

УДК 539.3.

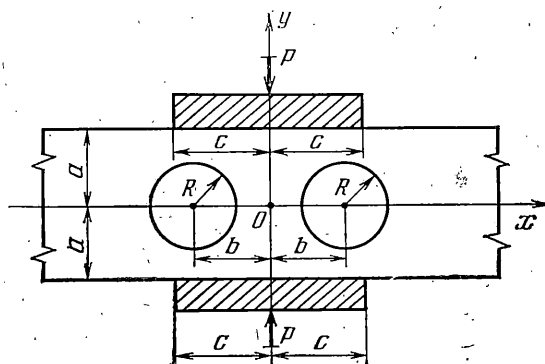
ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛОСЫ С ДВУМЯ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

МИРОНЕНКО Н. И.

На основании результатов [1] задача сводится традиционным способом к парному интегральному уравнению. Решение последнего получено в виде рядов Неймана по функциям Бесселя первого рода в случае действия на полосу штампов с плоскими или круговыми основаниями. При этом касательные напряжения между штампами и полосой полагаются равными нулю.

Действие плоских штампов на полосу с одним круговым отверстием изучалось в [2].

1. Постановка задачи. Предположим, что штампы имеют основания произвольного симметричного относительно оси y очертания (см. фигуру,



на которой указаны соответствующие размеры и обозначения). Выпишем граничные условия задачи

$$\begin{aligned} v &= \mp f(x) & (|x| < c, y = \pm a) \\ Y_y &= 0 & (|x| > c, y = \pm a) \\ X_y &= 0 & (|x| < \infty, y = \pm a) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь v — вертикальное перемещение под штампами, Y_y , X_y — нормальное и касательное напряжения в полосе.

Через $Y_{ys}(x)$ обозначим давление под штампами, которое временно будем считать заданным. Тогда, используя результаты [1], решение задачи с заданными по краям полосы напряжениями можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi_1(z) + \varphi_2(z) - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^* \Gamma_k(z) \\ \psi(z) &= \psi_1(z) + \psi_2(z) - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^{(1)} \Gamma_k(z) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\Gamma_k(z) = [R/(z-b)]^{k+1} + (-1)^k [R/(z+b)]^{k+1}$$

$$\beta_0^{(1)} = \beta_0^*, \quad \beta_k^{(1)} = \beta_k^* + k\alpha_{k-1}^*/\varepsilon_3 + (k-1)\alpha_{k-2}^* \quad (k \geq 1)$$

$$\left. \begin{matrix} \Phi_1(z) \\ \Psi_1(z) \end{matrix} \right\} = \mp i \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} H_1(\mu) \\ \left(1 - i\mu \frac{z}{a}\right) H_1(\mu) + 2H_2(\mu) \end{matrix} \right\} \exp\left(-i\mu \frac{z}{a}\right) \frac{d\mu}{\mu} \quad (1.3)$$

$$H_1(\mu) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} T_s(\mu) Y_{ys}^*(\mu), \quad H_2(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [T_s(\mu) + \mu T_c(\mu)] Y_{ys}^*(\mu) \quad (1.4)$$

$$T_s(\mu) = \text{sh } \mu/S(\mu), \quad T_c(\mu) = \text{ch } \mu/S(\mu), \quad S(\mu) = 2\mu + \text{sh } 2\mu \quad (\mu = \lambda a)$$

$$Y_{ys}^*(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y_{ys}(x) \exp(i\lambda x) dx$$

