

УДК 539.375

К ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ХРУПКИХ ТЕЛ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

АРТЕМЬЕВ И. Т., ИВЛЕВ Д. Д.

В [1, 2] рассматривались вопросы разрушения тел, сопротивляющихся сдвигу и отрыву. Используется обобщение модели идеальной жесткопластической среды, такое, что кроме пластического среда способна находиться в состоянии отрыва, что наблюдается в телах, обладающих хрупкостью. В публикуемой работе на примере клина, изгибаемого равномерно распределенным давлением, приложенным к одной из граней, для случая плоской деформации, рассматриваются линии разрыва напряжений при предельных условиях сопротивления сдвигу и отрыву. Полученные результаты обобщают известную теорию разрывных решений [3, 4].

1. Определим разрывное поле напряжений, возникающее в области $ACDB$ клина (фиг. 1, a) под действием предельной нагрузки, равномерно распределенной на отрезке AC правой грани. В области сдвиговых (пластических) разрушений главные напряжения σ_1, σ_2 подчинены условию

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k \quad (k = \text{const} > 0) \quad (1.1)$$

а в области отрывных (хрупких) разрушений — условию

$$\sigma_1 = d \quad (d = \text{const} > 0, \sigma_1 - \sigma_2 < 2k) \quad (1.2)$$

Обозначим компоненты напряжения в треугольных областях ACD и ABD верхними индексами плюс и минус соответственно. В силу равномерности нагрузок на гранях клина в обеих областях осуществляется равномерное напряженное состояние. В области ACD , находящейся в состоянии растяжения, выполняется условие отрыва (1.2), т. е. $\sigma_1^+ = d$ и $\sigma_2^+ = -q < 0$. Здесь уравнения для напряжений принадлежат к параболическому типу [1, 2] и имеют одно семейство прямолинейных характеристик, ортогональных главному направлению σ_1^+ . Зона ABD находится в состоянии сжатия, в ней всюду выполняется условие сдвига (1.1), т. е. $\sigma_1^- - \sigma_2^- = 2k$, причем $\sigma_1^- = 0$. Уравнения для напряжений принадлежат в этом случае к гиперболическому типу и имеют два ортогональных семейства характеристик [2].

Угол раствора клина γ задан, а α и β , определяющие положение линии разрыва напряжений AD , найдем вместе с модулем предельного давления q . Причем $\alpha = \gamma - \beta$.

Направим ось y правой прямоугольной декартовой системы координат x, y по DA . Компоненты напряжения связаны с главными напряжениями известными соотношениями

$$\sigma_x = \sigma + \tau \cos 2\psi, \quad \sigma_y = \sigma - \tau \cos 2\psi \quad (1.3)$$

$$\tau_{xy} = \tau \sin 2\psi, \quad \sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2, \quad \tau = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$$

где ψ — угол между первым главным направлением σ_1 и осью x [2].

