**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1983**

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА С РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

ЯНЮТИН Е. Г.

Вопросы, связанные с изучением распространения упругих волн в среде, которая содержит сферическую полость постоянного радиуса, достаточно подробно изучены. Для анализа нестационарных процессов в такой упругой системе применялись различные аналитические и численные методы [1–5]. Способ построения общего решения уравнений теорий упругости в сферической системе координат, примененный в данной работе, аналогичен описанным ранее в [6–9].

1. Приведем решение задачи о нестационарном осесимметричном деформировании упругого пространства со сферической полостью, радиус R_0 которой является функцией времени t: $R_0=R_0(t)$, и предположим, что функция $R_0(t)$ монотонно возрастает. Введем обозначение $R_0^{\vee}=\min R_0(t)=R_0(0)$. На характер изменения функции $R_0(t)$ накладываем также ограничение вида $R_0^{\bullet}(t)<b$, соответствующее тому, что скорость увеличения радиуса сферической полости меньше скорости распространения поперечных волн в среде.

Исходим из уравнений осесимметричного движения упругой среды [10], записанных в сферической системе координат r, θ, φ:

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial\Delta}{\partial\theta}+\frac{2\mu}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\varphi)=\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2},$$

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\frac{\partial\Delta}{\partial r}-\frac{2\mu}{\rho}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\omega_\varphi\sin\theta)=\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

$$\omega_\varphi=\frac{1}{2r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)-\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right]$$

$$\Delta=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2u_r\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}(ru_\theta\sin\theta)\right]$$

где u_r, u_θ — компоненты вектора смещений точек среды.

Представим решение уравнений (1.1) в виде разложений по координате θ в ряды по присоединенным функциям Лежандра первого рода:

$$u_r=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(r,t)P_n(\cos\theta),\quad u_\theta=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(r,t)P_n^1(\cos\theta) \tag{1.2}$$

Подставляя соотношения (1.2) в уравнения (1.1) и применяя затем к ним преобразование Лапласа по переменной t с учетом нулевых начальных условий $u_r(r,\theta,0)=u_r^{\bullet}(r,\theta,0)=u_\theta(r,\theta,0)=u_\theta^{\bullet}(r,\theta,0)=0$, получим решение в области изображений

$$\Psi_n(r,s)=\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{k+1}(n+k)!}{2^kr^{k+1}k!(n-k)!s^{k+1}}+\right.$$

$$
+\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{k+2}(n+k)!\,(k+1)}{2^k r^{k+2}(n-k)!\,s^{k+2}}\exp\left[-\frac{s}{a}(r-R_0^{\vee})\right]T^n(s)+
$$

$$
+n(n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{b^{k+2}(n+k)!}{2^{k-1}r^{k+2}k!\,(n-k)!\,s^{k+2}}\exp\left[-\frac{s}{b}(r-R_0^{\vee})\right]S^n(s)\qquad(n=0,1,2,\ldots)
$$

$$
\Phi_n(r,s)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{k+2}(n+k)!}{2^k r^{k+2}k!\,(n-k)!\,s^{k+2}}\exp\left[-\frac{s}{a}(r-R_0^{\vee})\right]T^n(s)-
$$

$$
-\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{b^{k+1}(n+k)!}{2^{k-1}r^{k+1}k!\,(n-k)!\,s^{k+1}}+\right.\tag{1.3}
$$

$$
\left.+\sum_{k=0}^{n}\frac{b^{k+2}(n+k)!\,k}{2^{k-1}r^{k+2}k!\,(n-k)!\,s^{k+2}}\right]\exp\left[-\frac{s}{b}(r-R_0^{\vee})\right]S^n(s)\qquad(n=1,2,3,\ldots)
$$

Здесь a — скорость распространения продольных волн в среде, s — параметр преобразования Лапласа. $T^n(s)$, $S^n(s)$ — произвольные функции параметра s, $\Psi_n(r, s)$, $\Phi_n(r, s)$ — функции изображения оригиналов $\psi_n(r,t)$ и $\varphi_n(r,t)$. Соотношения (1.3) удовлетворяют условию равенства нулю решения при $r\to\infty$.

