

УДК 539.375

РАСЧЕТ ДЕФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЗАКРЫТОЙ ТРЕЩИНОВАТОСТЬЮ В СЛОЖНОНАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

ЖИТНИКОВ Ю. В., ТУЛИНОВ Б. М.

Метод расчета матрицы податливости среды, ослабленной плоскими трещинами произвольной формы, в предположении, что напряженное состояние не зависит от пути нагружения, был предложен в [1]. При этом установлено, что в случае взаимодействия берегов трещины в результате трения трещиноватая среда становится анизотропной.

В [2] на примере прямолинейного разреза с неоднородным взаимодействием берегов показано, что напряженное состояние твердого тела в этом случае существенно зависит от пути нагружения.

В публикуемой работе, используя метод, развитый в [1], вычисляется матрица податливости среды, ослабленной дискообразными трещинами со взаимодействующими берегами, в приближении малой их концентрации и с учетом зависимости напряженного состояния от пути нагружения. При этом матрица податливости связывает малые приращения тензоров напряжения и деформации и является функционалом траектории нагружения.

1. Рассмотрим в системе координат, связанной с центром трещины (ось X_3 нормальна к плоскости трещины), изменение напряженного состояния в случае, когда на берегах трещины действует нормальное давление $\sigma_{33} = \sigma \geq 0$ и сдвиг $\sigma_{13} = \tau \geq 0$. В случае, если нагружение происходит сначала сжимающей нагрузкой, а затем сдвиговой, распределение смещений вдоль трещины имеет вид [3]: $u_1^+ = -8(1-\nu_0^2)(R^2-r^2)^{1/2}(\tau-\rho\sigma) / [\pi E_0(2-\nu_0)]$, а при воздействии сначала сдвиговой, а затем сжимающей — $u_1^+(x_1, x_2, 0) = -8(1-\nu_0)\tau(R^2-r^2) / [\pi E_0(2-\nu_0)] \leq 0$, где R — радиус трещины, ρ — коэффициент трения, ν_0 — коэффициент Пуассона, E_0 — модуль Юнга сплошной среды.

Этот пример показывает зависимость напряженного состояния от траектории нагружения.

Рассмотрим изменение напряженного состояния при произвольной траектории нагружения $\tau = \tau(\theta) \geq 0$ ($0 \leq \theta \leq \theta_0$), $\sigma(0) = 0$, $\tau(0) = 0$, $\sigma = \sigma(\theta) \geq 0$, $\tau(\theta_0) = \tau_0$, $\sigma(\theta_0) = \sigma_0$, $u_1^\pm = u^\pm(x_1, x_2, 0, \theta)$, где $\theta \geq 0$ — параметр нагружения, σ_0 , τ_0 — конечные напряжения.

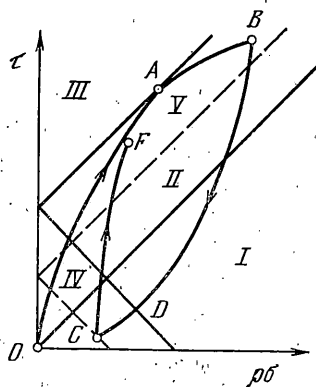
Рассмотрим случай траектории нагружения, вдоль которой взаимные смещения не убывают ($u^- \geq 0$, $du^-/d\theta \geq 0$). На плоскости $(\tau, \rho\sigma)$ можно сразу выделить области, где при любом изменении нагрузки, взаимных смещений не возникает $\tau \leq \rho\sigma$ (область I, фиг. 1), так как силы трения превосходят сдвиговое напряжение. В области II ($\tau \geq \rho\sigma$) на трещине возникают взаимные смещения.

Рассмотрим условие, при котором происходит увеличение взаимных смещений при нагружении в области II (фиг. 1). Краевое условие в точке, где имели место взаимные смещения, $\sigma_{13}^\pm = \tau_A - \rho\sigma_A$ (например, точка A, фиг. 1). Предположим, что при дальнейшем нагружении возникают взаимные смещения. Тогда краевое условие на трещине будет $\sigma_{13}^\pm = \tau - \rho\sigma$, которое представим в виде суперпозиции $\sigma_{13}^\pm = \tau_I + \tau_{II}$, $\tau_I = \tau_A - \rho\sigma_A$, $\tau_{II} = \tau - \tau_A - \rho(\sigma - \sigma_A)$.

