

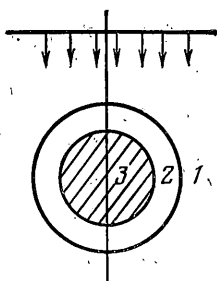
УДК 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОДОЛЬНОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ
С МАССИВНЫМ ЦИЛИНДРОМ, ОКРУЖЕННЫМ УПРУГИМ СЛОЕМ

ЕСЕНИНА Н. А., КОВШОВ А. Н.

Методом конечных разностей исследуется взаимодействие плоской упругой волны с жестким телом, окруженным упругим цилиндрическим слоем, свойства которого отличаются от свойств внешней упругой среды. В зависимости от условий контакта и относительных свойств слоя и среды определяется движение тела и напряжения в слое и среде.

1. Рассмотрим задачу о дифракции плоской продольной упругой волны на жестком массивном цилиндре, окруженном упругим цилиндрическим слоем, параметры которого отличаются от параметров внешней упругой среды (фиг. 1, где 1 — безграничная упругая среда, 2 — упругий слой, 3 — жесткое цилиндрическое тело). В среде распространяется плоская продольная волна. Необходимо определить параметры движения тела 3 и поля напряжений в слое 2 и среде 1 в зависимости от свойств среды, слоя и условий на границе их раздела ($r=r_1$). Считается, что жесткое тело ($r=r_0$) впаивано в слой 2, а на границе $r=r_1$ рассматриваются условия полного прилипания, либо условия проскальзывания. Задача сводится к решению динамических уравнений линейной теории упругости в областях 2 и 1 с соответствующими граничными и начальными условиями. В полярных координатах (r, θ) уравнения имеют вид



Фиг. 1

$$\sigma_{,i} = (\lambda_i + 2\mu_i) u_{,r} + \lambda_i (v_{,\theta} + u) / r \quad (1.1)$$

$$s_{,i} = \lambda_i u_{,r} + (\lambda_i + 2\mu_i) (v_{,\theta} + u) / r$$

$$\tau_{,i} = \mu_i (v_{,r} + (u_{,\theta} - v) / r)$$

$$\rho_i u_{,i} = \sigma_{,r} + (\tau_{,\theta} + \sigma - s) / r$$

$$\rho_i v_{,i} = s_{,\theta} / r + \tau_{,r} + 2\tau / r$$

Здесь и далее запятая с индексом означает частную производную по соответствующему аргументу и введены обозначения $\sigma = \sigma_{rr}$, $s = \sigma_{\theta\theta}$, $\tau = \sigma_{r\theta}$, $u = u_r$, $v = u_\theta$; ρ_i — плотность, λ_i , μ_i — коэффициенты Ламе для среды ($i=1$) и слоя ($i=2$).

Вводя безразмерные переменные $\sigma_{ki}' = \sigma_{ki} / (\rho_i a_i^2)$, $t' = ta_1 / r_0$, $u_k' = u_k / a_1$, $a_1 = ((\lambda_1 + 2\mu_1) / \rho_1)^{1/2}$ и опуская штрихи, перепишем систему (1.1) в виде

$$\sigma_{,i} = k_i u_{,r} + k_i (1 - 2g_i) (v_{,\theta} + u) / r \quad (1.2)$$

$$s_{,i} = k_i (1 - 2g_i) + k_i (v_{,\theta} + u) / r$$

$$\tau_{,i} = k_i g_i (v_{,r} + (u_{,\theta} - v) / r)$$

$$u_{,i} = l_i (\sigma_{,r} + (\tau_{,\theta} + \sigma - s) / r)$$

$$v_{,i} = l_i (s_{,\theta} / r + \tau_{,r} + 2\tau / r) \quad (i=1, 2)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = \rho_2 a_2^2 / (\rho_1 a_1^2), \quad l_1 = 1, \quad l_2 = \rho_1 / \rho_2, \quad g_i = b_i^2 / a_i^2, \quad b_i^2 = \mu_i / \rho_i$$

Начальное условие для решения системы уравнений (1.2) состоит в том, что при $t=0$ решение совпадает с напряжениями и скоростями, которые задаются падающей плоской продольной волной формы $f(\xi)$. За начало отсчета принимается время, когда волна находится на некотором расстоянии h_1 ($h_1 > r_1$) от цилиндра.