Используя формулы (1.3), запишем с применением обычных правил операционного исчисления выражения для функций $\varphi_n(r,t)$, $\psi_n(r,t)$:

$$
\psi_n(r,t)=H(t_1)\left[\sum_{k=0}^{n}\mu_1(n,k,r)\int_0^{t_1}(t_1-\tau)^{k+1}T^n(\tau)\,d\tau+\sum_{k=0}^{n}\mu_2(n,k,r)\int_0^{t_1}(t_1-\right.
$$

$$
\left.-\tau)^k T^n(\tau)\,d\tau\right]+H(t_2)\sum_{k=0}^{n}\mu_3(n,k,r)\int_0^{t_2}(t_2-\tau)^{k+1}S^n(\tau)\,d\tau\qquad(n=0,1,2,\ldots)
$$

$$
\varphi_n(r,t)=H(t_1)\sum_{k=0}^{n}\mu_4(n,k,r)\int_0^{t_1}(t_1-\tau)^{k+1}T^n(\tau)\,d\tau+
$$

$$
+H(t_2)\left[\sum_{k=0}^{n}\mu_5(n,k,r)\int_0^{t_2}(t_2-\tau)^k S^n(\tau)\,d\tau+\sum_{k=0}^{n}\mu_6(n,k,r)\int_0^{t_2}(t_2-\right.
$$

$$
\left.-\tau)^{k+1}S^n(\tau)\,d\tau\right]\qquad(n=1,2,3,\ldots)
$$

$$
t_1=t-(r-R_0^{\vee})/a,\qquad t_2=t-(r-R_0^{\vee})/b
$$

$$
\mu_1(n,k,r)=\frac{a^{k+2}(n+k)!}{2^k r^{k+2}(k!)^2(n-k)!},\qquad \mu_2(n,k,r)=\frac{a^{k+1}(n+k)!}{2^k r^{k+1}(k!)^2(n-k)!}
$$

$$
\mu_3(n,k,r)=\frac{n(n+1)\,b^{k+2}(n+k)!}{2^{k-1}r^{k+2}k!\,(k+1)!\,(n-k)!},\qquad \mu_4(n,k,r)=\frac{-a^{k+2}(n+k)!}{2^k r^{k+2}k!\,(k+1)!\,(n-k)!}
$$

$$
\mu_5(n,k,r)=\frac{-b^{k+1}(n+k)!}{2^{k-1}r^{k+1}(k!)^2(n-k)!},\qquad \mu_6(n,k,r)=\frac{-b^{k+2}(n+k)!\,k}{2^{k-1}r^{k+2}(k!)^2(n-k)!\,(k+1)}
$$

2. Предположим, что на поверхности полости с радиусом $r=R_0(t)$ являются заданными напряжения σ_r, $\tau_{\theta r}$:

$$
\begin{gathered}
\sigma_r(r,\theta,t)=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\lambda}{r}\left(2u_r+\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\operatorname{ctg}\theta u_\theta\right)=f_1(\theta,t)\\
\tau_{\theta r}(r,\theta,t)=\mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)=f_2(\theta,t).
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

где $f(\theta,t)$, $f_2(\theta,t)$ — известные функции.

Разложив соотношения (2.1) в ряды по присоединенным функциям Лежандра первого рода, с учетом выражений (1.2) будем иметь

$$
\begin{gathered}
(\lambda+2\mu)\frac{\partial\psi_n(r,t)}{\partial r}+\frac{2\lambda}{r}\psi_n(r,t)-\frac{\lambda}{r}n(n+1)\varphi_n(r,t)=f_1{}^n(t)\quad {\scriptstyle (n=0,1,2,\ldots)}\\
\mu\frac{\partial\varphi_n(r,t)}{\partial r}-\frac{\mu}{r}\varphi_n(r,t)-\frac{\mu}{r}\psi_n(r,t)=f_2{}^n(t)\quad {\scriptstyle (n=1,2,3,\ldots)}
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

