

УДК 539.3

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ СЖАТИЯ — СДВИГА
В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ

ЛЕНСКИЙ Э. В.

Исследуется распространение плоских комбинированных волн сжатия — сдвига в изотропной нелинейно-упругой несжимаемой среде при плоском напряженном состоянии. Упругий потенциал определяется произвольной выпуклой функцией второго инварианта тензора малых деформаций Грина [1]. Изменение энтропии не рассматривается. Решается автомодельная задача для полупространства с произвольными и граничными условиями.

Некоторые решения аналогичной задачи были предложены в [2–5]. Различные аспекты теории распространения комбинированных волн в нелинейно-упругой среде, упругий потенциал которой есть регулярное разложение по степеням компонентов деформации, рассматривались в [1, 6, 7]. Эволюционность разрывов малой интенсивности для такой модели была впервые изучена в [8].

В публикуемой работе исследуются соотношения между скоростями разрывов произвольной интенсивности и скоростями малых возмущений. Определяются области существования ударной адиабаты, доказываются ее существование и единственность. Для автомодельного движения изучается изменение деформированного состояния в быстрой и медленной волне Римана. Выделяется та часть ударной адиабаты, для которой разрывы эволюционны [9]. Находятся обобщенные эволюционные решения автомодельной задачи для полупространства с произвольными начальными и граничными условиями. Исследуются траектории деформации.

1. Основные соотношения и характеристики. Пусть в изотропной нелинейно-упругой среде, находящейся в плоском напряженном состоянии, распространяются плоские одномерные волны сжатия — сдвига. Расположим ортогональные оси 1, 2 в плоскости напряженного состояния, направив ось 1 в сторону распространения возмущенного состояния. Тогда напряженно-деформированное состояние описывается величинами $\sigma = \sigma_{11}$, $\tau = \sigma_{12}$, $\varepsilon = \varepsilon_{11}$, $\gamma = 2\varepsilon_{12}$, связанными следующими соотношениями [10]:

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{\Phi(s)}{s} \varepsilon, \quad \tau = \frac{1}{3} \frac{\Phi(s)}{s} \gamma, \quad s = \left(\frac{4}{3} \varepsilon^2 + \frac{1}{3} \gamma^2 \right) \quad (1.1)$$

где s — интенсивность деформации, Φ — функция, определяемая, например, в опытах при одноосном растяжении — сжатии.

Равенства (1.1) получаются, если упругий потенциал U задается соотношением $dU = \Phi(s) ds$. С другой стороны, соотношения (1.1) выражают отношение пропорциональности векторов напряжений $\sigma = (3\sigma/4, \sigma\sqrt{3}/4, \tau/\sqrt{3})$ и деформаций $\varepsilon = (\varepsilon, \varepsilon/\sqrt{3}, \gamma/\sqrt{3})$, $\sigma = \varepsilon\varphi$ [10]. Ввиду пропорциональности первой и второй компонент вектора ε траектории деформации лежат в фиксированной плоскости пространства деформации, в которой вектор деформации $\varepsilon = (2\varepsilon/\sqrt{3}, \gamma/\sqrt{3})$. Аналогично определяется плоский вектор напряжений $\sigma = (\sigma\sqrt{3}/2, \tau/\sqrt{3})$.

В дальнейшем вместо численных коэффициентов употребляются буквенные

$$\sigma = k_1 \varepsilon \varphi(s), \quad \tau = k_2 \gamma \varphi(s), \quad \varepsilon = (\kappa_1 \varepsilon, \kappa_2 \gamma), \quad s = |\varepsilon| \quad (1.2)$$

$$k_1 > k_2 > 0, \quad \varphi(s) = \Phi(s)/s \quad (1.3)$$

Пусть функция $\Phi(s)$ такова, что $\Phi'(0) = E > 0$. Введем безразмерные координаты, отнеся величины размерности напряжения к E , размерности скорости — к $(E/\rho)^{1/2}$ (ρ — плотность среды).

В этих переменных система уравнений, описывающая рассматриваемое движение, имеет вид

$$u_t = k_1(\varepsilon\varphi)_x, \quad v_t = k_2(\gamma\varphi)_x, \quad \varepsilon_t = u_x, \quad \gamma_t = v_x \quad (1.4)$$

Здесь x — лагранжева координата по оси 1, t — время, u, v — составляющие скорости частиц по осям 1, 2; индексы x, t означают дифференцирование по этим переменным.

Характеристическое уравнение системы (1.4) $\xi^4 - (a+b)\xi^2 + ab - eg = 0$, в котором

$$a = k_1(\varepsilon\varphi)_\varepsilon, \quad b = k_2(\gamma\varphi)_\gamma, \quad e = k_1(\varepsilon\varphi)_\gamma, \quad g = k_2(\gamma\varphi)_\varepsilon \quad (1.5)$$

определяет характеристики

$$\xi_F^2 = [a+b + ((a-b)^2 + 4eg)^{1/2}] / 2 \quad (1.6)$$

$$\xi_S^2 = [a+b - ((a-b)^2 + 4eg)^{1/2}] / 2$$

Относительно функции $\Phi(s)$ предположим, что при $s > 0$ она положительная, непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая. Кроме того, пусть

$$\Phi''(s) < 0 \quad (s \neq 0) \quad (1.7)$$

Из (1.3), (1.5) следует, что характеристики действительны.