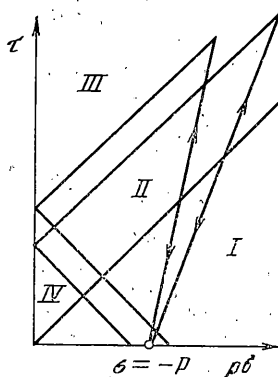
Увеличение взаимных смещений определяется краевым условием τ_{II} , для чего необходимо, чтобы $\tau_{II} \geq 0$, $\tau - \tau_A \geq -\rho(\sigma - \sigma_A)$ (область III, фиг. 1), в противном случае силы трения превосходят сдвиговые напряжения. Следовательно, если траектория нагружения после точки A не попадает в область III (например, OAB), то взаимные смещения не изменяются $u(x_1, x_2, 0, \theta) = u_A(x_1, x_2, 0, \theta_A)$.

Рассмотрим класс путей нагружения, для которых возможна разгрузка $u^+(x_1, x_2, 0, \theta) \leq 0$, $d|u|/d\theta \leq 0$. Предположим, что разгрузка идет из точки, распределение напряжений в которой вдоль трещины $\sigma_{13}^{\pm} = \tau_A - \rho\sigma_A$ (точка B на траектории OAB , фиг. 1).

Краевое условие в случае наличия возвратных смещений имеет вид $\sigma_{13}^{\pm} = \tau + \rho\sigma$, которое представим в виде суммы: $\sigma_{13}^{\pm} = \tau_I + \tau_{II}$, $\tau_I = \tau_A - \rho\sigma_A$.



Фиг. 1



Фиг. 2

$\tau_{II} = \tau - \tau_A + \rho(\sigma + \sigma_A)$. Возникновение возвратных смещений определяется напряжением τ_{II} , для чего необходимо $\tau_A - \tau \leq \rho(\sigma + \sigma_A)$ (область IV, фиг. 1).

Таким образом, для траектории разгрузки (DCB , фиг. 1) в области IV происходит уменьшение взаимных смещений (участок DC), а вне этой области возвратных смещений не возникает (участок BD). Распределение смещений будет определяться в виде суммы решений двух задач, соответствующих краевым условиям τ_{II} , τ_I :

$$u^-(x_1, x_2, 0, \theta) = u_A^- + \Delta u^- = -8(1 - \nu_0^2)(R^2 - r^2)^{1/2}(\tau + \rho\sigma) / [\pi E_0(2 - \nu_0)]$$

Таким образом рассмотрен процесс деформации твердого тела с трещиной на траектории нагрузка - разгрузка.

Рассмотрим случай, когда после разгрузки следует нагрузка ($d|u|/d\theta \geq 0$). На траектории нагружения краевое условие $\sigma_{13}^{\pm} = \tau - \rho\sigma$ представим в виде суммы: $\sigma_{13}^{\pm} = \tau_I + \tau_{II}$, $\tau_I = \tau_c + \rho\sigma_c$, $\tau_{II} = \tau - \tau_c - \rho(\sigma + \sigma_c)$, а увеличение взаимных смещений будет иметь место, если $\tau - \tau_c > \rho(\sigma + \sigma_c)$ (область V для траектории CF). Следовательно, для того, чтобы произошло увеличение взаимных смещений на траектории нагрузки, которая следует за разгрузкой, необходимо попадание кривой в характерную область нагружения.

В общем случае произвольной кривой нагружения для вычисления напряженного состояния в конечной точке нагружения необходимо разбить весь путь нагружения на характерные участки, в которых может иметь место нагружение ($du^-/d\theta \geq 0$) или разгрузка ($du^-/d\theta \leq 0$) по указанному методу. Вычисляя изменение напряженного состояния последовательно на каждом таком участке, получим результирующее напряженное состояние в конечной точке.