В силу равновесия клина на линии разрыва напряжений должны иметь место условия

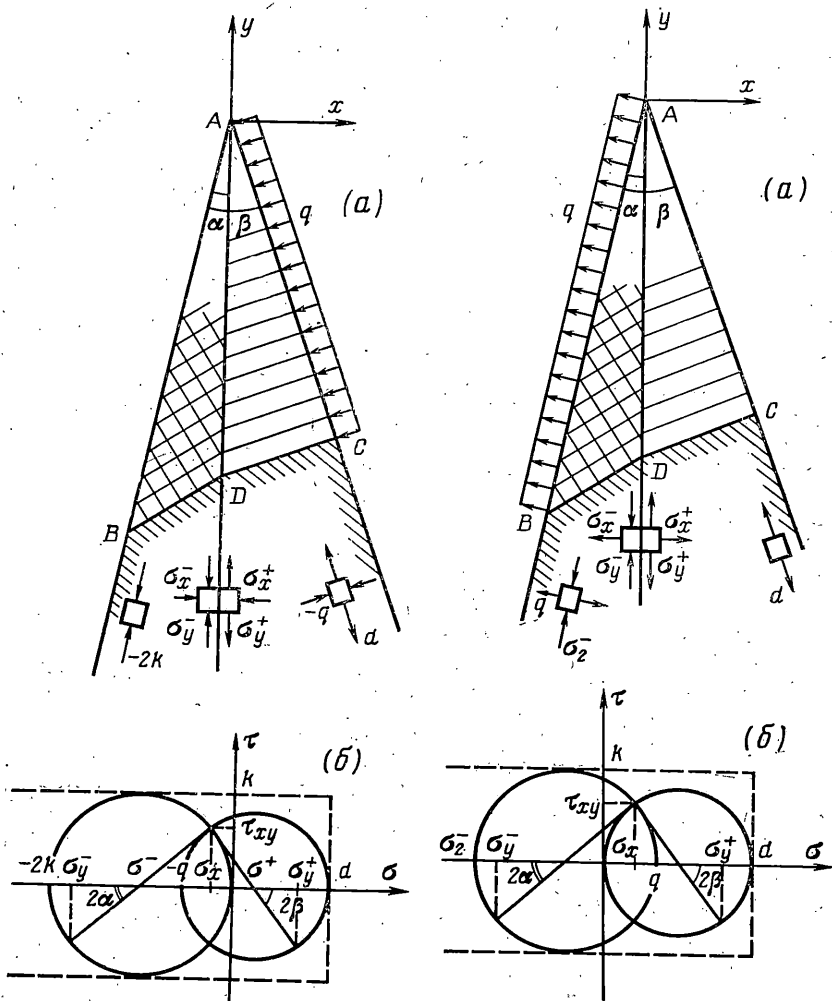
$$\sigma_x^+ = \sigma_x^-, \quad \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- \quad (1.4)$$

Так как слева от линии разрыва напряжений $\psi = \psi^- = \alpha$, а справа $\psi = \psi^+ = \pi/2 - \beta$, то соотношения (1.3) определяют нормальные σ_x^+ , σ_x^- и касательные τ_{xy}^+ , τ_{xy}^- компоненты напряжения на линии AD через главные напряжения соответствующих индексам плюс и минус областей. Тогда из двух уравнений (1.4) найдем неизвестные β и q :

$$\operatorname{tg} \beta = \sin 2\gamma / [2(\mu + \cos^2 \gamma)], \quad \mu = d/2k \quad (1.5)$$

$$v = \mu \sin^2 \gamma / (\mu + \cos^2 \gamma), \quad v = q/2k \quad (1.6)$$

Для интерпретации полученных результатов используем диаграмму Мора (фиг. 1, б). На ней круг радиуса $R = \tau^- = k$ с центром в точке



Фиг. 1

Фиг. 2

$\sigma^- = -k$ на оси σ соответствует напряженному состоянию в области сдвига. Круг меньшего радиуса

$$r = \tau^+ = 1/2 d(\mu + 1) / (\mu + \cos^2 \gamma) \quad (1.7)$$

с координатой центра $\sigma^+ = 1/2(d - q)$ соответствует напряженному состоянию в области отрыва. Геометрически задача сводится к построению этого малого круга по условиям (1.2), (1.4) и $\alpha + \beta = \gamma$. Очевидно, такая задача является обобщением задачи об определении разрывных решений в остроугольном клине из идеально пластического материала [3, 4]. В этом случае радиусы обоих кругов Мора совпадают и равны k .

Действительно, в рассматриваемом случае минимально возможное значение радиуса r равно $d/2$, при этом $q=0$, $\alpha=\beta=\gamma=0$, а при возрастании угла γ радиус r увеличивается достигая предела пластичности k при $\cos \gamma = \mu$, как следует из (1.7). Следовательно, для достаточно больших углов раствора клина, таких, когда $\gamma \geq \arccos \mu$, разрушение носит лишь сдвиговой характер. При этом линия разрыва напряжений становится биссектрисой клина.

Разрыв нормальной компоненты напряжения $[\sigma_y]$ просто выражается через известные α и β :

$$[\sigma_y] = \sigma_y^+ - \sigma_y^- = 2k \cos 2\alpha + 2r \cos 2\beta \quad (1.8)$$

2. Достичь разрушения клина отрывом можно также при помощи обратной равномерной нагрузки, приложенной по внешней нормали, например, к левой грани клина на отрезке AB (фиг. 2, а).