Требование несовпадения характеристических направлений ξ_F и ξ_S эквивалентно выполнению условий

$$k_1\Phi(s) > k_2\Phi'(s), \quad k_1(\Phi'(s)) > k_2\Phi(s) \quad (s \neq 0) \quad (1.8)$$

Первое следует из (1.3) и вида функции Φ , второе условие не вытекает из этих предположений и заключается в том, что касательный модуль не слишком мал по отношению к секущему. Например, для Φ в виде двух отрезков прямых, сопряженных при $s = \varepsilon_s$ участком бесконечно малого радиуса кривизны, оно всегда не выполняется на некотором, вообще, конечном интервале $s \in (\varepsilon_s, s^0)$, если тангенс угла наклона прямой при $s > \varepsilon_s$ меньше k_2/k_1 .

Заметим, что в отличие от [8] функция Φ'' может быть разрывна.

Рассматривая (1.5) — (1.8), нетрудно прийти к следующей системе неравенств:

$$k_1\Phi > \xi_F^2 > a > k_1\Phi' > k_2\Phi > b > \xi_S^2 > k_2\Phi' \quad (1.9)$$

Отсюда, в частности, следует, что характеристические скорости ξ_F (быстрые) всегда больше, чем ξ_S (медленные).

2. Разрывы, полная ударная адиабата. Рассмотрим волну, на которой терпят разрыв одновременно продольные и сдвиговые составляющие деформации. Назовем такой разрыв комбинированным [14, 12]. Обозначим $[u] = u - u_1$, отмечая состояние перед разрывом индексом 1, за разрывами — или без индекса, или индексом 2.

Система (1.4) — консервативная, и условия Гюгонио на комбинированном разрыве имеют вид [13]:

$$D[u] = -k_1[\varepsilon\varphi], \quad D[v] = -k_2[\gamma\varphi], \quad D[\varepsilon] = -[u], \quad D[\gamma] = -[v] \quad (2.1)$$

где D — лагранжева скорость разрыва.

Необходимым условием совместности (2.1) является выполнение соотношения

$$H(\varepsilon, \gamma, \varepsilon_1, \gamma_1) = k_1[\varepsilon\varphi]/[\varepsilon] - k_2[\gamma\varphi]/[\gamma] = 0 \quad (2.2)$$

определяющего полную ударную адиабату [9].

Простыми выкладками проверяется, что ударная адиабата не может быть ни кривой $s = \text{const}$, ни лучом в плоскости деформации $(\kappa_1 \varepsilon, \kappa_2 \gamma)$. Исключения составляют прямые $\gamma = 0$ (чисто продольный разрыв) и $\varepsilon = 0$ (чисто сдвиговой разрыв).

Ввиду четности функции s имеем

$$\begin{aligned} H(-\varepsilon, \gamma, -\varepsilon_1, \gamma_1) &= H(\varepsilon, -\gamma, \varepsilon_1, -\gamma_1) = H(-\varepsilon, -\gamma, -\varepsilon_1, -\gamma_1) = \\ &= H(\varepsilon, \gamma, \varepsilon_1, \gamma_1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Поэтому достаточно исследовать ударную адиабату, проходящую через состояние 1, принадлежащее первой четверти плоскости деформации $(\kappa_1 \varepsilon, \kappa_2 \gamma)$.

Обозначим $D_1 = k_1 [\varepsilon \varphi] / \varepsilon$, $D_2 = k_2 [\gamma \varphi] / [\gamma]$. Найдем области возможного существования адиабаты, сравнивая значения D_1 и D_2 с величинами $d^2 = [\Phi] / [s]$, $\varphi_1 = \varphi(s_1)$, $\varphi_2 = \varphi(s_2)$. Это позволит выделить те множества значений $[s]$, $[\varepsilon]$, $[\gamma]$, для которых области значений D_1 и D_2 имеют непустое пересечение [14].

Введем в плоскости деформации $(\kappa_1 \varepsilon, \kappa_2 \gamma)$ полярные координаты s , α ($\kappa_1 \varepsilon = s \cos \alpha$, $\kappa_2 \gamma = s \sin \alpha$). Тогда

$$[\varepsilon \varphi] / [\varepsilon] = [\Phi \cos \alpha] / [s \cos \alpha], \quad [\gamma \varphi] / [\gamma] = [\Phi \sin \alpha] / [s \sin \alpha]$$