2. Рассмотрим изменение напряженного состояния твердого тела, ослабленного дискообразной трещиной, когда направление сдвигового на-

пряжения не совпадает с направлением одной из осей и в процессе нагружения может изменяться: $\tau_1^+ = \tau_1(\theta) \geq 0$, $\tau_2^+ = \tau_2(\theta) \geq 0$, $\sigma^+ = \sigma(\theta) \geq 0$, где τ_1 , τ_2 — компоненты сдвигового напряжения, приложенного на берегах трещины вдоль осей X_1 , X_2 соответственно, σ — нормальное давление, знак плюс относится к верхнему берегу.

Будем считать, что сила трения всегда направлена в противоположную движению сторону: $F_i = -\rho \sigma \delta u_i / |\delta u|$ ($i=1, 2$), где δu_i — приращение взаимного смещения при изменении нагрузки. Из этого определения можно сделать утверждение, что если $\tau_1(\theta) \neq 0$, то изменение смещения только вдоль оси X_1 возможно тогда и только тогда, когда $F_2 = 0$, $\tau_2 = \text{const}$. Действительно, в силу того что движение происходит только вдоль X_1 , то согласно определению $F_2 = 0$. Если при этом $\tau_2 \neq \text{const}$, то это с необходимостью приведет к изменению смещения вдоль оси X_2 , что противоречит $u_2 = \text{const}$. Аналогичное утверждение имеет место вдоль оси X_2 .

Запишем краевую задачу

$$\sigma_{13}^{\pm} = \tau_1^+ + F_1^+, \quad u_1^+ = -f \sigma_{13}^{\pm}, \quad \sigma_{23}^{\pm} = \tau_2^+ + F_2^+, \quad u_2^+ = -f \sigma_{23}^{\pm} \quad (2.1)$$

$F_1^+ = -\rho \sigma \cos \Psi'$, $F_2^+ = -\rho \sigma \sin \Psi'$, $f = 8(1 - \nu^2)^{1/2} (R^2 - r^2)^{1/2} [\pi E_0 (2 - \nu_0)]$ где $0 \leq \Psi' \leq 2\pi$ — угол между приращением смещения δu и осью X_1 .

Используя выражение (2.1), приходим к уравнению, определяющему направление движения

$$\delta \Psi' = -(\sin \Psi' \delta \tau_1 - \cos \Psi' \delta \tau_2) / \rho \sigma \quad (2.2)$$

Краевое условие (2.1) и уравнение (2.2) определяют изменение напряженного состояния вдоль траектории нагружения в предположении, что вдоль трещины имеют место монотонные изменения взаимных смещений (нагрузка $du_i^- / d\theta \geq 0$, разгрузка $du_i^- / d\theta \leq 0$, $i=1, 2$). При нарушении монотонности ($\delta u_i^- \leq 0$, $\theta \leq \theta_A$, $\delta u_i^- \geq 0$, $\theta \geq \theta_A$) взаимные смещения при последующем нагружении не изменяются. При этом для дальнейшего изменения смещений необходимо выполнение следующих неравенств, соответственно, для нагрузки и разгрузки:

$$\tau_i - \tau_i(A) \geq -(F_i - F_i(A)), \quad \tau_i - \tau_i(A) \leq -(F_i - F_i(A)) \quad (2.3)$$

В общем случае возможна комбинация режимов нагрузки и разгрузки вдоль осей X_1 , X_2 . При этом $F_1 = F_1(\theta)$, $F_2 = F_2(\theta)$ при изменении взаимных смещений определяются из (2.1), а в случае постоянства условий — из (2.3), которые в этом случае переходят в равенства.

При рассмотрении кривой нагружения $\tau_1 = \tau_1(\theta)$, $F_1 = F_1(\theta)$ на плоскости (τ_1, F_1) для режимов нагрузки и разгрузки вдоль оси X_1 возникают соответствующие характеристические области, определяемые (2.3). Аналогичные области возникают на плоскости (τ_2, F_2) для кривой нагружения $\tau_2 = \tau_2(\theta)$, $F_2 = F_2(\theta)$. Построение их на этих плоскостях аналогично фиг. 1. При попадании в характеристическую область кривых нагружения вдоль осей возникает изменение взаимных смещений. При этом, согласно сделанному утверждению, эти кривые попадают в эти области одновременно. Таким образом, для описания напряженного состояния твердого тела с дисковой трещиной необходимо решить систему (2.1) (2.2), выделяя при этом на плоскостях (τ_1, F_1) , (τ_2, F_2) характерные области (2.3). При этом напряженное состояние в конечной точке нагружения является функционалом пути нагружения.