В силу симметрии задачи относительно плоскости $\theta=0$ решение определяется для углов $0 < \theta < \pi$, а при $\theta=0, \pi$ ставятся условия

$$\tau = v = 0, \quad u_{,\theta} = \sigma_{,\theta} = s_{,\theta} = 0 \quad (1.3)$$

Движение цилиндра определяется уравнением

$$m_0 W = 2r_0 \int_0^\pi (\sigma \cos \theta - \tau \sin \theta) d\theta \quad (1.4)$$

где r_0 — радиус цилиндра, m_0 — масса цилиндра плотности ρ_3 , W — ускорение цилиндра по оси r при $\theta=0$. Вычислив скорость цилиндра, можно в силу предположения о контакте слоя 2 с цилиндром найти скорости u и v точек среды на поверхности цилиндра.

На границе двух сред ($r=r_1$) ставятся либо условия полного прилипания

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \sigma_1 = \sigma_2, \quad \tau_1 = \tau_2 \quad (1.5)$$

либо условия проскальзывания

$$\tau_1 = \tau_2 = 0, \quad \sigma_1 = \sigma_2, \quad u_1 = u_2 \quad (1.6)$$

Задача решалась методом конечных разностей на основе алгоритма, изложенного в [1, 2]. Метод расчета напряжений и скоростей на границе раздела сред 1–2 описан ниже.

2. В соответствии с [1] расчетная область в полярных координатах представляет собой прямоугольник $1 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$, который разбит на ячейки так, что $r = 1 + \Delta r i$, $\theta = f j$. В точках целого типа (i, j, k) определяются скорости, т. е. $u(r, \theta, t) = u(1 + \Delta r i, f j, \Delta t k)$. Напряжения находятся в точках $1 + \Delta r(i + 1/2)$, $f(j + 1/2)$, $\Delta t(k + 1/2)$. Граница раздела сред $r_1 = 1 + ip\Delta r$, $0 \leq \theta \leq \pi$ проходит по узлам, где определяются скорости.

Таким образом, если известны скорости на границе раздела сред, то, решая разностный аналог систем (1.2), находим затем напряжения и скорости в обеих средах. Для определения скоростей на границе раздела воспользуемся бихарактеристическими соотношениями систем (1.2). Причем, учитывая вид граничных условий (1.5), (1.6), строим также бихарактеристики, условия на которых связывают между собой σ , u и τ , v . При этом бихарактеристики системы ($i=2$) (обозначим их C и C') должны совпадать с направлением оси r , а бихарактеристики системы ($i=1$) (обозначим их A и A') должны быть направлены противоположно оси r .

Опуская выкладки, выпишем условия вдоль искомого бихарактеристик C, C', A, A' :

$$\frac{d}{dt} \left(\sigma - \sqrt{\frac{k_2}{l_2}} u \right) = \frac{k_2}{r} (1 - 2g_2) (v_{,\theta} + u) - \frac{\sqrt{k_2 l_2}}{r} (\tau_{,\theta} + \sigma - s)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\tau - \sqrt{\frac{k_2 g_2}{l_2}} v \right) = \frac{k_2 g_2}{r} (u_{,\theta} - v) - \frac{\sqrt{k_2 l_2 g_2}}{r} (s_{,\theta} + 2\tau)$$

$$\frac{d}{dt} (\sigma + u) = \frac{1}{r} [\tau_{,\theta} + (1 - 2g_1) (v_{,\theta} + u) + \sigma - s]$$

$$\frac{d}{dt} (\tau + \sqrt{g_1} v) = \frac{1}{r} [g_1 (u_{,\theta} - v) + \sqrt{g_1} (s_{,\theta} + 2\tau)]$$

