МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1983

УДК 539.214

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ СИНГУЛЯРНЫХ ТОЧЕК ГРАНИЦЫ

БЕРКУН В. Б.

Рассматривается проблема разрешимости двумерных краевых задач для идеально упругопластического тела в окрестности сингулярной угловой точки границы. Для решения таких задач используется разложение полей перемещений и напряжений на фиктивное упругое и остаточное (поле самонапряжений см. [1]). Показано, что в окрестности угловой точки границы поле фиктивных упругих напряжений можно представить в виде суммы регулярного и сингулярных полей $e=kr^{\varkappa}+O(1)$, где e – поле упругих напряжений, r – радиус-вектор $(-1<\varkappa<0)$. Аналогичное представление справедливо и для поля самонапряжений. Получен общий вид функционала упругой энергии поля самонапряжений.

1. Постановка задачи. Пусть занимаемая телом область на плоскости $(x_1, x_2)\in R^2$ есть бесконечный сектор $K=\{(x_1, x_2): 0\leqslant r<+\infty, -\omega\leqslant\theta\leqslant\omega\}$ с вершиной в точке O. Здесь θ – полярный угол $(0<\omega\leqslant\pi)$, а $r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$. Границу сектора K обозначим через Γ. Пусть единичная окружность V с центром в точке O вырезает на K область $\Omega=K\cap V$ с границей $\theta=\pm\omega$. На границе Γ рассматриваются следующие три типа граничных условий: на двух сторонах сектора Γ_u заданы условия в перемещениях; на двух сторонах Γ_σ заданы условия в напряжениях $(\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta})$; на одной стороне Γ_u сектора K заданы условия в перемещениях, на другой Γ_σ – в напряжениях.

Поле напряжений в K всегда можно представить в виде $\sigma=e+p^*$, где e – упругое решение в K с условиями на Γ, а p^* определяется следующим образом. Пусть p – некоторое самонапряжение, удовлетворяющее системе уравнений равновесия $p_{ij,j}=0$ в K, однородным условиям на Γ_σ и произвольным на Γ_u. Согласно введенному в [1] экстремальному принципу

$$U(p^*)=\inf_{p\in M} U(p),\quad U(p)=\frac{1}{2}\int\limits_K A_{ijkl}p_{ij}p_{kl}\,dK \tag{1.1}$$

$$M=\{p: p\in W,\quad p_{ij,j}=0 \text{ в } K,\quad p_{ij}\nu_j=0 \text{ на } \Gamma_\sigma,\ I(e+p)\leqslant 0\}$$

где W – энергетическое пространство задачи, $I(e+p)\leqslant 0$ – условия пластичности, A_{ijkl} – тензор податливости.

2. Упругое решение. Для построения и анализа сингулярных решений упругой задачи используется метод, разработанный в [2].

Поле упругой составляющей e можно однозначно определить, построив решение уравнений равновесия

$$(a_{ijkl}u_{j,l})_{,k}=0\quad (i,j,k,l=1,2),$$
$$a_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{2.1}$$

где λ, μ – константы Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера.

В дальнейшем через L будем обозначать матричный дифференциальный оператор задачи (2.1), записанный в полярных координатах, а через B_1 и B_2 – граничные матричные дифференциальные операторы, отвечающие условиям в перемещениях и напряжениях соответственно, записанные в полярных координатах. Оператор L — равномерно эллиптический в K в смысле Дуглиса — Ниренберга, краевые условия на $\Gamma\backslash O$ накрывают оператор L, элементы операторов L и B_m ($m=1, 2$) — модельные скалярные дифференциальные операторы (по поводу терминологии см. [3, 4]). Теоремы существования и единственности при этих условиях формулируются в [5].

