

УДК 539.375

УЧЕТ ОТКОЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ
О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ
С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

ЗЕЛЕНСКИЙ А. С., НЕЩЕРЕТОВ И. И.

Дифракция упругих волн на полостях различной формы рассматривалась в ряде работ (см. библиографию в [1]). Однако задача учета разрушения среды, возникающего в процессе дифракции, не обсуждалась. В [2] экспериментально изучались откольные явления, возникающие при набегании плоской волны нормально к плоской границе. В [3] приведено численное решение этой задачи, а также ряда других задач откольного разрушения. Экспериментальное и теоретическое исследование отколов при наклонном падении плоской волны на плоскую границу рассмотрено в [4]. Для численного решения задачи о взаимодействии волны давления с полостью в [5] использовался критерий разрушения Баладина с учетом эффекта накопления повреждений.

Ниже методом конечных разностей решается задача о дифракции плоской продольной волны на цилиндрической полости с учетом разрушения отколом. Система уравнений упругости записывается в полярных координатах и имеет вид гиперболической системы первого порядка относительно напряжений и скоростей. Применяется разностная схема типа «пространственный крест». Критерий откольного разрушения и алгоритм учета поведения разрушенного материала аналогичны [6, 7]. Исследована зависимость решения от характеристик среды.

1. Пусть в пространстве имеется цилиндрическая полость радиуса r_0 . Из бесконечности приходит плоская продольная волна интенсивности σ_0 . Введем полярную систему координат r, θ с полюсом в центре полости так, чтобы ось $\theta=0$ была осью симметрии. Среду характеризуем плотностью ρ , параметрами Ламе λ и μ , пределом прочности на растяжение σ_* . В области рассматриваемых сжимающих нагрузок среда считается упругой.

Введем безразмерные величины $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}' / (\lambda + 2\mu)$, $u_i = u_i' / a$, $r = r' / r_0$, $t = t' a / r_0$, где σ_{ij}' — компоненты тензора напряжений, u_i' — компоненты вектора скорости, $a = [(\lambda + 2\mu) / \rho]^{1/2}$ — скорость продольных волн в среде, t' и r' — размерные время и радиус. Положим $\rho = 1$, $a = 1$, $r_0 = 1$, $u_r = u$, $u_\theta = v$, $\sigma_{rr} = \sigma$, $\sigma_{\theta\theta} = S$, $\sigma_{r\theta} = \tau$.

Запишем систему динамических уравнений теории упругости для напряжений и скоростей [8]:

$$\begin{aligned} \sigma_{,t} &= u_{,r} + (1 - 2\mu)(v_{,\theta} + u) / r \\ S_{,t} &= (v_{,\theta} + u) / r + (1 - 2\mu)u_{,r} \\ \tau_{,t} &= \mu v_{,r} + \mu(u_{,\theta} - v) / r \\ u_{,t} &= \sigma_{,r} + (\tau_{,\theta} + \sigma - S) / r \\ v_{,t} &= \tau_{,r} + (S_{,\theta} + 2\tau) / r \end{aligned} \quad (1.1)$$

Выпишем теперь начальные и граничные условия. До начала взаимодействия волны с полостью напряжения и скорости обуславливаются входящей плоской продольной волной

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0(1 - 2\mu \sin^2 \theta) f(\xi), & S &= \sigma_0(1 - 2\mu \cos^2 \theta) f(\xi) \\ \tau &= -\sigma_0 \mu \sin 2\theta f(\xi), & u &= \sigma_0 \cos \theta f(\xi), & v &= -\sigma_0 \sin \theta f(\xi), & \xi &= r \cos \theta - x_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где x_0 — удаление фронта волны от центра полости при $t=0$, $f(\xi)$ — заданная функция, характеризующая форму падающей волны.

В силу симметрии решение определяется для углов $0 \leq \theta \leq \pi$, а при $\theta = 0, \pi$ ставятся условия $\tau = v = 0$, $u_{,\theta} = \sigma_{,\theta} = S_{,\theta} = 0$.

Принимаем, что полость свободна от напряжений

$$\sigma = 0; \quad \tau = 0 \quad (r=1, 0 \leq \theta \leq \pi) \quad (1.3)$$

Для построения численного решения ограничим расчетную область окружностью $r=R$. Считаем, что после отражения от полости при $r \rightarrow R$ ($R \gg 1$) движение близко к одномерному по нормали к границе $r=R$. Тогда условие на внешней границе, физически означающее равенство нулю амплитуд волн, отраженных от внешней границы, будет иметь вид

$$(\sigma - \sigma_1) + (u - u_1) = 0, \quad (\tau - \tau_1) + \sqrt{\mu}(v - v_1) = 0 \quad (1.4)$$

где индексом (1) отмечены величины, относящиеся к падающей волне. Они определяются по формулам (1.2), если положить $\xi = R \cos \theta - x_0 + t$. Величина S на внутренней и внешней границах определяется из бихарактеристических соотношений для системы (1.1) [8]:

$$(S - (1 - 2\mu)\sigma)_{,t} - 4\mu(1 - 2\mu)(v_{,\theta} + u) / r = 0.$$

2. Условие разрушения и алгоритм учета поведения разрушенного материала вводятся аналогично [6]. Рассматривается хрупкое разрушение с образованием трещин отрыва.