Потенциалы $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ также определяются формулами (1.3), но с заменой в последних $H_1(\mu)$ и $H_2(\mu)$ на $K_1(\mu)$ и $K_2(\mu)$:

$$K_1(\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j(\mu) \{\alpha_j^* \Omega_j^*(\mu) - \beta_j^*\} \quad (1.5)$$

$$K_2(\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j(\mu) \{\alpha_j^* [2\mu^2 - b(\mu) a_j(\mu)] + \beta_j^* b(\mu)\}$$

$$A_j(\mu) = \frac{\varepsilon_1^{j+1} \mu^{j+1}}{j!} \frac{\cos \theta_j}{S(\mu)}, \quad \theta_j = j \frac{\pi}{2} + \varepsilon_2 \mu, \quad \varepsilon_1 = \frac{R}{a}, \quad \varepsilon_2 = \frac{b}{a}$$

$$\Omega_j^*(\mu) = a_j(\mu) + \gamma(\mu), \quad a_j(\mu) = j + \frac{\varepsilon_1^2 \mu^2}{j+2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{R}{b}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a}$$

$$\gamma(\mu) = 1 - 2\mu + \exp(-2\mu), \quad 2b(\mu) = 2 - \gamma(\mu) \quad \mu > 0$$

Функции $H_j(\mu)$, $K_j(\mu)$ ($j=1, 2$) — четные, действительные. Поэтому выражения (1.5) даны только для $\mu > 0$.

Неизвестные α_j^* , β_j^* определяются следующей бесконечной системой линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} x_j = s_k \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (1.6)$$

$$s_k = -2\delta_{-1/2}(k+1) \quad (k=1, 3, 5, \dots), \quad s_k = -2\tau_{1/2} \delta_{1/2k} \quad (k=2, 4, 6, \dots) \quad (1.7)$$

$$x_{2n+1} = \alpha_n^*, \quad x_{2n+2} = \beta_n^*; \quad \tau_1 = 1/2, \quad \tau_n = 1 \quad (n=2, 3, \dots)$$

Матрица $\{a_{kj}\}$ имеет вид (δ_{mn} — символ Кронекера):

$$a_{2m+1, 2n+1} = \delta_{mn} - \int_0^{\infty} T_{mn}(\mu) \{\Omega_m^*(\mu) \Omega_n^*(\mu) + 2 \exp(-2\mu) S(\mu)\} d\mu +$$

$$+ (n+1) E_{mn} \left(\frac{\varepsilon_3^2}{2} C_{r+s}^{m+2} - C_{r+1}^{m+1} \right) \quad (m, n=0, 1, 2, \dots) \quad (1.8)$$

$$a_{2m+2, 2n+2} = \tau_{n+1} \delta_{mn} - \int_0^{\infty} T_{mn}(\mu) d\mu, \quad a_{2m+1, 2n+2} = \int_0^{\infty} T_{mn}(\mu) \Omega_m^*(\mu) d\mu + Z_{mn}$$

$$a_{2m+2, 2n+1} = \int_0^{\infty} T_{mn}(\mu) \Omega_n^*(\mu) d\mu + Z_{mn}, \quad T_{mn}(\mu) = \frac{2\varepsilon_1^{r+1}}{(n+1)! n!} \frac{\mu^r}{S(\mu)} \cos \theta_m \cos \theta_n$$

$$E_{mn} = (-1)^r \left(\frac{\varepsilon_3}{2} \right)^{r+1}, \quad Z_{mn} = E_{mn} C_r^{m+1}, \quad C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!} \quad (r=m+n+1)$$

Элементы матрицы $\{a_{hj}\}$ связаны соотношением

$$a_{\alpha, \beta} / a_{\beta, \alpha} = (n+1) / (m+1) \quad (\alpha=2m+1, 2m+2; \beta=2n+1, 2n+2)$$

Выпишем выражения для правых частей системы (1.6)

$$-2\delta_{-k} = \frac{k+1}{\varepsilon_3} \delta_{k+1,1}^{(1)} + (k+2) \delta_{k+2,1}^{(1)} + \delta_{k,1}^{(2)}, \quad 2\tau_k \delta_k = -\delta_{k,1}^{(1)} \quad (1.9)$$

$$\delta_{k,1}^{(1)} = (-1)^k v_k \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{k-1} H_1(\mu) \exp(-i\varepsilon_2 \mu) d\mu, \quad v_k = \frac{i^{k-1} \varepsilon_1^k}{k!}$$

$$\delta_{k,1}^{(2)} = v_k \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{k-1} \{ (k+1+i\varepsilon_2 \mu) H_1(\mu) + 2H_2(\mu) \} \exp(i\varepsilon_2 \mu) d\mu$$

