МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1984

УДК 539.375

ОБЪЯСНЕНИЕ МАСШТАБНОГО ЭФФЕКТА НА ОСНОВЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ РАЗРУШЕНИЯ

ПОЛИЛОВ А. Н.

Прочность хрупких материалов снижается с ростом абсолютных размеров тела и это, как правило, объясняют с позиции теории «слабейшего звена», т. е. повышением вероятности попадания в нагруженную зону достаточно опасного дефекта, снижающего реализацию прочности. Однако масштабный эффект следует также из предположения, что накопленная в объеме тела упругая энергия переходит в работу разрушения по некоторой поверхности. В [1] из анализа размерностей показано, что наличие в материале поверхностной энергии разрушения приводит к зависимости прочности от размера структурной ячейки как на квантовомеханическом, так и на макроуровне для неоднородных материалов с гипотетическими дефектами.

В публикуемой работе на совершенно элементарных примерах проиллюстрировано проявление масштабного эффекта при применении энергетического критерия прочности к задачам о хрупком разрушении, в частности о расслоении композитов в балочном приближении.

1. Рассмотрим в качестве простейшего примера элемент хрупкого материала длиной l, шириной b и толщиной h, равномерно растягиваемый напряжением σ в направлении длины. Предполагается линейно-упругое поведение материала вплоть до разрушения (фиг. 1). Тогда накопленная упругая энергия в теле $U={}^1/_2\sigma^2 bhl/E$, где E — модуль Юнга в направлении растяжения. Пусть разрушение состоит в быстром разделении образца на две части; при этом площадь поверхности разрушения равна bh, а работа разрушения $R=\gamma bh$, где γ — удельная работа разрушения.

Предположение. Допускается, что вся накопленная упругая энергия затрачивается на разрушение, которое начнется, когда упругая энергия станет достаточной для совершения работы разрушения R. В действительности эта гипотеза $U=R$ есть лишь необходимое условие разрушения, которое дает нижнюю оценку прочности:

$$\sigma=\sqrt{2E\gamma/l} \tag{1.1}$$

Тот факт, что упругая энергия накапливается в теле и пропорциональна объему, а разрушение происходит по поверхности и работа разрушения пропорциональна площади сечения, приводит к неизбежной зависимости прочности от абсолютных размеров тела.

2. Рассмотрим равномерное нагружение поликристаллического сплава приложенным напряжением σ. Зерна можно для простоты считать сферической формы. Вторичные напряжения в зерне полагаются пропорциональными приложенным $\beta\sigma$ и равномерно распределенными по зерну. Накопленная при линейном деформировании материала упругая энергия зерна диаметром d равна $U={}^1/_{12}\beta^2\sigma^2\pi d^3/E$. В момент зарождения пластических областей при начале отклонения диаграммы деформирования от линейной происходят сдвиги по части ($\alpha<1$) поверхности зерна площадью $\alpha\pi d^2$ (предположение о начале транскристаллитных сдвигов приводит к тем же качественным выводам).

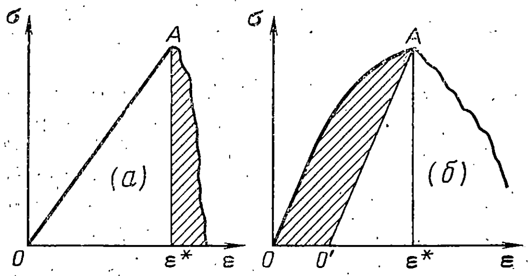
Пусть удельная работа сдвига равна γ. Тогда предположение о том, что доля m упругой энергии переходит в работу сдвига, приводит к зависимости

$$\sigma_Y = 2/\beta\sqrt{3E\alpha\gamma/(md)} = \text{const}/\sqrt{d} \qquad (2.1)$$

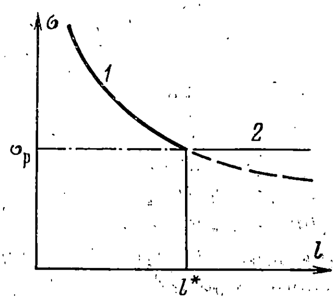
Зависимость вида (2.1) предела текучести σ_Y от размера зерна хорошо известна в физике металлов, но гипотеза п. 1 дает объяснение масштабного эффекта, принципиально отличное от теории слабейшего звена и от анализа дислокационных механизмов.