Проинтегрировав эти условия по времени на промежутке $(t, t+\Delta t)$, получим

$$\sigma_2^1 - \sqrt{k_2/l_2} u_2^1 = \sigma_2^0 - \sqrt{k_2/l_2} u_2^0 + c_1 \equiv d_1 \quad (2.1)$$

$$\tau_2^1 - \sqrt{k_2 g_2/l_2} v_2^1 = \tau_2^0 - \sqrt{k_2 g_2/l_2} v_2^0 + c_2 \equiv d_2$$

$$\sigma_1^1 + u_1^1 = \sigma_1^0 + u_1^0 + c_3 \equiv d_3$$

$$\tau_1^1 + \sqrt{g_1} v_1^1 = \tau_1^0 + \sqrt{g_1} v_1^0 + c_4 \equiv d_4$$

$$c_1 = \int_t^{t+\Delta t} \left(k_2(1-2g_2)(v_{,0}+u) - \sqrt{k_2 l_2}(\tau_{,0}+\sigma-s) \right) \frac{dt}{r} \quad (2.2)$$

$$c_2 = \int_t^{t+\Delta t} \left(k_2 g_2(u_{,0}-v) - \sqrt{k_2 l_2 g_2}(s_{,0}+2\tau) \right) \frac{dt}{r}$$

$$c_3 = \int_t^{t+\Delta t} \left((1-2g_1)(v_{,0}+u) + \tau_{,0} + \sigma - s \right) \frac{dt}{r}$$

$$c_4 = \int_t^{t+\Delta t} \left(g_1(u_{,0}-v) + \sqrt{g_1}(s_{,0}+2\tau) \right) \frac{dt}{r}$$

Здесь нижний индекс у σ , τ , u , v означает среду, в которой они определяются. Верхний индекс (1) означает, что величины определяются в момент времени $t+\Delta t$, а (0) — в момент времени t .

Присоединяя к уравнениям (1.7) условия на контакте (1.5) или (1.6), получим соответственно две системы (каждая из восьми уравнений) для определения восьми неизвестных. Для случая, когда на контакте ставятся условия полного прилипания, система имеет вид

$$u_2^1 = u_1^1, \quad v_2^1 = v_1^1, \quad \sigma_2^1 = \sigma_1^1, \quad \tau_2^1 = \tau_1^1 \quad (2.3)$$

$$\sigma_2^1 - \sqrt{k_2/l_2} u_2^1 = d_1, \quad \tau_2^1 - \sqrt{k_2 g_2/l_2} v_2^1 = d_2$$

$$\sigma_1^1 + u_1^1 = d_3, \quad \tau_1^1 + \sqrt{g_1} v_1^1 = d_4$$

Отсюда имеем

$$v_1^1 = v_2^1 = \frac{d_4 - d_2}{\sqrt{g_1} - \sqrt{k_2 g_2/l_2}}, \quad u_1^1 = u_2^1 = \frac{d_3 - d_1}{1 + \sqrt{k_2/l_2}} \quad (2.4)$$

$$\sigma_1^1 = \sigma_2^1 = (d_3 \sqrt{k_2/l_2} + d_1) / (1 + \sqrt{k_2/l_2})$$

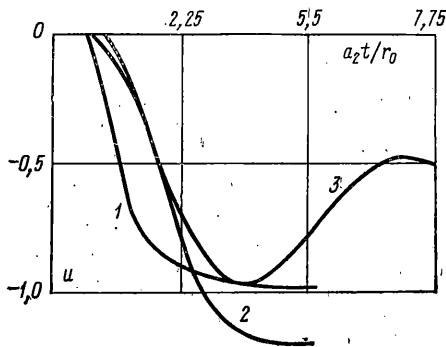
$$\tau_1^1 = \tau_2^1 = (d_4 \sqrt{k_2 g_2/l_2} + d_2 \sqrt{g_1}) / (\sqrt{k_2 g_2/l_2} + \sqrt{g_1})$$

Если на границе раздела сред ставятся условия проскальзывания, то в системе (2.3) меняются только первые четыре уравнения и решение системы имеет вид

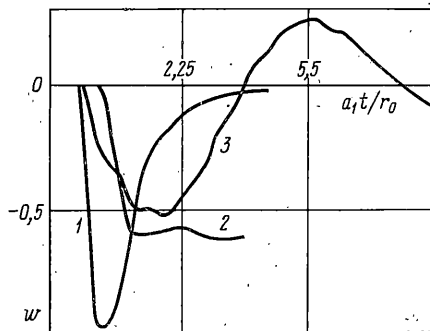
$$v_1^1 = d_4 / \sqrt{g_1}, \quad v_2^1 = -d_2 / \sqrt{k_2 g_2/l_2} \quad (2.5)$$

$$\sigma_1^1 = \sigma_2^1 = (d_3 \sqrt{k_2/l_2} + d_1) / (1 + \sqrt{k_2/l_2})$$

$$u_1^1 = u_2^1 = (d_3 - d_1) / (1 + \sqrt{k_2/l_2}), \quad \tau_1^1 = \tau_2^1 = 0$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Точность полученных решений зависит от точности вычисления интегралов в (2.2). Функции, входящие в подынтегральные выражения, считаем постоянными на промежутке $(t, t+\Delta t)$. Поскольку в принятой разностной схеме вычисление напряжений и скоростей разнесено во времени, скорости берутся в момент времени t , а напряжение — в момент $t+\Delta t/2$.