В качестве примера рассмотрим нагружение сначала по оси X_1 , $\sigma_{13}^{\pm} = \tau_1 - \rho \sigma$ ($\sigma = \text{const}$), а затем по оси X_2 ($\tau_1 = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$). Решение краевой задачи (2.1) и уравнения (2.3) имеет вид

$$\ln \left(\frac{1 + \sin \Psi'}{1 - \sin \Psi'} \right) = \frac{2\tau_2}{\rho \sigma}, \quad \tau_2 = 0, \quad \Psi' = 0; \quad \tau_2 \rightarrow \infty, \quad \Psi' \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (2.4)$$

Предположим, что при $\tau \approx (\tau_1, \tau_2)$, $\sigma = \sigma_0$ задано распределение смещений на трещине $\Psi' = \Psi_1'$, $u_1^+ = -f(\tau_1 - \rho \sigma_0 \cos \Psi_1')$, $u_2^+ = -f(\tau_2 - \rho \sigma_0 \cos \Psi_1')$. Приложим к этому напряженному состоянию некоторое возмущение $\delta \tau_i = (\delta \tau_1, \delta \tau_2)$, $\delta \sigma = \delta \sigma_0$. Используя (2.2), найдем в первом приближении вариацию вектора смещения $\delta u_i = (\delta u_1^+, \delta u_2^+)$, $\delta u_1^+ = -f \cos \Psi_1' (\delta \tau_1 \cos \Psi_1' + \delta \tau_2 \sin \Psi_1' + \rho \delta \sigma \sin \Psi_1')$, $\delta u_2^+ = -f \sin \Psi_1' (\delta \tau_1 \cos \Psi_1' + \delta \tau_2 \sin \Psi_1' + \rho \delta \sigma \sin \Psi_1')$, $\delta u_2 / \delta u_1 = \operatorname{tg} \Psi_1'$.

Таким образом, возмущение распространяется по направлению скольжения (в частности, для одноосного нагружения — по направлению сдвигового напряжения).

3. Рассмотрим изотропную среду, ослабленную дискообразными трещинами в приближении малой их концентрации. На бесконечности задан тензор напряжений σ_{ik} . При вариации внешних нагрузок эффективный тензор деформаций получит приращение $\delta \varepsilon_{ik} = 1/2 (\partial \delta u_i / \partial x_k + \partial \delta u_k / \partial x_i)$, где δu_i — компонента вектора приращения макроскопического смещения. В [4] была вычислена эффективная деформация материала в зависимости от скачка вектора смещения на трещине. Используя этот результат, получим, что приращение тензора деформации будет иметь вид [1]:

$$\delta \varepsilon_{ik} = \delta \varepsilon_{ik}^{\circ} + 1/2 \int [n_i \delta v_k + n_k \delta v_i] f dY, \quad \delta \varepsilon_{ik}^{\circ} = S_{iklm}^{\circ} \delta \sigma_{lm} \quad (3.1)$$

$$S_{iklm}^{\circ} = -\frac{\nu_0}{E_0} \delta_{ik} \delta_{lm} + \frac{1 + \nu_0}{2E_0} (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{kl} \delta_{im})$$

Здесь ν_0 , E_0 — коэффициент Пуассона и модуль Юнга сплошной среды, $n_i = (\sin \varphi \cos \Psi, \sin \varphi \sin \Psi, \cos \varphi)$ — нормаль к трещине, Ψ — угол между плоскостями $X_3 X_1$ и $n X_3$, φ — угол между X_3 и n , δv_i — компоненты приращения скачка вектора смещений, проинтегрированные по поверхности трещины, Y — совокупность координат «центров» трещин, F — функция распределения трещин, введенная в [1].

Так как приращение смещения на поверхности трещины зависит от пути нагружения, то ставится задача о нахождении матрицы податливости S_{iklm} , связывающей приращение тензоров эффективной деформации и напряжений

$$\delta \varepsilon_{ik} = S_{iklm} \delta \sigma_{lm} \quad (3.2)$$

Приращение скачка смещения на трещине, как показано в п. 2, зависит от пути нагружения, и в общем случае, имеет вид $\delta v_i = J_{ilm} \delta \sigma_{lm}$, где J_{ilm} зависит от траектории нагружения и для данной трещины определяется по методу, развитому в п. 2.