Предположение о том, что в зерне после возникновения пластического течения осталось некоторое напряжение σ', приводит к зависимости более общего вида $\sigma_Y \approx \sigma' + \text{const}/\sqrt{d}$, подтверждаемой экспериментально [1].

Энергетический критерий представляет собой необходимое условие разрушения, которое определяет нижнюю границу разрушающих напря-



Фиг. 1



Фиг. 2

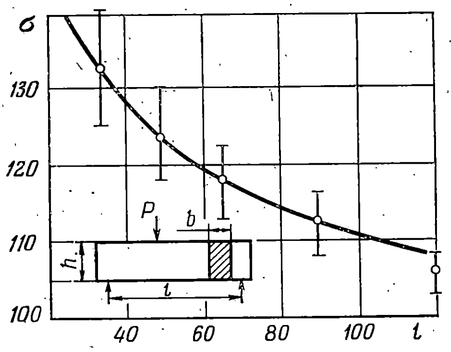
жений. Необходимым и достаточным условием служит одновременное выполнение силового и энергетического условий. Для разрушения при равномерном растяжении, например, необходимо выполнение условия (1.1) и силового условия $\sigma = \sigma_p$.

Схема зависимости прочности от размера тела для одного механизма разрушения представлена на фиг. 2 (кривая *1* соответствует условию (1.1), а прямая *2* — условию $\sigma = \sigma_p$). Смена механизмов разрушения нарушает характер зависимости при уменьшении и увеличении размера. Так, при сжатии образцов из композитов малой длины происходит смятие по торцам, с ростом длины может начаться образование полосы сдвига или расщепление, при дальнейшем росте длины начнется макровыпучивание образца. Для каждого из этих механизмов справедлива своя зависимость прочности от длины, именно поэтому реальная кривая типа изображенной на фиг. 2 практически не выходит на горизонтальный участок справа и не поднимается резко слева из-за смены механизмов.

Из фиг. 2 ясно, что масштабный эффект должен начать явно проявляться для каждого механизма при достаточно малом размере тела, при $l < l_* = 2E\gamma/\sigma_p^2$. Критический размер l_* зависит от характеристики хрупкости материала, а именно от отношения удельной работы разрушения γ к накопленной упругой энергии, выражаемой площадью треугольника $^1/_2\sigma_p^2/E$, показанного на фиг. 1, *а*. Таким образом, при введении γ неявным образом вводится характерный размер материала.

Еще одно ограничение на зависимость типа (1.1) связано со временем разрушения τ. Поскольку волны деформации, напряжений, а следовательно, и энергия не могут распространяться в материале со скоростью, большей скорости упругих волн c, при длине $l > \tau c$ должна исчезать зависимость прочности от размера l.

Разумеется, вид диаграммы деформирования, особенно ее падающего участка, зависит от способа ее записи, от инерционности самописца, от отношения жесткостей нагружающей системы и образца, но интересно, что в принципе хрупкость материала можно характеризовать количественно по виду диаграммы площадью заштрихованной на фиг. 1, *а* области, отнесенной к площади треугольника $OA\varepsilon^*$, по аналогии с тем, как нелинейность деформирования при активном нагружении (работу пластической деформации) можно характеризовать площадью заштрихованной на фиг. 1, *б* фигуры, отнесенной к площади треугольника $O'A\varepsilon^*$.