Применение более точного интегрирования, как показали численные эксперименты, не приводит к существенному улучшению решения задачи в целом.

3. Производимые расчеты ориентировались на изучение поведения датчиков, используемых при измерении динамических напряжений в грунтах. Эти датчики часто имеют форму цилиндров, содержащих чувствительные элементы [3]. Контакт датчика со средой может осуществляться различными способами (склейка, различные прокладки, заполнение жидкостью), но всегда датчик оказывает обратное влияние на поля напряжений и измеренные величины могут отличаться от величин в падающей волне [4]. Влияние свойств среды, слоя и цилиндра на динамические поля скоростей и напряжений было предметом изучения при численном решении.

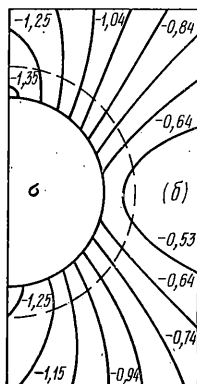
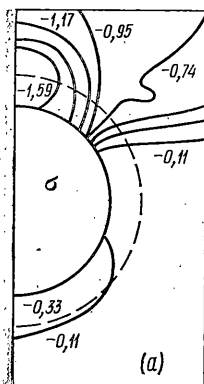
Расчеты проводились на сетке $N \times M = 61 \times 61$, N — число узлов по θ , M — число узлов по r . При этом на слой приходилось до 10 узлов. Параметры, характеризующие относительные физические свойства, следующие: $l_2 = \rho_1/\rho_2$, $l_3 = \rho_1/\rho_3$, $g_1 = b_1^2/a_1^2$, $g_2 = b_2^2/a_2^2$, $k_2 = \rho_2 a_2^2 / (\rho_1 a_1^2)$, где k_2 определяет отношение жесткостей слоя и среды. Были рассчитаны варианты, при которых $l_3 = 0,5; 2,0$, $l_2 = 10; 2$, $g_1 = g_2 = 0,25$, $k_2 = 0,001; 0,1; 1,0$. Форма падающей волны принималась в виде «ступеньки» с временем нарастания до максимума, равным 0,2.

Ясно, что жесткость слоя должна сильно влиять на кинематику. Так, при условии полного контакта для фиксированного значения $l_2 = 2,0$ при $l_3 = 0,5$ (тяжелый цилиндр) при $k_2 = 0,001$ (мягкий слой) скорость и ускорение цилиндра почти равны нулю на интервале времени $0 < t < 2$ ($u_{\max} \approx 0,00212$, $W_{\max} = 0,0005$), а при $k_2 = 0,1$ имеем $u_{\max} = -1,05$, $W_{\max} = -0,66$. Такое же положение сохраняется и для легкого цилиндра. Так, в случае $l_2 = 2$, $l_3 = 2$ (легкий цилиндр) при $k_2 = 0,001$ скорость и ускорение практически равны нулю в промежутке $0 < t < 2$, а при $k_2 = 0,1$ имеем $u_{\max} = -0,374$, $W_{\max} = -0,302$. Изменение отношения плотностей l_2 от 2,0 до 10 мало изменяют указанные величины.