Приведенные соотношения после подстановки в них выражений (1.4) следует рассматривать как систему интегральных уравнений относительно функций $T^n(t)$ и $S^n(t)$. Для ее численного решения введем аналогично способу из [11] следующие аппроксимирующие выражения искомых функций $T^n(t)$ и $S^n(t)$ (Δt — шаг во времени):

$$
\begin{gathered}
T^n(t)=\sum_{p=1}^{m}T_p{}^n[H(t-t_{p-1})-H(t-t_p)]\quad (t<m\Delta t)\\
S^n(t)=\sum_{p=1}^{m}S_p{}^n[H(t-t_{p-1})-H(t-t_p)]\quad {\scriptstyle (m=1,2,3,\ldots)},\\
t_p=p\Delta t,\qquad T_p{}^n=\mathrm{const},\qquad S_p{}^n=\mathrm{const}
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

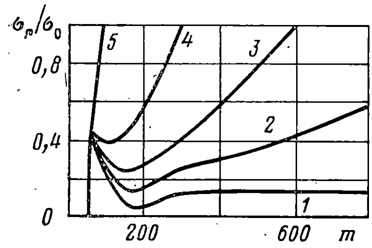
Форма выражений (2.3) позволяет свести анализ интегральных уравнений (2.2) к решению системы алгебраических уравнений для величин $T_m{}^n$ и $S_m{}^n$. Из нее шаг за шагом для $m=1,2,3,\ldots$ находятся значения $T_m{}^n$, $S_m{}^n$. Затем вычисляются смещения и напряжения в точках упругого пространства.

3. В качестве примера рассмотрим случай расширения сферической полости по закону $R_0(t)=R_0+V_0t$, $V_0=\mathrm{const}$. На поверхности полости действует равномерно распределенная радиальная импульсная нагрузка, внезапно приложенная в момент времени $t=0$. В этом случае в среде распространяются лишь продольные упругие волны. Поэтому ограничение на скорость расширения полости будет $R_0{}^{\bullet}(t)<a$ и вместо двух граничных условий (2.1) остается лишь одно: $\sigma_r(R_0(t),\ t)=-\sigma_0H(t)$, где $H(t)$ — единичная функция Хевисайда.

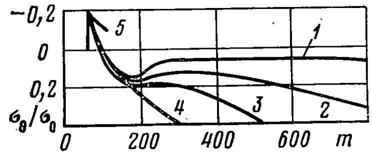
На фиг. 1, 2 изображены зависимости от времени напряжений $\sigma_r(r,\ t)$ и $\sigma_\theta(r,\ t)$, вычисленных для различных значений V_0 в одной точке среды $r=0{,}6$ м. Кривые *1–5* соответствуют $V_0=0$, 250, 500, 1000 м/с, *b*. Расчетные значения параметров принимались следующими: $R_0{}^{\vee}=0{,}3$ м, $\Delta t=10^{-6}$ с, $E=2{,}058\cdot10^5$ МПа, $\nu=0{,}3$ (E – модуль упругости материала среды, ν – коэффициент Пуассона). По горизонтальной оси фигур отложена величина m – количество шагов во времени.

Моменты времени, когда сферическая поверхность расширяющейся полости достигает расчетной точки ($r=0{,}6$ м), соответствуют значениям $\sigma_r/\sigma_0=-1$ (фиг. 1). При $V_0=0$ для больших времен наблюдается стремление напряжений к их статическим значениям. Для $V_0>0$ имеет место рост абсолютных значений напряжений во времени, причем при увеличении V_0 происходит их более стремительное нарастание.