Определяя разрывное поле напряжений аналогично п. 1, систему координат и условие для индексов плюс и минус оставим прежними. Под действием предельной нагрузки с модулем q в области клина ABD , левее линии разрыва напряжений, возникает равномерное напряженное состояние пластичности: $\sigma_1^- = q$, $\sigma_2^- = q - 2k$. Область ACD , правее линии разрыва, подвержена отрывному разрушению при равномерном напряженном состоянии: $\sigma_1^+ = d$, $\sigma_2^+ = 0$. Через главные напряжения выразим, согласно (1.3), нормальные σ_x^+ , σ_x^- и касательные τ_{xy}^+ , τ_{xy}^- компоненты напряжений с двух сторон на линии разрыва, а из уравнений (1.4) найдем β и q :

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{\sin 2\gamma}{\mu + \cos 2\gamma}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\gamma}{\mu^{-1} + \cos 2\gamma} \quad (2.1)$$

$$v = \frac{1+\mu}{2} - \sqrt{\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^2 + \mu \cos^2 \gamma} \quad (2.2)$$

На диаграмме Мора (фиг. 2, б) в данном случае фиксирован малый круг радиуса $r=d/2$, соответствующий области отрыва. Задача сводится геометрически к построению большого круга радиуса $R=k$, интерпретирующего напряженное состояние в области сдвига, при условиях (1.1), (1.4) и $\alpha+\beta=\gamma$. Разрыв нормального напряжения $[\sigma_y]$ на AD можно представить в виде

$$[\sigma_y] = 2k \cos 2\alpha + d \cos 2\beta \quad (2.3)$$

В тривиальном случае $\gamma=0$, имеем $q=\alpha=\beta=0$, т. е. круги Мора касаются в точке $\sigma=0$. В другом предельном случае $\beta=\pi/2$, $\alpha=0$ и $q=d$ круги имеют точку касания $\sigma=d$. Но, как следует из (2.1), $\beta \rightarrow \pi/2$ при $\gamma \rightarrow \pi/2$; т. е. в случае прямоугольного клина область сдвига ABD исчезает, ибо $\alpha \rightarrow 0$. При этом $v=\mu$ (2.2) и при бесконечной полосе нагружения AB клин полностью подвержен отрывному разрушению. Очевидно, если полоса нагружения AB конечна, то в прямоугольном клине область отрыва вырождается в линию нагружения AB .

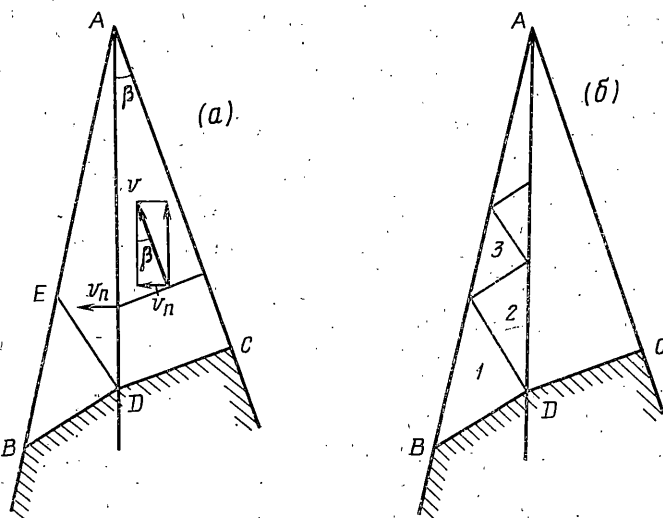
3. Рассмотрим анализ поля скоростей перемещений, следуя [5]. Вдоль характеристики в зоне отрыва компоненты скорости направлены ортогонально к ним и сохраняют постоянное значение [1, 2]. Если вдоль линии AC (фиг. 3, а) заданы компоненты скорости, то на линии разрыва напряжений AD могут быть определены нормальные компоненты скорости, непрерывные вдоль AD .

Линия AD является линией разрыва касательных к ней компонент скоростей перемещений. Компоненты скорости вдоль линии AD , прилегающей к зоне сдвига ABD (фиг. 3), положим равными нулю [6]. Тогда в зоне ADE (фиг. 3, а) для определения скорости перемещений имеем задачу Коши, а в области BDE имеем смешанную задачу: (предполагается, что на BD нормальная компонента скорости равна нулю).