Отметим, что давление над штампом $Y_{ys}(x)$ неизвестно, поэтому неизвестны $H_1(\mu)$, $H_2(\mu)$, а следовательно, неизвестна и правая часть системы (1.6). Для ее определения необходимо воспользоваться граничными условиями (1.1), которые перепишем используя потенциалы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

Первое из условий (1.1) запишем так:

$$\kappa \varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 2G(u \mp if) \quad (t=x \pm ia, |x| < c) \quad (1.10)$$

где G , κ — упругие постоянные, u — перемещение в направлении оси x .

Второе и третье условия в (1.1) для $|x| > c$ представим в следующем виде:

$$\varphi'(t) + \overline{\varphi'(t)} + t \overline{\varphi''(t)} + \overline{\psi'(t)} = 0 \quad (t=x \pm ia, |x| > c) \quad (1.11)$$

Подставляя теперь (1.2) в (1.10) и выделяя мнимую часть (которая задана на $|x| < c$), получим интегральное уравнение

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\xi \mu)}{\mu} \{F_1(\mu) + F_2(\mu)\} d\mu = -\frac{G}{\kappa+1} f(x) \quad (\xi < \varepsilon) \quad (1.12)$$

$$F_1(\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j(\mu) [\alpha_j^* h_j(\mu) + \beta_j^* \operatorname{sh} \mu], \quad F_2(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} L(\mu) Y_{ys}^*(\mu)$$

$$h_j(\mu) = 2\mu \operatorname{ch} \mu - a_j(\mu) \operatorname{sh} \mu, \quad L(\mu) = \frac{\operatorname{sh}^2 \mu}{S(\mu)}, \quad \xi + i\eta = \frac{x+iy}{a}$$

Дифференцируя (1.12) по x , запишем его в другой, полезной в дальнейшем форме

$$\int_0^{\infty} \sin(\xi \mu) \{F_1(\mu) + F_2(\mu)\} d\mu = \frac{aG}{\kappa+1} f'(x) \quad (\xi < \varepsilon) \quad (1.13)$$

После подстановки (1.2) в (1.14) и выделения действительной части (мнимая в силу третьего граничного условия (1.1) тождественно равна нулю) приходим к такому интегральному уравнению относительно $Y_{ys}^*(\mu)$:

$$\int_0^{\infty} Y_{ys}^*(\mu) \cos(\xi \mu) d\mu = 0 \quad (\xi > \varepsilon) \quad (1.14)$$

Два интегральных уравнения (1.13), (1.14) и образуют искомое парное интегральное уравнение. После определения из этого уравнения $Y_{ys}^*(\mu)$ задачу можно считать решенной. Дальнейшие исследования проведем для штампов с плоскими и круговыми основаниями.

2. Штамп с плоским основанием. В этом случае $f(x)=f_0=\text{const}$, $f'(x)=0$ при $|x|<c$ ($|\xi|<\varepsilon$) и парное интегральное уравнение (1.13), (1.14) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sin(\xi\mu) \{F_1(\mu) + F_2(\mu)\} d\mu &= 0 \quad (\xi < \varepsilon) \\ \int_0^\infty Y_{ys}^{p*}(\mu) \cos(\xi\mu) d\mu &= 0 \quad (\xi > \varepsilon) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь вместо Y_{ys} , Y_{ys}^* будем писать Y_{ys}^p , Y_{ys}^{p*} соответственно.

