpha$, $(r + \Delta r)^{-3} = r^{-3} (1 - 3\Delta r/r)$, то

$$d(q + q_n) = \frac{fm^2 d\alpha}{8R^2 \sin^3 \frac{\alpha}{2}} \left[R(1 - \cos \alpha) + w_0 - w \cos \alpha + u \sin \alpha - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{dw_0}{d\varphi} - u_0 \right) \sin \alpha - \frac{3}{2} (w + w_0) (1 - \cos \alpha) - \frac{3}{2} (u - u_0) \sin \alpha \right]$$

$$dq_t = \frac{fm^2 d\alpha}{8R^2 \sin^3 \frac{\alpha}{2}} \left[-R \sin \alpha + \left(\frac{dw_0}{d\varphi} - u_0 \right) (1 - \cos \alpha) - w \sin \alpha - \right.$$

$$\left. - u \cos \alpha + u_0 + \frac{3}{2} (w + w_0) \sin \alpha + \frac{3}{2} (u - u_0) (1 + \cos \alpha) \right]$$

Теперь при фиксированных u_0 и w_0 , но при переменных u и w , эти выражения необходимо проинтегрировать по α .

Естественно принять, как это обычно и делается, что перемещения u и w подчиняются периодическому закону, обеспечивающему нерастяжимость упругой линии кольца при изгибе: $w_0 = A \cos n\varphi$, $w = A \cos n(\varphi + \alpha)$, $u_0 = -(A/n) \sin n\varphi$, $u = -(A/n) \sin n(\varphi + \alpha)$.

В дальнейшем для упрощения выкладок сразу примем $n=2$, хотя и не исключено, что число волн n может оказаться и иным. Это требует дополнительного анализа.

Поскольку устойчивость рассматривается в одномерной схеме, то при последующих операциях неизбежно встретится уже знакомый нам несобственный интеграл (1.1). Поэтому воспользуемся уже найденным решением для q (2.2). Сравнивая его с выражением (1.1), нетрудно прийти к выводу, что переход к трехмерной схеме превращает этот интеграл в величину $4K$ (2.3).

После интегрирования по α получаем

$$q_n = \frac{fm^2}{8R^2} A \left(24K - \frac{104}{3} \right) \cos 2\varphi, \quad q_t = -\frac{fm^2}{8R^2} A \frac{32}{3} \sin 2\varphi$$

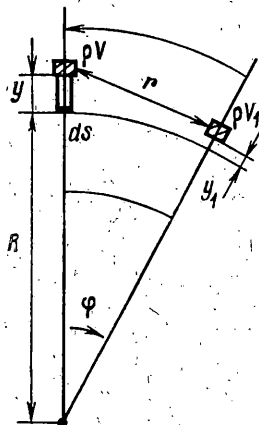
Составим уравнения равновесия для элемента кольца (фиг. 9). В итоге приходим к следующему дифференциальному уравнению (κ — изменение кривизны):

$$\frac{d^3 \kappa}{d\varphi^3} + \left(\frac{qR^3}{EJ} + 1 \right) \frac{d\kappa}{d\varphi} + \frac{R^2}{EJ} \left(\frac{dq_n}{d\varphi} + q_t \right) = 0 \quad (3.1)$$

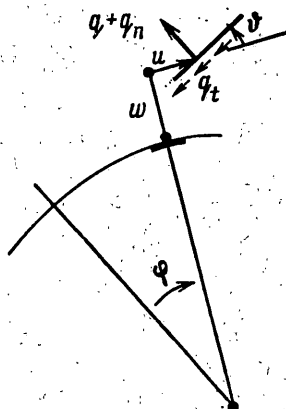
$$\kappa = \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w \right) = -\frac{3A}{R^2} \cos 2\varphi$$

Подставив κ , q_n , q_t и q (2.2) в выражение (3.1), найдем условие критического состояния. Если его написать в традиционной форме, то получим $q_* = \frac{26}{11} KEJ / R^3$, а если подставить q (2.2), то $(fM^2 / (EJ))_* = \frac{108}{11} \pi^2$.

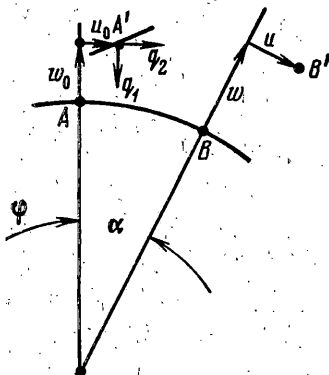
Результат поразителен — критическое состояние определяется только массой кольца и его жесткостью на изгиб. Тот самый коэффициент K , определение которого потребовало невероятного труда, при $n=2$ оказался не-



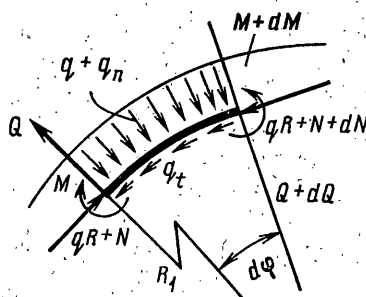
Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

нужным. При преобразованиях выражения (3.1) члены, содержащие K , взаимно уничтожились. Как это выглядит при $n > 2$, сказать трудно. Но подобное, быть может, свойственно и задаче об устойчивости прямого стержня.

Таким образом, новых вопросов возникает больше, чем получено ответов.

Порядковую оценку полученного результата в числовом выражении проще всего дать для кольца с квадратным поперечным сечением. Выражение (3.2) может быть переписано в виде $(f\rho^2 R^2/E)_* = 9/44$.

Здесь размеры поперечного сечения сокращаются. Если подставить сюда значение гравитационной постоянной, то для стального кольца легко получить (уже независимо от его массы) значение радиуса R , при котором круговая форма равновесия станет неустойчивой. Это значение R_* , как и следовало ожидать, оказывается астрономическим в полном смысле слова ($R_* \approx 3140$ км).

Москва

Поступила в редакцию
12.X.1983