С учетом введенных обозначений краевая задача теории упругости имеет вид

$$L(r, rD_r, D_\theta)\mathbf{u}(r, \theta)=\mathbf{0} \text{ в } K, \quad B_m(r, rD_r, D_\theta)\mathbf{u}(r, \theta)=\mathbf{g}_m \text{ на } \Gamma \tag{2.2}$$

$$rD_r=\partial/\partial r, \quad D_\theta=\partial/\partial\theta, \quad \mathbf{g}_m=(g_{m1}, g_{m2})$$

После замены переменных $t=-\ln r$ сектор K переходит в бесконечную полосу на плоскости (t, θ), а система (2.2) — в систему $L(D_t, D_\theta)\mathbf{u}(t, \theta)=\mathbf{0}$, $B_m(D_t, D_\theta)\mathbf{u}(t, \theta)=e^{-t}\mathbf{g}_m$.

После преобразования Фурье по t получаем операторный пучок

$$L(i\rho, D_\theta)F[\mathbf{u}]=0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad B_m(i\rho, D_\theta)F[\mathbf{u}]=\mathbf{q}_m \quad \text{на} \quad \theta=\pm\omega,$$

$$F[\mathbf{u}]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{u}(t, \theta)e^{i\rho t}dt \tag{2.3}$$

$$L(i\rho, D_\theta)=\begin{Vmatrix} \alpha\dfrac{d^2}{d\theta^2}-(\rho^2+1) & [(i\rho-1)-\alpha(i\rho+1)]\dfrac{d}{d\theta} \\ [(i\rho+1)-\alpha(i\rho-1)]\dfrac{d}{d\theta} & \dfrac{d^2}{d\theta^2}-\alpha(\rho^2+1) \end{Vmatrix}$$

$$B_1=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B_2=\begin{Vmatrix} (i\rho\beta+\beta+1) & (\beta+1)\dfrac{d}{d\theta} \\ \dfrac{d}{d\theta} & (i\rho-1) \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{q}_1=\|F[g_1], F[g_2]\|, \quad \mathbf{q}_2=\|{}^1/{}_2\mu^{-1}F[e^{-t}g_1], \mu^{-1}F[e^{-t}g_2]\|$$

$$\alpha=(1-2\nu)/2(1-\nu), \quad \beta=\nu/(1-2\nu)$$

где ρ — параметр преобразования Фурье, ν — коэффициент Пуассона.

Общее решение системы (2.3) имеет вид

$$F[\mathbf{u}]=\sum_{k=1}^{4}C_k\varphi_k$$

$$\varphi_1=\begin{Vmatrix} \operatorname{ch}(\rho-i)\theta \\ -i\operatorname{sh}(\rho-i)\theta \end{Vmatrix}, \quad \varphi_2=\begin{Vmatrix} -\operatorname{sh}(\rho-i)\theta \\ i\operatorname{ch}(\rho-i)\theta \end{Vmatrix}$$

$$\varphi_3=\begin{Vmatrix} iP(\rho)\operatorname{sh}(\rho+i)\theta \\ -R(\rho)\operatorname{ch}(\rho+i)\theta \end{Vmatrix}, \quad \varphi_4=\begin{Vmatrix} -iP(\rho)\operatorname{ch}(\rho+i)\theta \\ R(\rho)\operatorname{sh}(\rho+i)\theta \end{Vmatrix}$$

$$P(\rho)=\frac{1}{i\alpha\rho}-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{i\rho}+1, \quad R(\rho)=\frac{1}{i\alpha\rho}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{i\rho}-1$$