Основываясь на этих равенствах, приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \text{sgn}(D_1 - d^2) &= -\text{sgn}([s] [\varphi] [\varepsilon] [\cos \alpha]), \quad \text{sgn}(D_2 - d^2) = \\ &= -\text{sgn}([s] [\varphi] [\gamma] [\sin \alpha]) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\text{sgn}(D_1 - \varphi_{1,2}) = \text{sgn}(\varepsilon_{2,1} [\varphi] [\varepsilon]), \quad \text{sgn}(D_2 - \varphi_{1,2}) = \text{sgn}(\gamma_{2,1} [\varphi] [\gamma])$$

Рассмотрим всевозможные случаи соотношений между знаками скачков s , φ , ε , γ , α . Их число невелико. В [15] было доказано, в частности, что для функции рассматриваемого здесь вида ударный переход $[s] > 0$ приводит к нарушению условия диссипации механической энергии. Следовательно, $[s] < 0$, откуда $[\varphi] > 0$. Кроме того, имеем $[\alpha] > 0 \Rightarrow [\varepsilon] < 0$, $[\alpha] < 0 \Rightarrow [\gamma] < 0$ при $\varepsilon \geq 0$, $\gamma \geq 0$ и подобные этим соотношения для ε, γ из других четвертей плоскости деформации.

Выделение областей возможного существования полной ударной адиабаты позволяет одновременно оценить скорость комбинированного разрыва, ибо $D_1 = D_2 \Rightarrow D^2 = D_1$.

Произведя описанные действия, найдем, что ударная адиабата может существовать внутри следующих областей (фиг. 1):

$$k_1 \varphi_{1,2} > D^2 > k_2 \varphi_{1,2} \text{ в области } AB_1B_2 \quad (2.5)$$

$$k_1 \varphi_2 > D^2 > (k_1 \varphi_1, k_2 \varphi_2) \text{ в области } A_1B_1B_2 \quad (2.6)$$

$$k_1 \varphi_{1,2} > D^2 > k_2 d^2 \text{ в области } AOE_2 \quad (2.7)$$

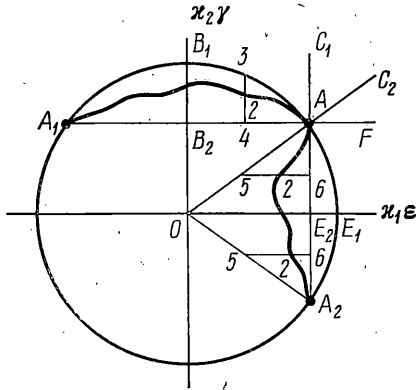
$$(k_1 \varphi_1, k_2 \varphi_2) > D^2 > k_2 \varphi_1 \text{ в области } A_2OE_2 \quad (2.8)$$

На фиг. 1 точка A — образ переднего состояния, кривая $E_1AB_1A_1$ — окружность $s = s_1$, точки A_1, A_2 симметричны A относительно осей γ и ε .

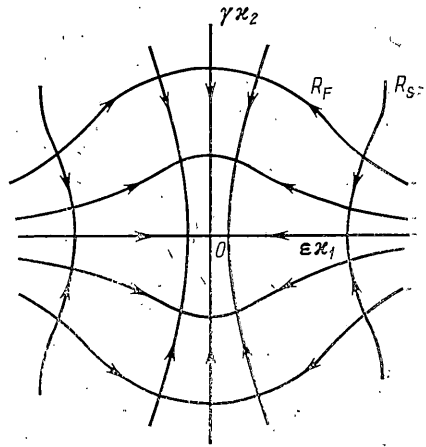
Если точка A изображает состояние за разрывом, то ударная адиабата возможна в областях E_1AF (оценки скорости (2.5)) и C_1AC_2 (оценки (2.7)).

Из данного рассмотрения следует, что точки ударной адиабаты могут существовать и в третьей четверти плоскости деформации. Однако в этом случае получается, что должна быть достаточно большой величина $s_1 - s_2$, т. е. в случае общего положения адиабата не существует.

Отметим, что согласно (1.3), (1.8) скорость разрыва для адиабаты в области $AB_1A_1B_2$ (фиг. 1) больше, чем в AOA_2E_2 . Таким образом, может существовать два типа разрыва: быстрые (заднее состояние в $AB_1A_1B_2$) и



Фиг. 1



Фиг. 2

медленные (состояния 2 в AOA_2E_2). Скорости первых обозначим D_F , вторых — D_S , а соответствующие им ударные адиабаты — H_F , H_S .

Сравнивая неравенства (1.9) с (2.5)–(2.8), получим $D_F^2 > \xi_{S1,2}^2$, $(\varepsilon_2, \gamma_2) \in AB_1A_1B_2$; $D_S^2 < \xi_{F1,2}^2$, $(\varepsilon_2, \gamma_2) \in AOE_2$; $D_S^2 < \xi_{F2}^2$, $(\varepsilon_2, \gamma_2) \in A_2OE_2$.

Найдем условия, при которых $D_S^2 < \xi_{F1}^2$, $(\varepsilon_2, \gamma_2) \in A_2OE_2$. На OA_2 (фиг. 1) $D_2 = k_2(\Phi + \Phi_1)/(s + s_1)$, на интервале 5, 6 ($\gamma = \text{const}$) имеем $\partial D_2 / \partial \varepsilon = g / [\gamma] < 0$.