Если в процессе нагружения направление сдвиговой силы на трещине не изменяется или силы трения отсутствуют, J_{ilm} имеет вид

$$J_{ilm} = B_1 n_i n_m n_l + B_2 ((\delta_{il} n_m - n_l n_m n_i) - \rho n_i n_m \tau_l) \quad (3.3)$$

$$B_1 = 16/3 (1 - \nu_0^2) R^3 / E_0, \quad B_2 = 32 (1 - \nu_0^2) R^3 / [3E_0 (2 - \nu_0)]$$

где τ_i — единичный вектор, характеризующий направление сдвиговой силы вдоль трещины, являющейся функцией σ_{ik} , и равный $\tau_i = F_i / |F|$; $F_i = -\sigma_{im} (\delta_{il} n_m - n_l n_m n_i)$. Если трещина раскрыта (растяжение), то в выражении вариации смещения следует положить $\rho = 0$, если же берега контактируют, то в δv_i $B_1 = 0$.

Подставляя δv_i в выражение (3.1), с учетом (3.2), (3.3) вычислим матрицу податливости трещиноватой среды:

$$S_{iklm} = S_{iklm}^{\circ} + S_{iklm}^c, \quad S_{iklm}^c = \frac{1}{2} \int [J_{klm} n_i + J_{ilm} n_k] F(\varphi, \Psi, R) \sin \varphi d\varphi d\Psi dR \quad (3.4)$$

В общем случае, как показано в п. 1, коэффициенты B_i зависят от пути нагружения. Следовательно, чтобы определить эффективную деформацию

трещиноватой среды, необходимо проинтегрировать (3.2) вдоль всего пути нагружения. При этом, как следует из выражения (3.1), если все трещины закрыты, то коэффициент всестороннего сжатия трещиноватой среды совпадает с коэффициентом всестороннего сжатия материала ($\delta \varepsilon_{\circ}^c = 0$) и объемная деформация не зависит от пути нагружения. Если берега трещин не контактируют, то выражение (3.4) совпадает с полученным в [1].

Рассмотрим случай отсутствия силы трения, когда берега трещины контактируют при любой ее ориентации. Используя выражения (3.3), (3.4) (при этом $\rho = 0$, $B_i = 0$), вычислим матрицу податливости для изотропного распределения трещин с плотностью N :

$$S_{ihlm} = -\frac{\nu}{E} \delta_{ih} \delta_{lm} + \frac{(1+\nu)}{2E} (\delta_{il} \delta_{hm} + \delta_{hl} \delta_{im}), \quad \kappa = \kappa_0$$

$$E = E_0(1-2f), \quad \nu = \nu_0(1+f(1-2\nu_0))$$

$$f = 32(1-\nu_0^2)\Omega/45(2-\nu_0), \quad \Omega = NR_0^3, \quad R_0^3 = \int R^3 F(R) dR$$

где κ , E , ν — эффективный объемный модуль, модуль Юнга, коэффициент Пуассона.

В этом случае трещиноватая среда, как и в [1], является изотропной с эффективными упругими модулями ν , E .

4. Рассмотрим деформацию среды, ослабленной дискообразными трещинами в случае воздействия сначала всесторонним сжатием $\sigma_{ij} = p\delta_{ij}$, $p < 0$, а затем одноосным сжатием $\sigma_{ij} = S\delta_{i3}\delta_{j3}$, $S < 0$. На фиг. 2 изображена траектория нагружения для этого случая. Как следует из проведенного в п. 1 анализа, для возникновения взаимных смещений вдоль трещины необходимо попадание в область II. Вдоль каждой такой траектории нагружения взаимные смещения увеличиваются. Предельные значения $S = S_k$, при которых возникают взаимные смещения $|S| \geq 2|p| \sin \beta / (1 - \sin \beta) = |S_k|$, $\beta = \arctg \rho$.