Для определения собственных значений операторного пучка (2.3) необходимо воспользоваться граничными условиями. Действуя операторами $B_m(i\rho, D_\theta)$ на $F[\mathbf{u}]$, получаем систему однородных алгебраических уравнений относительно c_k ($k=1, \ldots, 4$) с матрицей $Q(i\rho)$. Следовательно, собственные значения операторного пучка (2.3) определяются из уравнения $\det\|Q(i\rho)\|=0$. Путем несложных вычислений можно показать, что соответствующие трансцендентные уравнения имеют вид

$$\operatorname{sh}^2 2\rho\omega=\frac{-\rho^2}{(3-4\nu)^2}\operatorname{sh}^2 2i\omega\,(B_1\mathbf{u}=0,\ \theta=\pm\omega) \tag{2.4}$$

$$\operatorname{sh}^2 2\rho\omega=-\rho^2\operatorname{sh}^2 2i\omega\,(B_2\mathbf{u}=0,\ \theta=\pm\omega) \tag{2.5}$$

$$\operatorname{sh}^2 2\rho\omega+\frac{4(1-\nu)^2}{3-4\nu}=\frac{\rho^2}{3-4\nu}\operatorname{sh}^2 2i\omega \tag{2.6}$$

$$(B_1\mathbf{u}=0,\ \theta=-\omega;\ B_2\mathbf{u}=0,\ \theta=\omega)$$

Следует отметить, что трансцендентные уравнения для определения ρ в случае первой и третьей краевой задачи, выписанные в [6], не соответствуют рассматриваемой там модели.

Согласно [2, 3], решение системы (2.2) при любых из рассматриваемых граничных условий можно представить в виде

$$\mathbf{u}=\sum_{j=1}^{N} r^{-i\rho_j}c_j\xi_j(\theta) \tag{2.7}$$

где ρ_j — корни соответствующего трансцендентного уравнения из (2.4)—(2.6) при фиксированном ω, $\xi_j(\theta)$ — собственные функции задачи (2.3), c_j — некоторые постоянные. Случай кратных корней в уравнении (2.6) не рассматривается. Так как изучаются решения $\mathbf{u}\in(\mathbf{W}_2^1(K))^2$, то в (2.7) $\operatorname{Im}\rho_j>0$, где $(\mathbf{W}_2^1(K))^2$ — векторное пространство Соболева. Решение (2.7) можно переписать в виде

$$\mathbf{u}_e=\sum_{j=1}^{n} r^{-i\rho_j}c_j\xi_j(\theta)+\mathbf{s}(r,\theta) \tag{2.8}$$

Здесь $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — корни уравнений (2.4)—(2.6), имеющие $0<\operatorname{Im}\rho_j<1$, $\mathbf{s}(r,\theta)$ — регулярные члены, имеющие $\operatorname{Im}\rho_j>1$. При переходе к напряжениям первые n слагаемых могут обращаться в бесконечность при $r\to0$.

Для определения в формуле (2.8) коэффициентов c_j рассматривается решение задачи

$$L^*\mathbf{v}=0 \text{ в } K,\quad S\mathbf{v}=0 \text{ на } \Gamma\backslash O,\quad \mathbf{v}=(v_1, v_2) \tag{2.9}$$

где L^*, S — операторы, сопряженные с L и B относительно формулы Грина

$$(L\mathbf{u},\mathbf{v})_K+\sum_{l=1}^{2}(B_l\mathbf{u},T_l\mathbf{v})_\Gamma=(\mathbf{u},L^*\mathbf{v})_K+\sum_{l=1}^{2}(G_l\mathbf{u},S_l\mathbf{v})_\Gamma$$

Обоснование формулы Грина и определение операторов T_l, G_l содержится в [3].

Решение задачи (2.9) имеет вид $\mathbf{v}_j=r^{i\rho_j}\psi_j(\theta)$, где $\psi_j(\theta)$ — собственные функции сопряженного операторного пучка, соответствующие ρ_j собственным числам. Будем считать собственные функции ψ_j нормированными. Тогда, согласно [3, 5], коэффициенты c_j определяются по формулам

$$c_j=\sum_{l=1}^{2}(F^{-1}[\mathbf{q}]_l, iT_l\mathbf{v}_j)_\Gamma \quad (j=1,\ldots,n)$$