Взяв $Y_{ys}^{p*}(\mu) \equiv Y_{ys}^{p*}(\mu, \varepsilon)$ в виде ряда Неймана по функциям Бесселя первого рода [3]:

$$Y_{ys}^{p*}(\mu, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h v_h^* J_{2h}(\varepsilon\mu) \quad (2.2)$$

удовлетворим второму уравнению (2.1) тождественно. Чтобы удовлетворить первому уравнению (2.1), разложим сначала $\sin(\xi\mu)$ в ряд по многочленам Чебышева второго рода $U_h(x)$:

$$\sin(\xi\mu) = \frac{4}{\varepsilon\mu} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} m J_{2m}(\varepsilon\mu) U_{2m-1}\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) \quad (\xi < \varepsilon) \quad (2.3)$$

Именно это разложение позволяет получить систему с матрицей $\{b_{mk}^{(1)}\}$ (см. (2.5)), коэффициенты которой после выделения главной части (интегрируемой в конечном виде) представляются интегралами, подынтегральные выражения в которых очень быстро убывают, что немаловажно при реализации задачи на ЭВМ. Подставляя (2.2), (2.3) в первое уравнение (2.1) и приравнявая нулю выражения при $U_{2m-1}(\xi/\varepsilon)$, получим систему уравнений (без одного) для определения $x_j(\alpha_j^*, \beta_j^*)$ и v_j^* :

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{mj}^{(1)} x_j + \sum_{h=0}^{\infty} b_{mh}^{(1)} v_h^* = 0 \quad (2.4)$$

$$\left. \begin{matrix} a_{m,2n+1}^{(1)} \\ a_{m,2n+2}^{(1)} \end{matrix} \right\} = \int_0^\infty A_n(\mu) \left\{ \begin{matrix} h_n(\mu) \\ \text{sh } \mu \end{matrix} \right\} J_{2m}(\varepsilon\mu) \frac{d\mu}{\mu} \quad (n=0,1,2,\dots), \quad (2.5)$$

$$b_{mh}^{(1)} = \frac{(-1)^h}{2\pi} \int_0^\infty L(\mu) J_{2m}(\varepsilon\mu) J_{2h}(\varepsilon\mu) \frac{d\mu}{\mu}, \quad (m=1,2,3,\dots)$$

Применяя к (2.2) обратное преобразование Фурье, находим [4] давление под штампом

$$Y_{ys}^p(x, c) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{c^2 - x^2}} \sum_{h=0}^{\infty} v_h^* T_{2h}\left(\frac{x}{c}\right) & (|x| < c) \\ 0 & (|x| > c) \end{cases} \quad (2.6)$$

где $T_n(x)$ — многочлены Чебышева первого рода. Используя теперь условие равновесия штампа

$$\int_{-c}^c Y_{ys}^p(x, c) dx = -P^*$$

(P^* — сила, прижимающая штамп) и (2.6), получим недостающее уравнение

$$v_0^* = -P^* \quad (2.7)$$

Введя обозначение $g_m^{(1)} = b_{m,0}^{(1)}$, перепишем систему (2.4) в окончательном виде

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{mj}^{(1)} x_j + \sum_{k=1}^{\infty} b_{mk}^{(1)} v_k^* = P^* g_m^{(1)} \quad (2.8)$$

Из (2.5) следует, что матрица $\{b_{mk}^{(1)}\}$ обладает следующей «симметрией»: $b_{mk}^{(1)} = (-1)^{k+m} b_{km}^{(1)}$. Теперь необходимо определить правую часть в (1.6) и тем самым построить вторую систему уравнений для определения x_j и v_k^* . Используя цепочку выражений (2.2), (1.4), (1.9) и (1.7), получим

$$s_k = \frac{1}{k\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{nk}^{(1)} v_n^* \quad (2.9)$$

Вводя далее обозначения $g_k = -a_{0,k}^{(1)} / (k\pi)$, $b_{kn} = (-1)^{n+1} a_{nk}^{(1)} / (k\pi)$ ($k=1, 2, 3, \dots$) и подставляя (2.9) в (1.6) с учетом (2.7), приходим ко второй системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j + \sum_{n=1}^{\infty} b_{kn} v_n^* = P^* g_k \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (2.10)$$