Ниже приводятся результаты сравнения значений безразмерных радиальных напряжений, вычисленных на основе изложенной методики при $V_0=0$ и рассчитанных



Фиг. 1



Фиг. 2

по формуле

$$\sigma_r=\frac{\sigma_0R_0^\vee}{r}H(\xi)\left\{e^{-\alpha\xi}\left(-\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\xi+\cos\beta\xi\right)+\frac{4b^2}{ar}e^{-\alpha\xi}\frac{\sin\beta\xi}{\beta}+\right.$$

$$\left.+\frac{4b^2}{r^2\beta}\left[\frac{e^{-\alpha\xi}}{\alpha^2+\beta^2}(-\alpha\sin\beta\xi-\beta\cos\beta\xi)+\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right]\right\} \tag{3.2}$$

$$\xi=t-\frac{r-R_0^\vee}{a},\qquad \alpha=\frac{2b^2}{aR_0^\vee},\qquad \beta=\frac{2b}{R_0^\vee}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

Первые две строки относятся к шагу $\Delta t=10^{-6}$ с, а третья и четвертая – к $\Delta t=2{,}5\cdot10^{-7}$ с ($r=0{,}6$ м):

$t=6\cdot10^{-5}$	$t=1\cdot10^{-4}$	$t=1{,}5\cdot10^{-4}$	$t=2\cdot10^{-4}$
$4{,}424\cdot10^{-1}$	$2{,}251\cdot10^{-1}$	$7{,}567\cdot10^{-2}$	$5{,}760\cdot10^{-2}$
$4{,}438\cdot10^{-1}$	$2{,}241\cdot10^{-1}$	$7{,}393\cdot10^{-2}$	$5{,}705\cdot10^{-2}$
$4{,}434\cdot10^{-1}$	$2{,}243\cdot10^{-1}$	$7{,}437\cdot10^{-2}$	$5{,}719\cdot10^{-2}$
$4{,}438\cdot10^{-1}$	$2{,}241\cdot10^{-1}$	$7{,}393\cdot10^{-2}$	$5{,}705\cdot10^{-2}$

Аналитическое выражение (3.2) получено в предположении фиксированного значения $R_0^\vee$ с применением стандартных методов построения решения уравнения для радиальных смещений упругой среды, содержащей сферическую полость. Форма решения (3.2) аналогична, приведенному в [12]. Величины, стоящие во второй и четвертой строке, соответствуют точному решению (3.2), а в первом и третьей строке – решению, построенному на основе изложенной методики.

Установлено, что с уменьшением шага во времени происходит уменьшение относительной погрешности в вычислениях величин напряжений по сравнению с их точными значениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huang H., Wang J. F.* Transient stress concentration by a spherical cavity in an elastic medium.– Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1972, v. 39, No. 4, p. 1002–1004.– Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Амер. о-ва инж.-механ., 1972, № 4, с. 146–149.
2. *Ковшов А. Н.* Дифракция упругой волны на сферической полости. Численное решение.– Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 2, с. 62–70.
3. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А.* Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978. 307 с.
4. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Панасюк Н. М.* Нестационарная дифракция сферической волны напряжений на сферической полости в упругой среде.– Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 3, с. 88–92.
5. *Подильчук Ю. Н., Рубцов Ю. К.* Распространение нестационарных упругих волн от сферических полостей при осесимметричном возмущении.– Прикл. механ., 1981, № 7, с. 3–9.
6. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.– Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
7. *Смирнов В. И.* Решение предельных задач теории упругости в случае круга и сферы.– Докл. АН СССР, 1937, т. 14, № 2, с. 69–72.
8. *Миндлин Я. А.* Решение внешней задачи Коши–Дирихле для волнового уравнения в случае сферы.– Докл. АН СССР, 1940, т. 26, № 6, с. 577–580.
9. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* К определению гидродинамических сил взаимодействия слабых ударных волн с упругой сферой.– Докл. АН СССР, 1976, т. 230, № 1, с. 60–63.
10. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.– Л.: Гостехиздат, 1935. 674 с
11. *Кохманюк С. С., Янютин Е. Г., Романенко Л. Г.* Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. Киев: Наук. думка, 1980. с. 231.
12. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.

Харьков

Поступила в редакцию
23.XI.1981