3. Построение поля самонапряжений. Как было отмечено выше, первые n членов ряда (2.8) могут обращаться в бесконечность при $r\to0$. Таким образом, выполнение условий пластичности $I(e+p)\leqslant0$ возможно только в том случае, когда в выражении для p будут присутствовать n членов, имеющие тот же порядок сингулярности, что и члены в e. Для установления этого факта рассматриваются условия стационарности функционала (1.1) в предположении, что $p_{ij,\,j}=0$ в K и $p_{ij}\gamma_j=0$ на Γ_σ. Эти условия имеют вид

$$(a_{ijkl}u_{j,\,l})_{,k}=f_i \quad (i,\ j,\ k,\ l=1,\ 2) \tag{3.1}$$

Правую часть в (3.1) $f_i\in L_2(K)$ можно интерпретировать как градиент температурного поля или некоторую дислокацию. Формально задачу можно свести к построению некоторого тензора Грина, действующего на правую часть уравнения (3.1), после чего функционал (1.1) приводится к простейшему квадратичному виду.

Граничные условия в случае второй краевой задачи, очевидно, однородные. Для первой краевой задачи их можно определить из разложения $\mathbf{u}=\mathbf{u}_e+\mathbf{u}_p$. В виду того что $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}_e$ удовлетворяют однородным условиям на Γ_u, $\mathbf{u}_p$ удовлетворяют однородным условиям на Γ_u. Для третьей краевой задачи применяются определение самонапряжения и аналогичные рассуждения. Важно лишь то, что тип краевых условий не меняется. Учитывая все это и применяя те же преобразования, что и в п. 2, получим характеристические уравнения (2.4)—(2.6). Следовательно, решение $\mathbf{u}_p$ системы (3.1) из $(\mathbf{W}_2^1(K))^2$ имеет вид

$$\mathbf{u}_p=\sum_{j=1}^{n} r^{-i\rho_j}d_j\boldsymbol{\xi}_j(\theta)+\mathbf{w}(r,\theta)$$

где ρ_j — корни соответствующих трансцендентных уравнений, $\mathbf{w}(r,\ \theta)$ — регулярные члены, имеющие $\operatorname{Im}\rho_j>1$. Согласно [3, 5], d_j определяются по формулам $d_j=(r^2\mathbf{f},\ i\mathbf{v}_j)_K$ $(j=1,\ldots,n)$.

4. Доказательство регулярности суммарного поля. Для доказательства регулярности суммарного поля необходимо выбирать f_i таким образом, чтобы коэффициенты в разложении поля самонапряжений d_j равнялись бы коэффициентам разложения фиктивного упругого поля c_j, но имели бы противоположный знак. Для установления этого факта необходимо знать распределение корней трансцендентных уравнений (2.4)—(2.6) в зоне сингулярности $0<\operatorname{Im}\rho_j<1$.

В результате численного и аналитического исследования уравнений (2.4)—(2.6) установлено, что в случае первой краевой задачи в зоне $0<2\omega<\pi$ сингулярных корней нет. Следовательно, суммарное поле заведомо регулярно. В зоне $\pi<2\omega\leqslant 2\pi$ существуют два чисто мнимых корня ρ_1 и ρ_2, которые убывают от i до $i/2$. Сингулярные поля самонапряжений, соответствующие ρ_1 и ρ_2, энергетически ортогональны, следовательно, f_i возможно выбирать таким образом, чтобы $d_j=-c_j$.

Во второй краевой задаче (2.5) в зоне $0<2\omega<\pi$ сингулярных корней нет. В зоне $\pi<2\omega\leqslant 2\pi$ существует один чисто мнимый корень ρ_1, монотонно убывающий от $\rho_1(\pi)=i$ до $\rho_1(2\pi)=i/2$. В зоне $257{,}5°<2\omega\leqslant 2\pi$ появляется второй сингулярный чисто мнимый корень ρ_2, который также монотонно убывает от $\rho_2(257{,}5°)=i$ до $\rho_2(2\pi)=i/2$. Сингулярные поля также энергетически ортогональны, следовательно, также возможен выбор f_i, такого, чтобы $d_j=-c_j$. В зоне, где корень один, выбор f_i для удовлетворения условиям пластичности тривиален.