Фиг. 3

3. Экспериментальные результаты определения изгибной прочности $\sigma={}^3/_2Pl/(bh^2)$ плоских гладких образцов из оргстекла (h=8,6 мм, b=8,2 мм) представлены на фиг. 3, где показаны схема нагружения и обозначения размеров. Точками нанесены средние экспериментальные значения (размерность напряжений — МПа). Сплошные линии — расчет по формуле (3.1). Энергетический критерий для изгиба хрупких образцов приводит к зависимости вида (1.1). Упругая энергия, накопленная в теле при нагрузке P, равна $U={}^1/_8P^2l^3/(Ebh^3)$ и из критерия разрушения п. 1 $U=\gamma bh$ следует зависимость (1.1) с точностью до коэффициента, который связан лишь с градиентом напряжений в образце, $\sigma=3\sqrt{2E\gamma/l}$. Как видно, прочность при изгибе вследствие неравномерности напряжений выше, чем при растяжении, что следует также из статистической теории прочности и подтверждается в эксперименте.

Разумеется, предположение п. 1 достаточно грубое: часть упругой энергии переходит в энергию волн при достаточно быстром разрушении в кинетическую энергию обломков и в конечном счете в разогрев и деформирование материала, т. е. в энергию, пропорциональную объему тела. Например, для растяжения можно записать баланс энергии в виде ${}^1/_2\sigma^2bhl/E=\gamma bh+kbhl$, где k — некоторый параметр, характеризующий потерю энергии в объеме образца, с размерностью МПа удельной объемной энергии. Следовательно, $\sigma=[2E(\gamma/l+k)]^{1/2}$. Аналогичный результат получается для изгиба

$$\sigma=3\sqrt{2E(\gamma/l+k)} \tag{3.1}$$

Полагая для оргстекла E=30 ГПа и подбирая из эксперимента коэффициенты в формуле (3.1): k=0,18 МПа, γ=4,6 кН/м, получаем очень хорошее совпадение с экспериментом (см. фиг. 3).

4. Интересные для практических приложений результаты могут быть получены при анализе с помощью энергетического критерия такого распространенного вида разрушения волокнистых композитов с полимерной матрицей, как расслоение.

При поперечном изгибе композитной балки по схеме, изображенной на фиг. 3, прогиб $\delta={}^1/_4Pl^3/(Ebh^3)$ и накопленная упругая энергия $U_0=2E\delta^2bh^3/l^3$. Считается, что расслоение произошло при постоянном прогибе за счет упругой энергии, накопленной в образце. Необходимо, чтобы разность между упругой энергией до U_0 и после U_1 расслоения была больше работы расслоения R. Расслоение может произойти по плоскости на расстоянии φh от нижнего края балки. При этом упругая энергия U_1 после расслоения пропорциональна $\varphi^3h^3+(1-\varphi)^3h^3$ и из условия $\partial(U_0-U_1)/\partial\varphi=0$ следует, что энергетически наиболее «выгодно» расслоение посредине: $\varphi={}^1/_2$. Предположим, что расслоение происходит на m равных полос, тогда $U_0-U_1\sim h^3-h^3/m^2$ и $R\sim m-1$. Максимум отношения высвобождения энергии к работе расслоения $(U_0-U_1)/R\sim(m+1)/m^2$ достигается при $m=1$ и это отношение убывает с ростом m, так что расслоение возможно лишь на две части.

Используя выражения для U_0, U_1 и $R=\gamma bl$, находим зависимость нагрузки при расслоении от размеров тела $P=4bh({}^2/_3E\gamma h)^{1/2}/l$.

Обычно для оценки межслойной прочности композитов при поперечном изгибе используют критическое значение межслойных касательных напряжений, вычисляемое по формуле [2] $\tau={}^3/_4P/(bh)$. Таким образом

$$\tau=h/l\sqrt{6E\gamma/h} \tag{4.1}$$

и межслойная прочность оказывается зависящей не только от отношения пролета l к высоте балки h, но и от абсолютного значения высоты (или длины) балки. При этом с ростом толщины h при постоянной длине межслойная прочность при изгибе должна расти, а при сохранении подобия с ростом толщины (и длины) прочность снижается.

При кручении слоистых композитов также может происходить расслоение, которое, как нетрудно показать по аналогии с изгибом, должно начинаться в среднем сечении и разделять пластину на две равные части.