Когда одно из главных напряжений в некотором элементе материала превышает сопротивление материала растяжению σ_* , образуется трещина, перпендикулярная направлению этого напряжения. С этого момента среда становится анизотропной [7], а нормаль к площадке отрыва будет особым направлением. Считаем, что определенная таким образом площадка остается площадкой главных напряжений, а напряжение, нормальное к ней, с момента разрушения остается нулевым (т. е. «залечивания повреждений», в отличие от [6], не происходит).

Если в какой-то точке расчетной области одно из главных напряжений (например, σ_1) превысит σ_* , следует изменить величины σ_1, σ_2 таким образом, чтобы эти приведенные величины соответствовали напряжениям в разрушенном материале [6, 7]. Деформация должна быть скорректирована так, чтобы $\sigma_1' = 0$ (штрихами обозначены напряжения после корректировки). Другие деформации остаются неизменными. Из этих условий получим, что приведенные напряжения равны

$$\sigma_1' = 0, \quad \sigma_2' = \sigma_2 + \lambda \Delta e_1, \quad \Delta e_1 = -\sigma_1 / (\lambda + 2\mu) \quad (2.1)$$

где Δe_1 — мера изменения ширины трещины в течение шага по времени. В дальнейшем считается, что данный элемент расчетной области не сопротивляется растяжению.

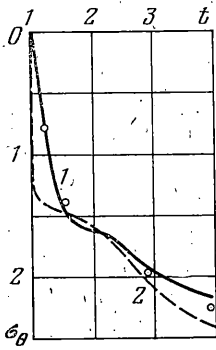
После проведения такой корректировки поля главных напряжений переходим к напряжениям σ, S и τ .

3. Расчетная область $1 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$ разбивается на ячейки прямыми

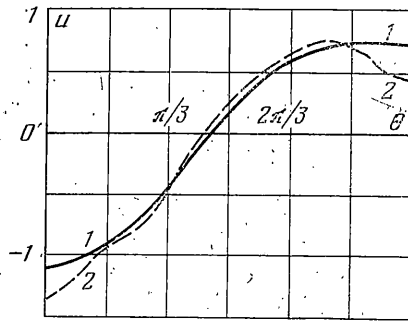
$$\theta_j = \Delta\theta(j-1), \quad r_i = (1 + \Delta\theta)^{i-1} \quad (i=1, \dots, M; j=1, \dots, N)$$

Определяем напряжение в узлах сетки в моменты времени $t = \Delta tk$, а скорости — в центрах ячеек в моменты $t = \Delta t(k - 1/2)$, где $k = 0, \dots, K$.

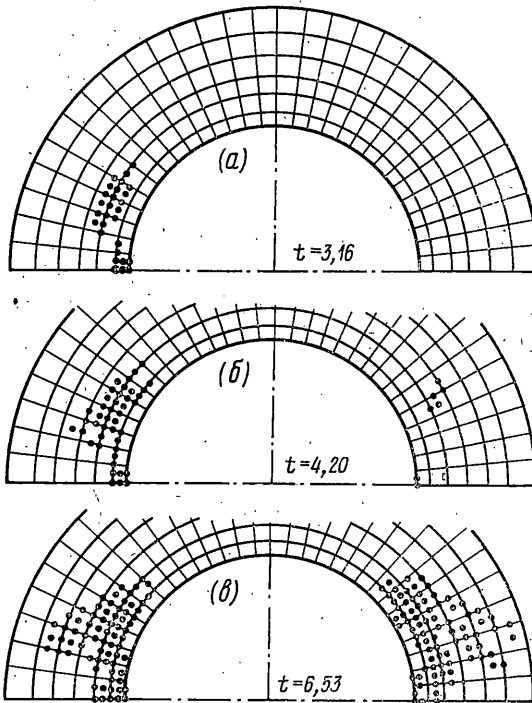
Во внутренних точках используются центральные разности по координатам и по времени (так называемый пространственный крест [1, 8, 9]). При этом последние два уравнения системы (1.1) аппроксимируются со вторым порядком точности, а при аппроксимации первых трех уравнений в ошибку аппроксимации входит член, пропорциональный $r_i \Delta\theta^2$, т. е. второй порядок точности сохраняется вблизи полости. Применение переменного шага по координате хотя и увеличивает ошибку аппроксимации,



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

но позволяет уменьшить влияние дополнительной границы $r=R$ и условий на ней на решение [4].