Тензор податливости определяется по формулам (3.3) через коэффициенты B_i . В силу симметрии деформацию будем рассматривать в верхней полуплоскости ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$). Используя условия возникновения взаимных смещений и выражения (3.4), получим

$$|S| \leq |S_k| \quad (B_1 = B_2 = 0) \quad (4.1)$$

$$|S| \geq |S_k| \quad (B_1 = 0) \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2)$$

$$B_2 = 32(1-\nu_0^2)R^3 / [3E_0(2-\nu_0)] \quad (\eta_1 \leq \varphi \leq \eta_2)$$

$$B_2 = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \eta_1) \quad (\eta_2 \leq \varphi \leq \pi/2)$$

$$\eta_1 = (\beta + \eta) / 2, \quad \eta_2 = \pi/2 - (\eta - \beta) / 2$$

$$\beta \leq \eta = \arcsin(\sin \beta (2p/S + 1)) \leq \pi/2$$

Подставляя (4.1) в (3.3), вычислим тензор податливости

$$|S| \leq |S_k|, \quad S_{ihlm}^c = 0, \quad |S| \geq |S_k|, \quad S_{1133}^c = S_{2233}^c = -A(f(\eta_2) - f(\eta_1)) \quad (4.2)$$

$$S_{3333}^c = 2A(f(\eta_2) - f(\eta_1)), \quad A = 16\Omega(1-\nu_0^2) / [3E_0(2-\nu_0)]$$

$$\Omega = NR^3, \quad f(\varphi) = 1/5 \cos^5 \varphi - 1/3 \cos^3 \varphi - 1/3 \rho \sin^3 \varphi + 1/5 \rho \sin^5 \varphi, \quad S_{ihlm}^c = S_{ihlm}^o + S_{ihlm}^c$$

Используя соотношения (4.1), (3.5), (3.6), вычислим изменение деформации вдоль оси

$$\delta \varepsilon_{33} = \delta \varepsilon_{33}^o + \delta \varepsilon_{33}^c, \quad \delta \varepsilon_{33}^o = \delta S / E_0 \quad (4.3)$$

$$\delta \varepsilon_{33}^c = 2A(f(\eta_2) - f(\eta_1)) \delta S, \quad \eta_1 \leq \varphi \leq \eta_2$$

$$\delta \varepsilon_{33}^c = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \eta_1, \quad \eta_2 \leq \varphi \leq \pi/2$$

5. Рассмотрим теперь процесс разгрузки среды после указанного цикла нагружения. На фиг. 2 показана область, где возникают возвратные смещения при разгрузке, откуда видно, что в зависимости от конечных значений параметров нагружения траектории разгрузки не всегда оказываются в области, где возможны возвратные смещения ($p = \text{const}$). Следовательно, после возвращения в точку $\sigma = -p$ ($S = 0$) вдоль трещины будут сохраняться некоторые остаточные смещения, а в среде — остаточные деформации, связанные с наличием сил трения и всестороннего сжатия на трещине (за исключением случая $p = 0$). Чтобы устранить эти остаточные деформации, материал необходимо подвергнуть растяжению. Предельное напряжение, при котором начнутся возвратные смещения, определится выражением

$$\rho^2(16p^2 + 8p(S_0 + S_1)) = (S_0 - S_1)^2 \quad (5.1)$$

Используя условие возникновения возвратных смещений (5.1), определим выражение для коэффициентов $B_i(\varphi)$ и S_{ijkl} :

$$|S| \geq |S_0|, \quad (B_1 = B_2 = 0), \quad |S| \leq |S_0| \quad (B_1 = 0) \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \quad (5.2)$$

$$B_2 = 32(1 - \nu_0^2)R^3/[3E_0(2 - \nu_0)] \quad (\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2)$$

$$B_2 = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1) \quad (\varphi_2 \leq \varphi \leq \pi/2)$$

$$\varphi_2 = (\gamma + \alpha)/2, \quad \varphi_1 = \pi/2 - (\gamma - \alpha)/2$$

$$\beta \leq \alpha = \arctg[\rho(S + S_1)/(S_1 - S)] \leq \pi/2$$

$$\gamma = \arcsin[\rho(4p + S + S_1)/[(S - S_1)^2 + \rho^2(S + S_1)^2]^{1/2}]$$

$$S_{1133}^c = S_{2233}^c = -A(f(\varphi_2) - f(\varphi_1)), \quad S_{3333}^c = 2A(f(\varphi_2) - f(\varphi_1))$$