Считаем, что прямоугольный образец длиной l, толщиной b и шириной a ($a>b$) расслоился посредине при постоянном погонном угле закручивания θ. Тогда уравнение баланса энергии принимает вид

$$\begin{gathered} {}^1/_2M^2l/(GI)={}^1/_2M'^2l/(GI')+\gamma al \\ M=GI\theta,\quad M'=GI'\theta,\quad I=\beta(c)ab^3,\quad I'={}^1/_4\beta(2c)ab^3 \end{gathered} \tag{4.2}$$

где $\beta(c)$ — табулированная функция [2], G — модуль сдвига. Материал предполагается для простоты изотропным, учет различия в модулях сдвига приводит лишь к изменению эффективного отношения $c=a/b$. Длина образца не влияет на прочность, если, конечно, не учитывать влияния захватов.

Известно, что наибольшие значения касательных напряжений достигаются на серединах сторон сечения. На середине большой стороны a (см., например, [2]) $\tau_a=M/(\alpha ab^2)$, на середине меньшей стороны b межслойное напряжение $\tau_b=\eta\tau_a$; α и η — табулированные функции от c, которые при $c\to\infty$ быстро приближаются к своим предельным значениям $\alpha\to{}^1/_3$, $\eta\to0{,}743$; уже при $c>6$ отличие от предельных значений не превышает 10%, поэтому для достаточно вытянутых сечений можно пользоваться соответствующими пределами.

Из энергетического критерия (4.2) следует зависимость межслойной сдвиговой прочности при кручении τ_b от геометрических размеров образца (обычно эта прочность считается постоянной)

$$\tau_b=(2\beta(c)\eta/\alpha)\{2G\gamma/[b(4\beta(c)-\beta(2c))]\}^{1/2} \tag{4.3}$$

Прочность при кручении слоистых пластиков согласно (4.3) зависит не только от отношения размеров сечения, но и убывает с ростом абсолютного значения толщины образца.

Приведем без вывода [3—5] формулу для прочности прямоугольного композитного образца длины l при сжатии, когда разрушение происходит путем выщелкивания на всю длину крайнего слоя толщиной δ

$$\sigma=\pi^2E\delta^2/[\mu l^2(1-\nu^2)]+[2E\gamma/(\delta(1-\nu^2))]^{1/2} \tag{4.4}$$

где $\mu=12$ для свободного опирания полоски, ν — коэффициент Пуассона. Если бы расслоение могло происходить по любой плоскости, то из условия $\partial\sigma/\partial\delta=0$ следовало бы $\sigma_{\min}=\alpha E^{3/5}\gamma^{2/5}l^{-2/5}(1-\nu^2)^{-3/5}$, где $\alpha={}^5/_2\pi^{2/5}(2\mu)^{-1/5}$.

Однако расслоение, как правило, происходит по крайнему слою и формула (4.4) лучше согласуется с экспериментальной зависимостью прочности при сжатии от длины образца.

Таким образом, применение энергетического критерия расслоения позволяет не только описывать зависимость прочности от размеров элемента и учитывать масштабный эффект, но и устанавливать корреляцию прочностей при различных видах нагружения, когда происходит одинаковый механизм разрушения, так как формулы (4.1), (4.3) и (4.4) включают по сути один и тот же параметр прочности — удельную энергию расслоения γ, которая по порядку величины совпадает при различных типах развития расслоений. Наблюдаемое в экспериментах расхождение в значениях γ, например для кручения и сжатия углепластиков связано, с одной стороны, с чрезвычайным упрощением модели разрушения, а, с другой стороны, с тем, что расслоение при сжатии происходит по виду I нормального отрыва, а при кручении трещина расслоения развивается при комбинации продольного и поперечного сдвига (вид II и III).

Автор благодарен Ю. Н. Работнову за ценные замечания при обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
2. *Работнов Ю. Н.* Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1962. 455 с.
3. *Качанов Л. М.* Разрушение композитных материалов путем расслоения.— Механика полимеров, 1976, № 5, с. 918–922.
4. *Слепян Л. И.* Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
5. *Полилов А. Н., Работнов Ю. Н.* Развитие расслоений при сжатии композитов.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 166–171.

Москва

Поступила в редакцию 15.III.1982