В случае третьей краевой задачи (2.6) в зоне $0<2\omega<57°$ сингулярных корней нет. В зоне $57°<2\omega<142°$ существуют два чисто мнимых корня ρ_1 и ρ_2, дающих сингулярность в напряжениях. Эти корни за точкой кратности ветвятся и при $142°<2\omega\leqslant 2\pi$ имеют мнимую и действительную части. За точкой кратности у корней ρ_1 и ρ_2 мнимая часть убывает до $\operatorname{Im}\rho_1(2\pi)=\operatorname{Im}\rho_2(2\pi)=1/4$. В зоне $2\omega>235°$ возникают еще два сингулярных чисто мнимых корня ρ_3 и ρ_4, тоже имеющих точку ветвления $2\omega\approx 331{,}5°$, за которой они монотонно убывают до $\operatorname{Im}\rho_3(2\pi)=\operatorname{Im}\rho_4(2\pi)=3/4$. Данные о корнях для третьей задачи приведены для случая $\nu=0{,}3$. Необходимо отметить, что картина поведения сингулярных корней при других значениях ν, может существенно отличаться от изложенной. Чисто мнимые корни ведут себя немонотонно по 2ω, поэтому сингулярность может уменьшаться при возрастании 2ω. Когда у корня ρ_j присутствует действительная и мнимая части, то в сингулярных членах разложения имеют место члены вида $r^{-\varkappa_j}\cos(\operatorname{Re}\rho_j\ln r)$ и $r^{-\varkappa_j}\sin(\operatorname{Re}\rho_j\ln r)$, $\varkappa_j=\operatorname{Im}\rho_j$. Для получения условий регулярности суммарного поля в случае третьей краевой задачи возможно воспользоваться разложением f_i по биортогональному базису с соответствующим выбором коэффициентов разложения.

Приведем далее выражение для функционала упругой энергии поля самонапряжений для случая первой и второй краевой задачи. Пусть $\mathbf{p}=k_1r^{\rho_1-1}\mathbf{h}_1(\theta)+k_2r^{\rho_2-1}\mathbf{h}_2(\theta)+\mathbf{z}(r,\ \theta)$, где $0<\rho_1,\ \rho_2<1$, $\mathbf{z}$ — регулярное поле. Примем k_1 и k_2, как в упругой задаче; тогда функционал упругой энергии поля самонапряжений имеет вид

$$U(\mathbf{p})=k_1^2H_{11}+k_2^2H_{22}+(k_1r^{\rho_1-1}\mathbf{h}_1,\ \mathbf{z})_A+(k_2r^{\rho_2-1}\mathbf{h}_2,\ \mathbf{z})_A+U(\mathbf{z})$$

где $(.\,.)_A$ — скалярное произведение с тензором A_{ijkl}, порождающее квадратичный функционал U. Для решения задачи (1.1) можно отбросить первые два члена и решать задачу о минимизации суммы квадратичного и линейного функционалов. Эта задача обладает всеми качествами исходной корректной задачи выпуклого программирования. Для третьей краевой задачи построение функционала энергии принципиально не отличается от случая первой и второй задач. Сингулярные поля самонапряжений ортогональны по энергии, поэтому функционал приводится к сумме квадратичного и линейного.

Автор благодарит А. М. Проценко за постановку задачи и полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Проценко А. М.* Экстремальные краевые задачи для упругопластического тела.— Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1, с. 80–87.
2. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1967, т. 16, с. 209–292.
3. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками.— Math. Nachr. 1977, B. 76, S. 29–60.
4. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
5. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических задач в конусе.— Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1975, т. 52, с. 110–127.
6. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.VII.1982