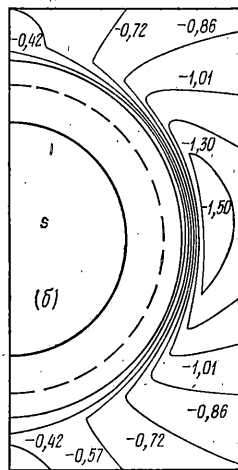
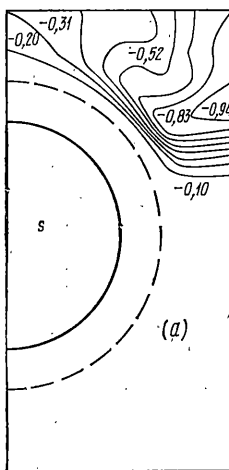
Полученные результаты показывают, что для мягкого слоя ($k_2 = 0,001$) ускорения и скорости цилиндра практически равны нулю при $0 < t < 2$ для всех l_3 и l_2 . Для сравнения приведем результаты для $l_2 = 1,0$, $k_2 = 1,0$, $l_3 = 0,5$, т. е. свойства среды и слоя одинаковы. В этом случае $W_{\max} = -0,97$ достигается при $t = 0,5$ и скорость «быстро» выходит на стационарное значение, равное $-1,0$.

На фиг. 2, 3 даны зависимости скорости и ускорения от времени при $l_3 = 0,5$. Кривая 1 соответствует одинаковым свойствам среды и слоя, т. е. $l_2 = 1,0$, $k_2 = 1,0$, кривая 2 — $l_2 = 10$, $k_2 = 0,1$, кривая 3 — $l_2 = 10$, $k_2 = 0,1$, $g_2 = 0$ (жидкий слой). Результаты показывают, что наличие мягкого слоя резко снижает ускорение и для датчика ускорений свойства слоя должны быть близки к свойствам среды. Наличие мягкого упругого слоя приводит к тому, что для больших значений времени скорость датчика превышает скорость в падающей волне. Если слой по своим свойствам близок к жидкости, то в скорости датчика имеются значительные колебания, отсутствующие в падающей волне.

Напряженное состояние в слое, непосредственно контактирующем с цилиндром, и в среде изучалось с помощью построения изолиний функций $\sigma = \sigma(r, \theta, t)$ и $s = s(r, \theta, t)$ в различные моменты времени в геометрической области $1 \leq r < 2$, $0 \leq \theta \leq \pi$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Для слоя $1 \leq r \leq 1,3$ остальное занимает среда. Изолинии построены для моментов времени $t=1,036, 2,073, 3,110, 4,140$. Рассмотрим результаты, полученные для параметров $l_3=0,5, l_2=1,0, k_2=1,0$ (фиг. 4). Свойства слоя и среды одинаковы, и в силу условий прилипания имеется как бы одна среда. В этом случае при $t=1,036$ (фиг. 4, а) в лобовой части цилиндра $\sigma=-1,9$, что близко к удвоенному значению, соответствующему отражению от жесткой стенки. С тыловой части цилиндра излучается волна, на которой $\sigma=-0,33$. Величина s мала вблизи цилиндра и максимальное значение принимает в месте взаимодействия отраженной и падающей волн.

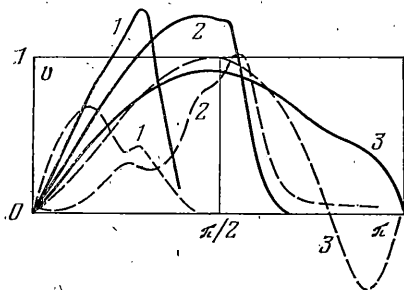
При $t=4,14$ (фиг. 4, б) состояние близко к статическому. Величина $\sigma=-0,4$ при $\theta \leq \pi/2$, а при $\theta=0$ и π имеются зоны концентрации $\sigma=-1,35$. Распределение σ и s симметрично относительно $\theta=\pi/2$. Величина $|s| < 1$ в рассматриваемой области. Максимальное значение $s=-0,7$ будет при $\theta=\pi/2$. Это показывает, что наличие слоя, свойства которого близки к свойствам среды, приводит к тому, что датчик напряжения будет давать сильно завышенные значения для σ . Это особенно проявится для малых значений времени при нормальном падении волны на датчик.

Для значения параметров $l_3=0,5, l_2=2,0, k_2=0,1$ (мягкий слой) функции σ и s приводятся на фиг. 5. При $t=1,036$ (фиг. 5, а) максимальное значение $\sigma=-0,743$ будет вдали от цилиндра, и это меньше, чем в падающей волне. В слое и в среде около него напряжения почти равны нулю. Для больших значений t напряжения σ в слое остаются значительно меньше, чем в падающей волне, а в среде появляются зоны концентрации s . Так, при $t=4,14$ (фиг. 5, б) распределения близки к установившимся и s при $\theta \approx \pi/2$ $r \approx 1,45$ увеличивается до $-1,5$. Максимальное значение σ в слое равно $-0,328$ в зоне малых углов θ . При более мягком слое ($k_2=0,001$) концентрация величин s увеличивается до $-2,0$, а значение σ в слое практически падает до нуля. Это показывает, что для датчиков напряжения свойства окружающего слоя должны удовлетворять определенным условиям. Так, например, величина k_2 должна удовлетворять условию $0,1 < k_2 < 1,0$.