Если вдоль линии AB (фиг. 3, б) определены нормальные компоненты скорости, то в области ABD , согласно [5], поле скоростей перемещений определяется из рассмотрения бесконечной последовательности треугольников 1, 2, 3..., в каждом из

которых рассматривается смешанная краевая задача. Следовательно, в зоне ABD на линии AD могут быть определены нормальные компоненты скорости перемещений. Таким образом, известны нормальные компоненты скорости на AD в зоне ACD . По ним определяются компоненты скорости вдоль характеристик в области ACD , т. е. поле скоростей определено полностью.

Поверхности текучести $f_p(\sigma_{ij})=0$ ($p=1, 2$) в областях сдвига и отрыва определяются условиями (1.1) и (1.2) соответственно. Компоненты скоростей деформаций $\epsilon_{ij}=\lambda_p \partial f_p / \partial \sigma_{ij}$ согласно ассоциированному закону течений [2]. В области сдвига имеем $\epsilon_1=\lambda_1$, $\epsilon_2=-\lambda_1$, а в области отрыва $\epsilon_1=\lambda_2$, $\epsilon_2=0$. Таким образом, при условиях (1.2) в области отрыва $\epsilon_1+\epsilon_2 \neq 0$ материал не обладает свойством несжимаемости, что считаем здесь моделью хрупких свойств материала клина. При достижении



Фиг. 3

предельной нагрузки (1.2) $\epsilon_1+\epsilon_2=0$ в состоянии пластичности материал становится несжимаемым.

Очевидно, что диссипация энергии $D=\sigma_1\epsilon_1+\sigma_2\epsilon_2$ в рассмотренных случаях положительна. Это обстоятельство легко проверяется непосредственно.

4. Представляется возможным на основе построенного решения исследовать условия пересечения в одной точке нескольких линий разрыва напряжений, отделяющих области сдвига и отрыва. Чисто пластический случай рассмотрен в [6].

К основаниям BE и AC симметричного усеченного клина (фиг. 4, а) приложены взаимно уравнивающиеся, равномерно распределенные нагрузки p и q соответственно. Геометрические параметры усеченного клина таковы, что в результате действия предельной нагрузки клин разделен линиями разрыва напряжений AD , BD , ED , CD на четыре области постоянных напряжений. Причем состояние материала клина определяется условиями (1.1), (1.2).

Если ось y правой декартовой прямоугольной системы координат направить от D к A , в области 2 компонентам напряжений приписать верхний индекс минус, а в области 3 — верхний индекс плюс, то для напряженного состояния этих областей станут справедливы условия и результаты п. 1. В этом нетрудно убедиться, если от областей 2 и 3 мысленно отсечь остроугольный клин с вершиной A и рассмотреть его равновесие. Область 3, следовательно, подвержена отрыву, а область 2 — сдвигу. Значения q и β определены в (1.5) и (1.6) как функции угла $\gamma=\pi/2-\delta$. Разрыв напряжений на AD определен в (1.8).

Рассмотрим напряженное состояние тупого клина с вершиной B , отсеченного от областей 1 и 2. Область 2 находится в сдвиговом пластическом состоянии, угол при вершине B больше $\arccos \mu$, ибо косинус его отрицателен, $\mu > 0$. Из этого следует, как показано в п. 1, что и область 1 нахо-

дится в пластическом состоянии, а линия BD является биссектрисой.

Поскольку случай сопряжения пластических областей исследован [6], укажем известный результат для предельной нагрузки:

$$p = 2k(1 + \sin \delta) = 2k(1 + \cos \gamma) \quad (4.1)$$

Отметим, что если считать угол при вершине B равным $2\gamma_*$, то (4.1) приводится к виду, совпадающему с известным результатом для острого клина [6]: $p = 2k(1 - \cos 2\gamma_*)$.

Если ось y направить вдоль линии разрыва DB , то разрыв напряжения на ней можно найти в виде $[\sigma_y] = 4k \cos \gamma = 4k \sin \delta$.

Высоту усеченного клина выразим через высоты H и h клиньев COA и EOB соответственно (фиг. 4, а): $H - h = h \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \gamma_* + H \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \beta$.