Следовательно, в точках пересечения отрезка 5, 6 с адиабатой H_S выполняется неравенство $D_S^2 < k_2(\Phi + \Phi_1)/(s + s_1)$, $s = s_s$. Максимум выражения в правой части достигается в точке Жуге s_{J1} для переднего состояния s_1 , определяемой уравнением

$$[\Phi(s_{J1}) + \Phi(s_1)] / (s_{J1} + s_1) = \Phi'(s_{J1})$$

Потребуем, чтобы функция $\Phi(s)$ удовлетворяла условию

$$k_1 \Phi'(s) > k_2 [\Phi(s_J) + \Phi(s)] / (s_J + s) \quad (\forall s \neq 0) \quad (2.9)$$

Тогда имеем $D_S^2 < k_1 \Phi'(s_1) < \xi_{S1}^2$.

Очевидно, что второе условие (1.8) выполняется, когда верно (2.9). Не определяя общего вида функции Φ , удовлетворяющей (1.8), (2.9), укажем, к примеру, что для функции

$$\Phi(s) = s, \quad s \leq \varepsilon_s \quad (\varepsilon_s = \text{const}) \quad (2.10)$$

$$\Phi(s) = \varepsilon_s \left[\left(\frac{s}{\varepsilon_s} \right)^\alpha + \alpha - 1 \right] \alpha^{-i}, \quad s \geq \varepsilon_s \quad \left(1 > \alpha > \frac{k_2}{k_1} \right)$$

выполняются все наложенные выше ограничения на Φ .

Таким образом, установлено, что комбинированные быстрые разрывы — сверхзвуковые по отношению к медленным характеристическим скоростям, медленные — дозвуковые по отношению к быстрым характеристическим скоростям.

Докажем теперь, что в найденных областях ударная адиабата существует. Рассмотрим $r = D_1 - D_2$ и покажем, что в точках 3, 4 отрезка $\varepsilon = \text{const}$ и 5, 6 отрезка $\gamma = \text{const}$ (фиг. 1) r принимает значения противоположных знаков.

Так как $r \rightarrow -\infty$, когда точка 2 стремится к точке 3 ($r(4) = (k_1 - k_2)\varphi > 0$), то в области $AB_1A_1B_2$ существует адиабата H_F .

Если точка 2 $\in OA$, то $r = (k_1 - k_2)d^2 > 0$. Когда точка 2 стремится к точке 6, то $r \rightarrow -\infty$. Поэтому в AOE_2 существует адиабата H_S .

Если точка 2 $\in OA_2$, то согласно (2.9) $r = k_1 d^2 - k_2(\Phi + \Phi_1)/(s + s_1) > k_1(d^2 - \Phi_1') > 0$, откуда следует существование адиабаты H_S в A_2OE_2 .

Докажем, что любой интервал 2, 4 области $AB_1A_1B_2$ содержит только одну точку адиабаты H_F . Для этого достаточно показать, что в точках, общих адиабате и этому интервалу, функция $\partial r/\partial \gamma$ не меняет знака. Действительно

$$\frac{\partial r}{\partial \gamma} = \frac{e[\gamma] - (b - D^2)[\varepsilon]}{[\varepsilon][\gamma]} = D^2 \left(\frac{e}{k_1[\varepsilon\Phi]} - \frac{b - D^2}{k_2[\gamma\Phi]} \right)$$

$$[\varepsilon\Phi] < \varepsilon_2\Phi(s_4) - \varepsilon_1\Phi_1 < 0 \Leftrightarrow (\varepsilon\Phi)_\varepsilon > 0$$

$$[\gamma\Phi] > \gamma_2\Phi(s_7) - \gamma_1\Phi_1 > 0 \Leftrightarrow (\gamma\Phi)_\gamma > 0$$

$$b - D^2 < b - k_2\Phi = k_2\kappa_2^2\gamma^2\Phi'/s < 0 \Leftrightarrow (2.4), (2.5)$$

Отсюда вытекает, что

$$\partial r/\partial \gamma > D^2(e/k_1[\varepsilon\Phi] - \kappa_2^2\gamma^2\Phi'/s[\gamma\Phi]) \quad (2.11)$$

Так как $\Phi' < 0$, то $\varepsilon > 0 \Rightarrow e < 0$, поэтому правая часть (2.11) положительна. Если $\varepsilon < 0$, то, подставив в (2.11) вместо e его выражение из (1.5), получим

$$\frac{\partial r}{\partial \gamma} > \frac{D^2 k_1 \kappa_2^2 \gamma \Phi' \Phi_1}{s[\varepsilon\Phi][\gamma\Phi]} (\gamma \varepsilon_1 - \varepsilon \gamma_1) > 0$$

Следовательно, $\partial r/\partial \gamma > 0$ в области $AB_1A_1B_2$.