Для устранения осцилляции численного решения в окрестности фронта волны при расчете применялось послойное сглаживание, аналогичное используемому в [9].

Шаг Δt из соображений устойчивости должен удовлетворять условию Куранта $\Delta t/\Delta\theta \leq C < 1$.

4. Решение данной задачи для чисто упругого случая ($\sigma_* \gg 1$) сопоставлялось с результатами [8, 10]. При этом форма падающей волны — ступенька, размазанная на два шага по времени; $\Delta\theta=0,157$, $\Delta t=0,156$, $\mu=0,333$. Результаты сравнения показаны на фиг. 1; кривая 1 — конечно-разностное решение [8] при $R=5,76$, кривая 2 — результат [10]. Точками отмечены результаты данной работы при $R=15,9$. Отметим, что решение [10] основано на замене суммы бесконечного ряда двумя первыми слагаемыми и справедливо для $t > 2$. Сопоставление приведенных кривых по-

казывает, что все три результата отличаются друг от друга на величины порядка ошибок аппроксимации.

Основные расчеты проводились на сетке $M=43$, $N=61$. При этом шаг по углу $\Delta\theta=0,052$, шаг по времени $\Delta t=0,051$, $R=8,53$. Интенсивность падающей волны принималась равной единице, форма волны имеет вид $f(\xi)$, где

$$f(\xi)=0 \text{ при } \xi < 0 \text{ или } \xi > t_2; \quad f(\xi)=\xi/t_1 \text{ при } 0 \leq \xi \leq t_1$$

$$f(\xi)=\cos \frac{\pi(t-t_1)}{2(t_2-t_1)} \text{ при } t_1 \leq \xi \leq t_2$$

Принималось $t_1=2,5$, $t_2=30$, а параметры среды μ и σ_* варьировались. Исследование откольного разрушения среды вблизи полости показало, что разрушение возможно как в лобовой, так и в тыльной части полости.

Обнаружено, что с ростом μ размер зон разрушения растет, с ростом σ_* — падает. Влияние этих двух параметров показано в таблице. Здесь на пересечениях соответствующих строк и столбцов показаны площади зон отколов по отношению к

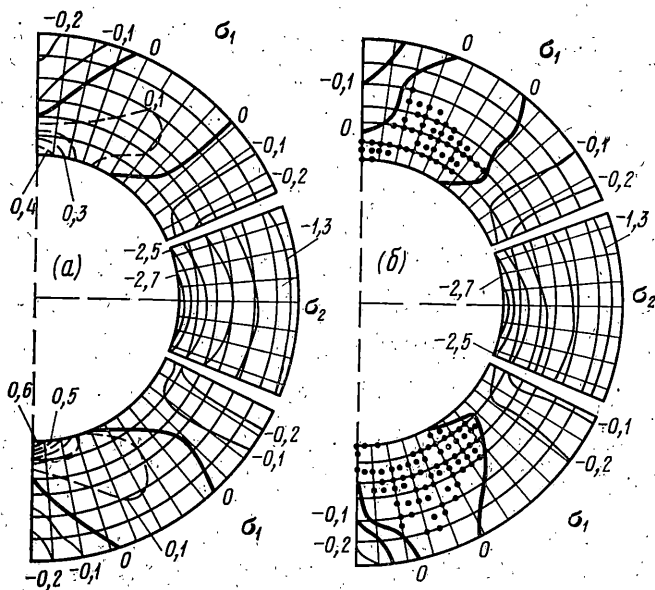
σ_*	$\mu=0,35$	$\mu=0,38$	$\mu=0,40$	$\mu=0,44$	$\mu=0,5$
0,01	$\frac{0,01}{0}$	$\frac{0,05}{0,04}$	$\frac{0,07}{0,08}$	—	—
0,025	$\frac{0}{0}$	$\frac{0,01}{0,02}$	$\frac{0,05}{0,07}$	—	—
0,035	$\frac{0}{0}$	$\frac{0,01}{0,01}$	$\frac{0,01}{0,06}$	$\frac{0,15}{0,20}$	—
0,06	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0,01}$	$\frac{0,01}{0,01}$	$\frac{0,01}{0,16}$	—
0,1	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0,01}$	$\frac{0}{0,01}$	$\frac{0,01}{0,02}$	$\frac{0,14}{0,19}$

площадям полостей в некоторый характерный момент времени $t=5,9$: сверху зона откола в лобовой части полости ($\theta < \pi/3$), снизу — в тыльной ($\theta > 2\pi/3$). В боковой части полости откольных разрушений не наблюдается. В этой таблице при больших значениях μ и малых значениях σ_* результаты не приводятся, так как в этом случае среда претерпевает столь большие разрушения, что подходить к расчету с точки зрения сплошной среды не представляется возможным. В случае $\mu < 0,35$ ($\nu > 0,23$) при данных типах нагрузок откольных разрушений не наблюдается. Заметим, что это согласуется со статическим решением, в котором при $\mu < 0,33$ также нет зон растяжений.