Подставляя (5.2) в (3.1) и (3.3), вычислим тензор податливости и изменение объемной деформации $\delta \varepsilon_{33}$ при разгрузке: $\delta \varepsilon_{33} = \delta S/E_0$, $|S_0| \leq |S| \leq |S_1|$, $\delta \varepsilon_{33} = \delta S/E_0 + 2A(f(\varphi_2) - f(\varphi_1))\delta S$, $|S| \leq |S_0|$.

Рассмотрим теперь повторное нагружение после разгрузки начиная с некоторого значения $S = S_2$ ($0 \leq |S_2| \leq |S_1|$). Используя результаты п. 1, определим значение $S = S_3$, при котором возникают увеличивающиеся взаимные смещения (нагрузка), и ориентацию трещин, где они происходят

$$\rho^2(16p^2 + 8p(S_3 + S_2)) = (S_2 - S_3)^2 \quad (5.3)$$

$$|S| \geq |S_3| \quad (B_1 = B_2 = 0), \quad |S| \leq |S_3| \quad (B_1 = 0) \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2)$$

$$B_2 = 32(1 - \nu_0^2)R^3/[3E_0(2 - \nu_0)] \quad (\varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_4)$$

$$B_2 = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_3, \quad \varphi_4 \leq \varphi \leq \pi/2)$$

$$\alpha_1 = \arctg[\rho(S + S_2)/(S - S_2)] \leq \pi/2$$

$$\gamma_1 = \arcsin[\rho(4p + S + S_2)/[\rho^2(S + S_2) + (S - S_2)^2]^{1/2}]$$

$$\varphi_3 = (\gamma_1 + \alpha_1)/2, \quad \varphi_4 = \pi/2 - (\gamma_1 - \alpha_1)/2$$

Используя (5.3), (3.1), (3.2), вычислим отличные от нуля компоненты тензора податливости и изменение объемной деформации

$$|S| \geq |S_3|, \quad S_{1133}^c = S_{2233}^c = -A(f(\varphi_4) - f(\varphi_3))$$

$$S_{3333}^c = 2A(f(\varphi_4) - f(\varphi_3)), \quad S_{ijkl}^c = S_{ijkl}^o + S_{ijkl}^m$$

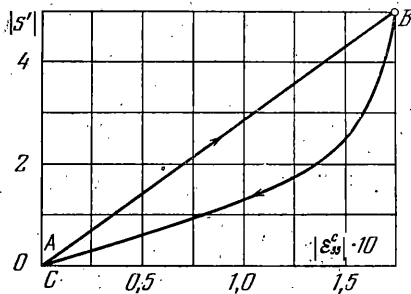
$$\delta \varepsilon_{33} = \delta S/E_0 + 2A[f(\varphi_4) - f(\varphi_3)]\delta S \quad (|S| \geq |S_3|)$$

$$\delta \varepsilon_{33} = \delta S/E_0 \quad (|S_2| \leq |S| \leq |S_3|)$$

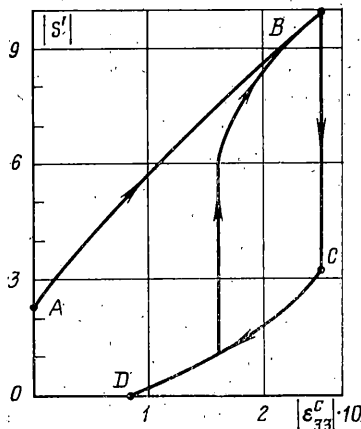
График зависимости деформации ε_{33}^c для значений параметров $p = 0$, $p/E_0 = -1$, $\rho = 0,6$, $\varepsilon_{33}^c = \varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^o$ как функции безразмерной переменной $S' = S/E_0$ изображен на фиг. 3, 4. При нагружении до критического значения S_k среда деформируется как сплошная, изотропная с упругими модулями ν_0 , E_0 . Начиная с некоторого значения $S = S_k$ деформация носит нелинейный характер (прямая AB). На стадии разгрузки среда также

вначале деформируется как сплошная (участок BC), изотропная с упругими модулями ν_0, E_0 . Начиная с некоторого предельного значения $S=S_0$, разгрузка носит нелинейный характер, а при $S=0$ возникают остаточные деформации ε_p (при $S=0$, фиг. 4 участок OD).