В точках пересечения адиабаты H_S и отрезка 5, 6 (фиг. 1) имеем

$$\partial r/\partial \varepsilon = ((a - D^2)[\gamma] - g[\varepsilon])/([\varepsilon][\gamma]) \quad (2.12)$$

В области AOE_2 , используя оценки (1.9), (2.6), аналогично предыдущему устанавливается, что $\partial r/\partial \varepsilon < 0$.

Для A_2OE_2 преобразуем числитель (2.12) к одному из следующих видов:

$$Q_1 = (k_1\Phi' - D^2)[\gamma] - \Phi'\gamma(k_1\kappa_2^2\gamma[\gamma] + k_2\kappa_1^2\varepsilon[\varepsilon])/s$$

$$Q_2 = a([\gamma] - \gamma k_2/k_1) + k_2(\Phi_1\gamma_1 + \kappa_1^2\varepsilon\varepsilon_1\gamma\Phi'/s)$$

Согласно (2.7), $D^2 < k_1\Phi'$, поэтому вне эллипса

$$k_1\kappa_2^2(\varepsilon - \varepsilon_1/2)^2 + k_2\kappa_1^2(\gamma - \gamma_1/2)^2 = (\kappa_1^2 k_2 \varepsilon_1^2 + \kappa_2^2 k_1 \gamma_1^2)/4$$

величина $Q_1 < 0$, откуда $\partial r/\partial \varepsilon < 0$.

Так как $\kappa_1^2\varepsilon^2 < s^2$ и на адиабате $\varepsilon_1\gamma > -\varepsilon\gamma_1$, то

$$Q_2 < a\gamma(1 - k_2/k_1) - \gamma((k_1 + k_2)\Phi' - k_2(\Phi + \Phi_1))$$

Если

$$(k_1 + k_2)\Phi' > k_2(\Phi + \Phi_1) \quad (2.13)$$

то $Q_2 < 0$ и $\partial r/\partial \varepsilon < 0$.

Оценка (2.13) сильно завышена. Если $s < s^\circ$ ($\Phi'(s^\circ) = \Phi_1$), то достаточно условий (1.8).

Заметим, что для функции (2.10) неравенство (2.13) выполняется.

Следовательно, $\partial r/\partial \varepsilon < 0$ в области AOA_2E_2 . Отсюда заключаем, что каждый интервал 5, 6 ($\gamma = \text{const}$) содержит только одну точку адиабаты H_S .

Таким образом, адиабата H_F является функцией ε , H_S — функцией γ .

3. Волны Римана. Если ввести автомодельную переменную $y = x/t$, то система (1.4) преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, нетривиальные решения которой (волны Римана) получаются, когда на некотором интервале изменения y тождественно выполняется равенство $y = \xi$, где ξ — одна из характеристик [13]. Правый собственный вектор матрицы системы (1.4), записанный в форме $u + Au_x = 0$, равен $r = (-\xi e, -\xi(\xi^2 - a), e, \xi^2 - a)$. Отсюда получаем

$$d\varepsilon/dy^2 = e/P, \quad d\gamma/dy^2 = (\xi^2 - a)/P \quad (3.1)$$

$$du/de = -\xi, \quad dv/d\gamma = -\xi, \quad P = e\partial\xi^2/\partial\varepsilon + (\xi^2 - a)\partial\xi^2/\partial\gamma \quad (3.2)$$

Для $\xi = \xi_F$ уравнения (3.1) определяют быструю волну Римана R_F , для $\xi = \xi_S$ — медленную R_S . При этом, так как $\xi = \xi(\varepsilon, \gamma)$, достаточно исследовать только решения системы (3.1). Условия (1.8) исключают наличие у нее особых точек.

Фазовые кривые системы (3.1)

$$(d\gamma/d\varepsilon)_F = (\xi_F^2 - a)/e, \quad (d\gamma/d\varepsilon)_S = (\xi_S^2 - a)/e \quad (3.3)$$

получаются из уравнения

$$e p^2 + (a - b)p - g = 0, \quad p = d\gamma/d\varepsilon \quad (3.4)$$

Так как $g/e = \text{const} \neq 0$, то пересечение фазовых кривых происходит под постоянным углом.

Поскольку функции a, b, ξ^2 — четные, e — нечетная по каждому аргументу, то фазовые кривые симметричны относительно осей координат. Функция P — четная относительно ε и нечетная относительно γ . Следовательно, достаточно знать направление фазовых кривых в одной из четвертей плоскости деформации. Поэтому исследуем фазовые кривые сначала при $\varepsilon > 0, \gamma > 0$.

В силу (1.9) имеем $(d\gamma/d\varepsilon)_F < 0, (d\gamma/d\varepsilon)_S > 0$. Отсюда следует, что в быстрой волне Римана R_F рост продольной компоненты деформации ε сопровождается убыванием сдвига γ , а в медленной волне R_S их приращение одного знака. Этот факт наблюдался в экспериментах на ударное нагружение тонкостенного металлического цилиндра, когда его торец подвергался действию сжимающего-крутящего импульса [16].