Системы (2.8), (2.10) и являются искомыми. Решать их необходимо совместно методом последовательных приближений, задавая значения x_j или v_n^* . Здесь необходимо отметить следующее. Системы с матрицами $\{a_{kj}\}$ и $\{b_{mk}^{(1)}\}$ являются по меньшей мере квазирегулярными, системы же с матрицами $\{a_{mj}^{(1)}\}$ и $\{b_{kn}\}$ могут оказаться плохо обусловленными. Отсюда следует строгий порядок решения систем. Если исходить из системы (2.8), то необходимо задать j_1 значений x_j ($j=1, 2, 3, \dots, j_1$) и определить из (2.8) k_1 значений v_k^* ($k=1, 2, 3, \dots, k_1$); поскольку система с матрицей $\{b_{mk}^{(1)}\}$ как минимум квазирегулярна.

Далее необходимо подставить найденные значения v_k^* в (2.10), определить x_j (система с матрицей $\{a_{kj}\}$ также по меньшей мере квазирегулярна) и продолжать процесс до достижения требуемой точности.

Если же исходить из системы (2.10), то необходимо задать k_1 значений v_k^* ($k=1, 2, 3, \dots, k_1$) и повторить процесс, аналогичный описанному выше.

После определения (из упомянутых систем) α_j^* , β_j^* и v_k^* можно найти связь между силой P^* и перемещением штампа f_0 . Для этого необходимо найденные значения α_j^* , β_j^* , v_k^* подставить в (1.12), имея в виду (2.2). И поскольку необходимо, чтобы (1.12) выполнялось при этом тождественно, т. е. при любом $\xi = x/a$ ($|\xi| < \varepsilon$), то разложим $\cos(\xi\mu)$ в ряд по многочленам $T_n(\xi/\varepsilon)$ [5], выразим правую часть (1.12) через эти же многочлены и приравняем выражения при одинаковых многочленах. Тем са-

мым будет получено бесконечное множество уравнений для определения связи между P^* и f_0 . Анализ показывает, что первое из этих уравнений и будет необходимым, а остальные на основании (2.4) удовлетворяются тождественно.

3. Штамп с круговым основанием. Для малых деформаций (которые в линейной теории упругости и предполагаются) с достаточной точностью в этом случае можно положить $f(x) = f_{\max} - 1/2 x^2/R_0$, $f'(x) = -x/R_0 = -\xi/\gamma_0$, $\gamma_0 = R_0/a$, $|x| \leq c$ ($|\xi| \leq \varepsilon$).

Здесь предполагается, что радиус основания штампа R_0 значительно больше a .

Парное интегральное уравнение (1.13), (1.14) теперь имеет вид

$$\int_0^\infty \sin(\xi\mu) \{F_1(\mu) + F_2(\mu)\} d\mu = -\frac{G}{(\kappa+1)} \frac{a}{\gamma_0} \xi \quad (0 \leq \xi \leq \varepsilon) \quad (3.1)$$

$$\int_0^\infty Y_{ys}^{h*}(\mu) \cos(\xi\mu) d\mu = 0 \quad (\xi > \varepsilon)$$

Вместо Y_{ys} , Y_{ys}^* будем писать Y_{ys}^h , Y_{ys}^{h*} соответственно. Решение $Y_{ys}^{h*}(\mu) = Y_{ys}^{h*}(\mu, \varepsilon)$ полученного уравнения (3.1) будем искать в следующем виде:

$$Y_{ys}^{h*}(\mu, \varepsilon) = \frac{(\varepsilon\mu)^{-1}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k (2k+1) v_k^{**} J_{2k+1}(\varepsilon\mu) \quad (3.2)$$