На фиг. 4 изображен график зависимости ε_{33} для цикла нагрузка — разгрузка — нагрузка при значениях параметров нагружения $p/E_0 = -1, \rho = 0,6, S_1' = 10, S_1' = S_1/E_0$. До значения $|S_2| \leq |S| \leq |S_3|$ среда деформируется как сплошная, изотропная с упругими модулями E_0, ν_0 , а при $|S| \geq |S_3|$ деформация носит нелинейный характер. Как следует из (4.4), кривая зависимости деформации от нагружения после цикла разгрузка — нагрузка (BC , фиг. 4) возвращается в точку, из которой начался процесс



Фиг. 3



Фиг. 4

разгрузки (точка B , фиг. 4). Площадь, охватываемая кривой, будет характеризовать диссипативные потери.

Таким образом, получено, что в случае наличия взаимодействия берегов трещины деформация трещиноватой среды носит нелинейный характер, что существенно отличается от результатов [4].

В конце п. 2 было показано, что при воздействии сдвигового возмущения на трещину приращение взаимного смещения возникает по направлению скольжения берегов трещины. Следовательно, при воздействии на среду, предварительно сжатую напряжением σ_{lm} , возмущением $\delta\sigma_{lm}$, приращение взаимного смещения возникает для ориентации трещин, определяемых уравнением

$$-\delta\sigma_{lm}\tau_l n_m \geq 0, \quad \delta\sigma_{lm}(n_m \tau_l - \rho n_m n_l) \geq 0 \quad (5.4)$$

При этом тензор податливости, связывающий приращения $\delta\varepsilon_{lm}$ и $\delta\sigma_{lm}$, как следует из (3.3), вообще говоря, анизотропен. В качестве примера рассмотрим случай, когда трещиноватая среда сжата, как в пп. 4, 5, а возмущение $\delta\sigma_{lm} = \delta p \delta_{lm}$ ($\delta p \geq 0$ — всестороннее растяжение). В этом случае матрица податливости анизотропна и имеет вид

$$\begin{aligned} S_{3333}^c &= 2\rho A [f_1(\eta_2) - f_1(\eta_1)], & S_{1111}^c &= S_{2222}^c = -\frac{3}{4}\rho A [f_2(\eta_2) - f_2(\eta_1)] \\ S_{1133}^c &= S_{2233}^c = -\rho A [f_1(\eta_2) - f_1(\eta_1)], & S_{1122}^c &= S_{2211}^c = -\rho A [f_2(\eta_2) - f_2(\eta_1)]/4 \\ S_{3311}^c &= S_{3322}^c = \rho A [f_2(\eta_2) - f_2(\eta_1)], & f_1 &= -(\sin^3 \varphi/3 - \sin^5 \varphi/5) \\ & & f_2 &= -\sin^5 \varphi/5, \quad A = 16\Omega(1 - \nu_0^2)/[3E_0(2 - \nu_0)] \end{aligned}$$

где η_1, η_2 определяют ориентацию трещин, вдоль которых имели место взаимные смещения в конце нагружения.

Таким образом, показано, что деформация трещиноватой среды при сжимающих нагрузках в общем случае нелинейна, необратима и анизотропна. При этом сжимающее напряжение влияет на характер и скорость распространения упругих волн, которые в случае малых возмущений определяются соотношениями (3.3) и (5.4). Распространение волн напряжений конечной величины будет сопровождаться нелинейными эффектами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салганик Р. Л. Механика с большим числом трещин. — Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4, с. 149—158.
2. Житников Ю. В., Тулинов Б. М. Взаимодействие между берегами разреза в сложнапряженном состоянии. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 4, с. 168—172.
3. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
4. Walsh J. B. The effect of cracks on the uniaxial elastic compression of rocks. — J. Geophys. Res., 1965, v. 70, No. 2, p. 399—411.

Москва

Поступила в редакцию
12.VII.1982