Вблизи осей координат $\varepsilon = 0, \gamma = 0$, где $e \rightarrow 0$, получаем $\lim_{e \rightarrow 0} (d\gamma/d\varepsilon)_F = 0,$

$\lim_{e \rightarrow 0} (d\gamma/d\varepsilon)_S = \infty$. Существует два частных решения: $\gamma = 0$ и $\varepsilon = 0$.

Направление фазовых кривых определим найдя знак функции P вблизи оси $\gamma = 0$. Для этого разложим функции $a, b, e, \xi_F^2, \xi_S^2$ и их производные по ε и γ в ряд по степеням γ/ε , считая $\gamma/\varepsilon \ll 1$. Произведя необходимые выкладки и отбросив члены высших порядков, получим, что $P > 0$ в силу (1.7) для обоих семейств кривых R_F и R_S . Тогда направление фазовых кривых определится из (3.1). Так как особых точек нет, то эти направления сохранятся во всей четверти плоскости $\varepsilon \geq 0, \gamma \geq 0$. В силу указанных свойств четности функций $a, b, e, P, \xi_F^2, \xi_S^2$ фазовая кривая не может покинуть данную четверть плоскости.

Таким образом, фазовые кривые R_F и R_S системы (3.1) имеют вид, изображенный на фиг. 2. Стрелками указано направление возрастания величины $y^2 = \xi_F^2, s$.

Покажем, что в волнах Римана происходит активный процесс, т. е. при прохождении волны R_F или R_S через какую-либо материальную точку в ней происходит нагружение и выполняется неравенство $\sigma d\varepsilon > 0$. С этой целью вычислим значение функции $F(p)$, определенной левой частью уравнения (3.4), на окружности $s = \text{const}$ и на луче $\gamma/\varepsilon = \text{const}$:

$$F(-\kappa_1^2 \varepsilon / \kappa_2^2 \gamma) = -(k_1 - k_2) \varepsilon \gamma \kappa_1^2 \kappa_2^2 \varphi, \quad F(\gamma/\varepsilon) = \gamma \Phi'(k_1 - k_2)/\varepsilon$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon > 0, \gamma > 0$ имеют место неравенства $(d\gamma/d\varepsilon)_F > -\kappa_1^2 \varepsilon / \kappa_2^2 \gamma, (d\gamma/d\varepsilon)_S > \gamma/\varepsilon$.

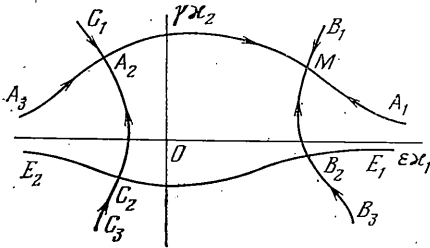
Угол наклона к оси ε касательной к фазовой кривой R_F в любой точке меньше угла наклона касательной к окружности $s = \text{const}$ в той же точке, а угол наклона касательной к кривой R_S больше угла наклона луча, проведенного из начала координат в точку касания. Поскольку, согласно (1.2), $\sigma = \sigma\varepsilon$ ($\varphi > 0$), из этих свойств вытекает сделанное утверждение.

Отметим, что фазовые кривые R_F, R_S (фиг. 2) являются на самом деле траекториями деформации процессов, проходящих в волнах Римана R_F и R_S . Из проведенного рассмотрения следует, что в быстрой волне R_F на-

гружение никогда не простое [10], в медленной волне R_s в определенных областях оно может быть близким к простому.

Заметим также, что направление фазовых кривых таково, что деформированное состояние из какой-либо четверти плоскости деформации изолировано от непрерывного перехода в состояние, принадлежащего другой четверти плоскости.

4. Эволюционность автомодельных комбинированных разрывов. Зафиксируем переднее состояние разрыва ε_1, γ_1 . Учитывая свойства симметрии полной ударной адиабаты (2.3) и фазовых кривых волн Римана, будем считать без ограничения общности, что $\varepsilon_1 > 0, \gamma_1 > 0$. Так как в точке ε_1, γ_1 ударная адиабата и соответствующая фазовая кривая имеют касание второго порядка [13, 17], то для разрывов малой интенсивности при $[s] < 0$ имеем $D_F = (\xi_F + \xi_{F1})/2, D_S = (\xi_S + \xi_{S1})/2, \xi_F > \xi_{F1}, \xi_S > \xi_{S1}$, откуда следует



Фиг. 3

$$\xi_F > D_F > \xi_{F1}, \xi_S > D_S > \xi_{S1} \quad (4.1)$$

Вместе с соотношениями п. 2 эти неравенства обеспечивают эволюционность разрывов D_F, D_S (см., например, [9]).

Докажем, что автомодельный разрыв $[s] < 0$ произвольной интенсивности, переднее и заднее состояния которого принадлежат одной и той же четверти плоскости деформации, эволюционен. Для этого достаточно установить справедливость (4.1) при любых задних состояниях $\varepsilon > 0, \gamma > 0$, принадлежащих соответствующим ударным адиабатам.