Видно [6], что второе уравнение (3.1) при этом удовлетворяется тождественно. Для удовлетворения первого уравнения (3.1) разложим сначала $\sin(\xi\mu)$ в ряд по многочленам Чебышева первого рода [5]:

$$\sin(\xi\mu) = 2 \sum_{m=0}^\infty (-1)^m J_{2m+1}(\varepsilon\mu) T_{2m+1}\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) \quad (\xi < \varepsilon)$$

Подставляя это разложение и (3.2) в первое уравнение (3.1), выражая правую часть последнего через многочлены Чебышева первого рода и приравнявая справа и слева выражения при одинаковых многочленах, получим первую систему уравнений для неизвестных $x_j(\alpha_j^*, \beta_j^*)$, v_j^{**} :

$$\sum_{j=1}^\infty a_{mj}^* x_j + \sum_{k=0}^\infty b_{mk}^* v_k^{**} = -\delta_{0m} \frac{G}{(\kappa+1)} \frac{c}{\gamma_0} \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{matrix} a_{m, 2n+1}^* \\ a_{m, 2n+2}^* \end{matrix} \right\} = 2 \int_0^\infty A_n(\mu) \left\{ \begin{matrix} h_n(\mu) \\ \text{sh } \mu \end{matrix} \right\} J_{2m+1}(\varepsilon\mu) d\mu, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

$$b_{mk}^* = \frac{(-1)^k}{\pi \varepsilon} (2k+1) \int_0^\infty L(\mu) J_{2m+1}(\varepsilon\mu) J_{2k+1}(\varepsilon\mu) \frac{d\mu}{\mu}, \quad b_{mk}^* = (-1)^{k+m} \frac{2k+1}{2m+1} b_{km}^*$$

Обратное преобразование Фурье, примененное к (3.2), позволяет найти [6, 3] выражение для давления под штампом

$$Y_{ys}^h(x, c) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{c^2} \sum_{k=0}^\infty v_k^{**} U_{2k}\left(\frac{x}{c}\right) & (|x| \leq c) \\ 0 & (|x| > c) \end{cases} \quad (3.5)$$

После чего из условия равновесия штампа находим

$$v_0^{**} = -2P^{**} \quad (3.6)$$

Вторую систему получим из (1.6) после определения s_k . Для этого подставим (3.2) в (1.4) и используем (1.9), (1.7). Это приводит к следующему соотношению:

$$s_k = - \sum_{n=0}^{\infty} b_{kn}^{**} v_n^{**}$$

$$\left. \begin{matrix} b_{2k-1, n}^{**} \\ b_{2k, n}^{**} \end{matrix} \right\} = (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{\pi \varepsilon} \frac{\varepsilon_1^k}{k!} \int_0^{\infty} \frac{\mu^{k-2}}{S(\mu)} \left\{ \frac{h_{k-1}(\mu)}{\operatorname{sh} \mu} \right\} J_{2n+1}(\varepsilon \mu) \sin \theta_k d\mu$$

После подстановки полученного результата в (1.6) приходим ко второй системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j + \sum_{n=0}^{\infty} b_{kn}^{**} v_n^{**} = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (3.7)$$

В коэффициенты систем (3.3), (3.7) входит параметр $\varepsilon = c/a$, но в данной задаче, в отличие от случая плоского штампа, он неизвестен, так как зависит от глубины погружения штампа $f_{\max}$, которая по условию задачи считается заданной. Следовательно, в процессе решения по заданному $f(x)$ необходимо определить ε и P^{**} . Если же задавать значение ε (как этого требует полученное решение), то определению подлежат $f_{\max}$ и P^{**} .