На фиг. 2 показан процесс развития зон откольного разрушения во времени. При этом $\mu=0,44$, $\sigma_*=0,035$. Ориентированы откольные трещины по нормали к полости. Разрушение начинается в лобовой области; вскоре после прохождения здесь пика волны (фиг. 2, а). В момент подхода пика к тыльной точке полости там также появляются первые зоны откола (фиг. 2, б); откольная зона в лобовой части медленно увеличивается. После отхода волны в глубь массива (фиг. 2, в) происходит быстрое нарастание зоны откола в тыльной части полости; в лобовой части процесс откола почти стабилизируется.

График изменения радиальной скорости U на контуре выработки в момент времени $t=5,9$ при тех же значениях μ и σ_* приведен на фиг. 3. Кривые 1 и 2 соответствуют упругому решению и решению с учетом откольных явлений. Сравнение указанных кривых показывает, что наиболее сильно скорость меняется в лобовой и тыльной областях. При этом в лобовой области скорость при отколе увеличивается по абсолютной величине более чем на 20% (частицы среды «отрываются» от массива), а в тыльной области скорость уменьшается в 1,5 раза (оторвавшиеся частицы «отстают» от массива). Чем больше μ или меньше σ_* , тем большим будет изменение скорости.

На фиг. 4. показаны линии уровня главных напряжений вблизи полости в тот же момент времени $t=5,9$ при тех же μ и σ_* . В лобовой и тыльной областях показано поле максимальных главных напряжений σ_1 , а в боковой области — поле минимальных главных напряжений σ_2 , являющихся максимальными сжимающими напряжениями. Фиг. 4, а соответствует упругому решению, а б — решению с отколом. (Точками на б показаны элементы среды, в которых произошло откольное разрушение.)



Фиг. 4

Естественно, что в результате откольного разрушения наибольшие изменения происходят в зоне растяжения. Амплитуды растягивающих напряжений уменьшаются от 0,6 до величин, меньших σ_1 . Меняется и форма зоны, в которой действуют растягивающие напряжения. Сравнение фиг. 4, а и б показывает, что откольное разрушение носит локальный характер и на величины максимальных сжимающих напряжений в боковой части контура выработки практически не влияет ($|\sigma_2|$ уменьшается от 2,80 до 2,76).

Авторы благодарят Н. В. Зволинского, А. Н. Ковшова, Г. В. Рыкова за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковшов А. Н. Дифракция упругой волны на сферической полости. Численное решение. — Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 2, с. 62–70.
2. Broberg K. B. Studies on scabbing of solids under explosive attack. — J. Appl. Mech., 1955, v. 22, No. 3, p. 317–323. — Рус. перев.: Механика Сб. перев. иностр. статей. М.: Изд-во иностр. лит., 1956, № 3, с. 150–163.
3. Никифоровский В. С., Шемякин Е. И. Динамическое разрушение твердых тел. Новосибирск: Наука, 1979. 271 с.
4. Кольский Г., Рейдер Д. Волны напряжений и разрушение. — В кн.: Разрушение. Т. 1. М.: Мир, 1973, с. 570–608.
5. Жуков В. В., Когенко В. Ф., Коротких Ю. Г. Динамическое деформирование и разрушение массива горных пород. Л.: Наука, 1979, 165 с.
6. Maenchen G., Sack S. The «Tensor» code. — In: Methods in Computational Physics. V. 3. N. Y. — L.: Acad press, 1964, p. 181–240. — Рус. перев.: М.: Мир, 1967, с. 185–244.
7. Cameron I. G., Scorgie G. C. Dynamics of intense underground explosions. — J. Inst. Math. and its Appl., 1968, v. 4, No. 2, p. 194–222.
8. Ковшов А. Н. О дифракции нестационарной упругой волны на цилиндрической полости. — Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4, с. 115–121.
9. Ковшов А. Н., Нещеретов И. И. О дифракции нестационарной поперечной волны на цилиндрической полости. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 5, с. 72–77.
10. Baron M. L., Matthews A. T. Diffraction of a pressure wave by a cylindrical cavity in an elastic medium. — Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1961, v. 28, No. 3, p. 347–354. — Рус. перев.: Прикл. механика. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., сер. E, 1961, т. 28, № 3, с. 31–38.

Москва

Поступила в редакцию
9.XII.1981