Для этого определим, как изменяется скорость разрыва, когда варьируется заднее состояние. В п. 2 доказано, что адиабата H_F есть функция ε , поэтому выберем ε параметром этой кривой. По тем же соображениям пусть γ — параметр адиабаты H_S .

Вдоль ударной адиабаты

$$\eta = \frac{d\gamma}{d\varepsilon} = - \frac{((a-D^2)[\gamma] - e[\varepsilon])(a-\xi^2)}{e((a-\xi^2)[\gamma] - e[\varepsilon]) - (D^2 - \xi^2)(a-\xi^2)}$$

$$\frac{dD_F^2}{d\varepsilon} = \frac{(D_F^2 - \xi_F^2)(D_F^2 - \xi_S^2)}{(b-D_F^2)[\varepsilon] - e[\gamma]}, \quad \frac{dD_S^2}{d\gamma} = \frac{(D_S^2 - \xi_S^2)(D_S^2 - \xi_F^2)}{(a-D_S^2)[\gamma] - e[\varepsilon]}$$

Из этих равенств вытекает, что следующие соотношения выполняются на ударной адиабате только одновременно [18]:

$$D^2 = \xi^2, \quad \eta = (\xi^2 - a)/e, \quad dD^2 = 0 \quad (4.2)$$

т. е. в точках адиабаты, в которых $D^2 = \xi^2$, ее касательная совпадает с касательной к соответствующей фазовой кривой и скорость разрыва экстремальна. Верно и обратное утверждение.

В силу условий п. 2 при $[s] < 0$ вдоль ударной адиабаты H_F выполняется неравенство $(b-D_F^2)[\varepsilon] - e[\gamma] > 0$, вдоль H_S — неравенство $(a-D_S^2)[\gamma] - e[\varepsilon] < 0$. Следовательно, при удалении заднего состояния от переднего ($d\varepsilon < 0$ на $H_F, d\gamma < 0$ на H_S) найдем

$$\text{sgn } dD_F^2 = -\text{sgn}(D_F^2 - \xi_F^2)(D_F^2 - \xi_S^2)$$

$$\text{sgn } dD_S^2 = \text{sgn}(D_S^2 - \xi_S^2)(D_S^2 - \xi_F^2)$$

Отсюда на основании (4.1) в окрестности переднего состояния будем иметь $dD_F^2 > 0, dD_S^2 > 0$.

При $\varepsilon > 0$ вдоль фазовых кривых R_F функция ξ_F монотонно растет, если $d\varepsilon < 0$ (п. 3). Следовательно, согласно (4.2) в правой окрестности точки пересечения функций D_F и ξ_F имеет место неравенство $D_F > \xi_F$. Поэтому, так как в окрестности переднего состояния $D_F < \xi_F$, такое пересечение невозможно и в (4.1) неравенство $D_F < \xi_F$ сохраняется. Так как $dD_F^2 > 0$, то не изменится и неравенство $D_F > \xi_{F1}$. Если $\varepsilon = 0$, то $D_F^2 = k_1 \sigma_1$, $\xi_F^2 = k_1 \varphi$, т. е. по-прежнему $D_F < \xi_F$.

Аналогично доказывается справедливость (4.1), для D_S при $\gamma \geq 0$.

В точке $\varepsilon = -\varepsilon_1$, $\gamma = \gamma_1$ (точка A_1 на фиг. 1) величины $D_F^2 = k_1 \varphi_1$, $\xi_F^2 = \xi_{F1}^2$, откуда $D_F > \xi_F$. Следовательно, при $\varepsilon < 0$ существует точка, в которой $D_F = \xi_F$. Вдоль кривых R_F функция ξ_F монотонно убывает, когда $d\varepsilon < 0$, поэтому в левой окрестности точки пересечения функций D_F и ξ_F имеем $D_F > \xi_F$. Отсюда следует единственность этой точки. Таким образом, на части полной ударной адиабаты H_F , определенной на интервале $\varepsilon \in (\varepsilon^0, \varepsilon_1)$, где $\varepsilon^0 < 0$, есть единственное решение уравнения $D_F = \xi_F$, автомодельный разрыв D_F эволюционен. Он не эволюционен на всей остальной части H_F .

Аналогичным образом на полной ударной адиабате H_S интервалом $\gamma \in (\gamma^0, \gamma_1)$, где $\gamma^0 < 0$ есть единственное решение уравнения $D_S = \xi_S$, выделяется та часть, на которой разрыв D_S эволюционен.

5. Решение смешанной автомодельной задачи. Рассмотрим полупространство $x \geq 0$, находящееся при $t \leq 0$ в заданном деформированном состоянии ε_1, γ_1 . В момент $t = 0$ на границе $x = 0$ прикладывается нагрузка, обеспечивающая при $t > 0$, $x = 0$ заданную деформацию ε_2, γ_2 . Такая задача допускает автомодельное решение. Не ограничивая общности, положим $\varepsilon_1 \geq 0, \gamma_1 \geq 0$. При нахождении решения примем во внимание, что для заднего состояния величина автомодельной переменной y меньше, чем для переднего. Следовательно, в волнах Римана R_F и R_S разрешено движение от заднего состояния к переднему только по направлениям фазовых кривых, отмеченных стрелками на фиг. 2.