Отсюда с учетом (1.6) найдем геометрический параметр H/h как некоторую функцию $\kappa(\delta)$: $H/h = (\mu + \sin^2 \delta) \mu^{-1} (1 - \sin \delta)^{-1}$.

Учитывая (4.1) и (1.6), нетрудно убедиться, что и $p/q = \kappa(\delta)$. Следовательно, $p/q = H/h$, т. е. условие равновесия клина в целом выполнено автоматически, что подтверждают результаты.

Если нагрузка, приложенная к усеченному клину, растягивающая (фиг. 4, б), то, направив ось y от D к A и сохранив верхние индексы плюс и минус в областях 2 и 3 прежними, убедимся, что равновесие остроугольного клина с вершиной A , отсеченного от областей 2 и 3, осуществляется при условиях (1.1)–(1.4), интерпретируемых диаграммой Мора на фиг. 2, б. Поэтому здесь справедливы результаты (2.1)–(2.3), в которых можно считать $\gamma = \pi/2 - \delta$. Область 2 подвержена сдвиговому разрушению, а область 3 – отрыву.

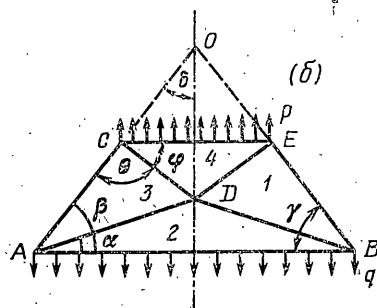
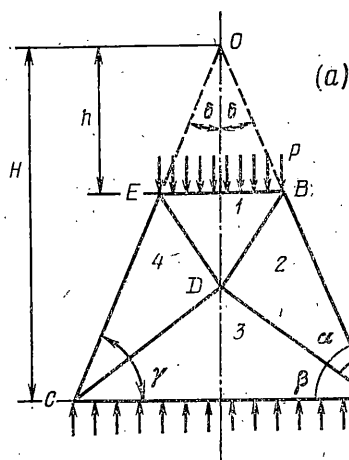
Рассматривая равновесие тупоугольного клина с вершиной C , отсеченного от областей 3 и 4, представим условия его равновесия в виде двух уравнений $p \cos \varphi = d \sin \theta \cos \delta$, $\sigma_4 \sin \varphi = d \sin \theta \sin \delta$.

Здесь $\sigma_4 = d$ как главное напряжение в области 4, подвергающейся отрыву. Зная, что $\varphi = \pi/2 + \delta - \theta$, из последних уравнений найдем $\theta = \pi/2$, $\varphi = \delta$ и $p = d$. Таким образом, линия разрыва CD перпендикулярна грани AC , т. е. параллельна характеристикам области 3. В области 4 осуществляется равномерное гидростатическое напряженное состояние отрыва. Соответствующий круг Мора вырождается в точку $\sigma = d$. На оси y , направленной по DC , разрыв напряжения $[\sigma_y] = d$.

Для геометрической характеристики усеченного клина здесь имеем уравнение $H - h = h \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi + H \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \alpha$.

Отсюда с учетом (2.1), (2.2) и $\varphi = \delta$ найдем параметр $\kappa(\delta) = \mu/\nu(\delta) = d/q(\delta)$, $\delta = \pi/2 - \gamma$. Последнее автоматически удовлетворяет условию равновесия клина в целом. Параметр κ определяет размеры усеченного клина, необходимые для возникновения рассмотренного случая пересечения линий разрыва напряжений.

Авторы признательны Г. С. Шапиро за ценные замечания.



Фиг. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ислев Д. Д.* К теории разрушения твердых тел.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 3, с. 618—624.
2. *Ислев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
3. *Prager W.* Discontinuous solutions in the theory of plasticity.— In: Courant Anniversary Volume. N. Y.: Intersci., 1948, p. 289—300.
4. *Шапиро Г. С.* О предельном равновесии сыпучего клина и разрывном решении статики сыпучей среды.— ПММ, 1952, т. 16, вып. 2, с. 253—254.
5. *Lee E. H.* On stress discontinuities in plane plastic flow.— In: Elasticity. Proc. of the 3rd Symposium Appl. Mathem. N. Y.: McGraw-Hill, 1950, p. 213—228.
6. *Прагер В., Ходж Ф. Г.* Теория идеально пластических тел. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 398 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию
9.III.1983