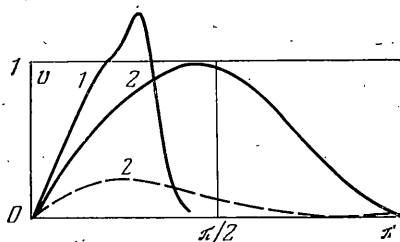
При расчете самих датчиков и различных включений, взаимодействующих с волнами в безграничной среде, иногда следуют упрощенной схеме [5]. Заранее предполагается, что при мягком слое обратным влиянием датчика на среду можно пренебречь, и считается, что датчик находится в поле скоростей, которое вырабатывается при дифракции волны на соответствующей полости, свободной от напряжений. В этой схеме не учитывается различие между условиями прилипания и проскальзывания на границе среда-слой. Она приемлема при условии прилипания для очень мягких слоев, при этом в ней используются завышенные значения скоростей u и v на внешней границе слоя. Последнее приводит к тому, что в пределах своей применимости такая схема дает результаты с некоторым «запасом» по прочности.

Результаты расчетов задачи в точной постановке показывают, что при условии проскальзывания, даже при очень мягком слое, имеется сильное различие в касательных составляющих скоростей точек слоя и среды на границе контакта. Зависимости скорости v от угла θ для различных моментов времени t при $l_2=10,0, l_3=2,0, k_2=0,1$ показаны на фиг. 6. Сплошные кривые 1, 2, 3 относятся к точкам среды на границе раздела, а штриховые — к точкам слоя для времени $t=1,03; 2,07; 4,14$. Видно, что точки слоя имеют в данные моменты времени скорость, сильно отличающуюся от скоростей точек среды.

При $k_2=0,001$ различие еще более сильное. Аналогичные зависимости показаны на фиг. 7. Кривые 1 соответствуют времени $t=1,03$, а кривые 2 — $t=6,28$. При $t=1,03$ скорость v для точек слоя практически равна нулю.



Фиг. 6



Фиг. 7

Напряжения σ и s в слое при условии проскальзывания значительно больше, чем при условии прилипания. Так, при $l_3=0,5$, $l_2=1,0$, $k_2=1,0$ максимальное различие в значениях σ составляют 30% по отношению к значению σ при условии прилипания. Это имеет место при $t \approx 2$. Для величин s различие составляет 50% при $t \approx 3$. При $l_3=0,5$, $l_2=2,0$, $k_2=0,1$ максимальные значения напряжений при прилипании $\sigma = -0,32$, $s = -0,13$, а при проскальзывании $\sigma = -0,91$, $s = -0,45$.

Таким образом, неучет возможного проскальзывания может привести к неоправданно заниженным значениям σ и s в слое. При $k_2=0,001$ (мягкий слой) величины σ и s принимают значения меньше чем 0,01 и мало отличаются. В этом случае применение упрощенной схемы становится оправданным.

Авторы благодарны Н. В. Зволинскому за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковшов А. Н. О дифракции нестационарной упругой волны на цилиндрической полости. — Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4, с. 115–121.
2. Ковшов А. Н. Дифракция упругой волны на сферической полости. — Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 2, с. 62–70.
3. Рыков Г. В., Скобеев А. М. Измерение напряжений в грунтах при кратковременных нагрузках. М.: Наука, 1978. 168 с.
4. Баранов Д. С. Выбор основных параметров грунтовых месдоз из условий наименьшего искажения измеряемых давлений. — Тр. центр. н.-и. ин-та строит. конструкций, 1962, вып. 14, с. 40–84.
5. Пригькин Л. Г. Приближенный учет дифракции сейсмической волны на круговых выработках и включениях. — Строит. механ. и расчет сооружений, 1981, № 6, с. 65–68.

Ленинград, Москва

Поступила в редакцию
5.XI.1982