Проведем через заданную точку $M(\varepsilon_1, \gamma_1)$ (фиг. 3) фазовые кривые R_F (кривая MA_1), R_S (кривая MB_1) и части ударных адиабат H_F (кривая MA_2) и H_S (кривая MB_2), на которых эти разрывы эволюционны. Точки A_2 и B_2 однозначно определены решением уравнений $D_F = \xi_F$ и $D_S = \xi_S$. Через них проведем фазовые кривые: A_2A_3 — кривая R_F ; A_2C_1, B_2B_3 — кривые R_S . Рассматривая каждую точку кривой $A_1MA_2A_3$ в качестве переднего состояния, проведем через нее эволюционную часть ударной адиабаты H_S . Пусть кривая $E_1B_2C_2E_2$ — геометрическое место конечных точек таких частей адиабаты H_S , а C_2C_3 — кривая R_S .

В зависимости от того, в какой из частей плоскости деформации, ограниченных построенными кривыми, находится заднее состояние ε_2, γ_2 , волновая конфигурация обобщенного решения будет различной. Пусть точка ε_2, γ_2 принадлежит области B_1MA_1 . Тогда решение состоит из волны R_F и бегущей за ней волны R_S , разделенных областью постоянного движения. Кратко запишем это в виде $R_S R_F (B_1MA_1)$. Остальные решения будут следующими: $R_S D_F (C_1A_2MB_1)$, $D_S D_F (MA_2C_2B_2M)$, $R_S R_F D_F (C_1A_2A_3)$, $D_S R_F D_F (A_3A_2C_2E_2)$, $R_S D_S R_F D_F (E_2C_2C_3)$, $R_S D_S D_F (C_3C_2B_2B_3)$, $R_S D_S R_F (E_1B_2MA_1)$.

Поскольку кривые H_F, R_F зависят от параметра ε , а кривые H_S, R_S — от γ , то численная реализация полученных решений фактически сводится к двум стандартным процедурам: решение одного трансцендентного уравнения в заданной области и решение задачи Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения.

Автор благодарит А. А. Бармина и А. М. Формальского за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бленд Д. Р. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
2. Размагулин Х. А. О распространении упругопластических волн при сложном нагружении. — ПММ, 1958, т. 22, вып. 6, с. 759—765.
3. Анциферов В. С., Размагулин Х. А. Распространение сжимающе-сдвигающих возмущений в нелинейно-упругой среде. — ПММ, 1964, т. 28, вып. 3, с. 572—578.
4. Кригеску Н. О распространении упругопластических волн при сложном нагружении. — ПММ, 1959, т. 23, вып. 6, с. 1124—1128.
5. Жубаев Н., Карымсаков К. У. Продольно-скручивающий удар по физически нелинейной упругой тонкостенной трубе. — Прикл. механика, 1975, т. 11, вып. 8, с. 127—131.

6. Буренин А. А., Нгуен Хыу Тхань, Чернышев А. Д. О распространении ударных волн в упругой среде при плоской конечной деформации.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 5, с. 900–904.
7. Буренин А. А., Чернышев А. Д. Ударные волны в изотропном упругом пространстве.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 4, с. 711–717.
8. Куликовский А. Г., Сеешников Е. И. Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейно-упругих средах.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 3, с. 523–534.
9. Бармин А. А., Куликовский А. Г. О разрывных решениях в механике сплошной среды.— В кн.: Некоторые вопросы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 70–88.
10. Ильюшин А. А. Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
11. Clifton R. J. An analysis of combined longitudinal and torsional plastic waves in a thin-walled tube.— Proc. 5th U. S. National Congress of Appl. Mech. N. Y.: ASME, 1966, p. 465–480.
12. Ting T. C. T. Elastic-plastic boundaries on the propagation of plane and cylindrical waves of combined stress.— Quart. Appl. Math., 1970, v. 27, No. 4, p. 441–451.
13. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
14. Ленский Э. В. Об ударной адиабате плоского продольно-сдвигового разрыва.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1981, вып. 1, с. 94–96.
15. Ленский Э. В. Ударная волна при продольно-крутильном ударе.— Газовая и волновая динамика: Сб. статей. М.: Изд-во МГУ, вып. 3, с. 147–148.
16. Lipkin J., Clifton R. J. Plastic waves of combined stresses due to longitudinal impact of a pretorqued tube. Pt. I, II.— Trans. ASME. Ser. E. Appl. Mech., 1970, v. 37, No. 4, p. 1107–1120.
17. Lax P. D. Nonlinear hyperbolic equations.— Commun Pure and Appl. Math., 1953, v. 6, No. 6, p. 231–258.
18. Куликовский А. Г. О свойствах ударных адиабат в окрестности точки Жуге.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 2, с. 184–186.

Москва

Поступила в редакцию
12.X.1981