Системы (3.3), (3.7) необходимо рассматривать совместно, решая методом последовательных приближений. Причем нужно иметь в виду, что системы с матрицами $\{a_{kj}\}$ и $\{b_{kn}^{**}\}$ являются как минимум квазирегулярными, а две другие (с матрицами $\{a_{mj}^{*}\}$ и $\{b_{kn}^{**}\}$) могут быть даже плохо обусловленными. Поэтому, если сначала рассматривать систему (3.3), то необходимо задать j_1 значений x_j и определить k_1 значений v_k^{**} ; затем подставить найденные v_k^{**} в (3.7) и определить x_j , последние подставить в (3.3) и продолжить процесс до достижения требуемой точности. Если же начинать с (3.7), то необходимо задать n_1 значений v_n^{**} и продолжить процесс аналогично описанному выше.

Решение систем (3.3) и (3.7) для v_k^{**} запишем в таком виде (ξ_k — числовые коэффициенты)

$$v_k^{**} = -\xi_k \frac{G}{\kappa+1} \frac{c}{\gamma_0} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (3.8)$$

Для определения P^{**} и $f_{\max}$ по заданному ε необходимо иметь два уравнения. Первое из них получим из (3.8) (при $k=0$) и (3.6) путем приравнивания двух различных выражений для v_0^{**} :

$$2\gamma_0 P^{**}/c = \xi_0 G/(\kappa+1) \quad (3.9)$$

Используя (3.2) и выражение для $f(x)$ в (1.12) и повторяя процедуру, описанную в самом конце п. 2, получим бесконечное множество уравнений для определения P^{**} и $f_{\max}$.

Первое из них совместно с (3.9) позволяет найти упомянутую связь между P^{**} , $f_{\max}$ и ε , остальные же удовлетворяются тождественно в силу (3.3).

Изложенное выше решение справедливо и для штампов, основания которых описываются формулой (с точностью до знака и жесткого смещения) $f(x) = \sum a_k (x/c)^{2k}$ ($k=0, 1, 2, \dots$), где a_0 — неизвестно и определяется в процессе решения; с боков штампы ограничены прямыми $x = \pm c$. Если сила P^* такова, что углы штампа $x = \pm c$ прижимаются к полосе, то давление под штампом определяется формулой (2.6) (v_k^* ,

разумеется, теперь другие). Если же сила P^{**} такова, что ширина площадки контакта $2c_1 < 2c$, то давление под штампом определяется формулой (3.5). Все необходимые выкладки в обоих случаях в главном совпадают с соответствующими выкладками, приведенными выше.

Решение, приведенное в п. 2, является в то же время решением (с точностью до знака) следующей задачи для плоскости с круговыми отверстиями и полубесконечными разрезами. Отверстия радиуса $R < a$ имеют центры в точках $(b, \pm 2ka)$ и $(-b, \pm 2ka)$, $k=0, 1, 2, 3, \dots$. Полубесконечные разрезы начинаются в точках $(c, \pm ta)$ и $(-c, \pm ta)$, $t=1, 3, 5, \dots$ и уходят соответственно вправо и влево параллельно оси x . Плоскость растягивается на бесконечности сосредоточенными силами P^* , действующими на оси y .

Напряжение Y_y в перемычке $|x| < c$, $y=a$ в данной задаче определяется с точностью до знака формулой (2.6), из которой получаем следующее значение коэффициента интенсивности:

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi c}} \sum_{k=0}^{\infty} v_k^* = \frac{P^*}{\sqrt{\pi c}} \sum_{k=0}^{\infty} v_k^{(0)}$$

где $v_k^{(0)}$ — безразмерные числовые коэффициенты; очевидно, разрезы (трещины) в рассматриваемом случае являются неравновесными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мироненко Н. И. Напряженное состояние кусочно-однородной плоскости, содержащей полосу с двумя одинаковыми круговыми отверстиями. — Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 6, с. 63–71.
2. Гулик Б. И., Космодамианский А. С. Контактная задача для полосы с круговым отверстием. — Прикл. механика, 1974, т. 10, вып. 8, с. 43–49.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1, 2. М.: Наука, 1973, 1974. 295 с.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971, 1108 с.
5. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 415 с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.

Алма-Ата

Поступила в редакцию
22.III.1982