МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1983

УДК 539.3.01

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНЫХ СПЛОШНЫХ ТЕЛ И ТЕЛ С РАЗРЕЗАМИ

АЛЕКСАНДРОВ А. Я., ЗИНОВЬЕВ Б. М., КАРМАНОВА Т. Ф.

Численный метод, первоначально предложенный для упругих изотропных тел [1, 2], был затем распространен на тела из таких анизотропных материалов [3], для которых известно фундаментальное решение о действии сосредоточенной силы внутри упругой плоскости или пространства. В публикуемой работе этот метод развивается применительно к плоским задачам для тел из ортотропных материалов — сплошных и содержащих разрезы.

Действие сосредоточенной силы внутри трансверсально-изотропного упругого пространства рассмотрено в [4], а внутри ортотропной плоскости – в [5]. В [4] даны в явном виде выражения напряжений и смещений [1], в [5] эти выражения записаны в комплексной форме. Аналогичные, но более удобные, нежели в [5], выражения напряжений и смещений можно получить интегрированием выражений [4] вдоль одной из осей координат [2], лежащей в плоской изотропии от $-\infty$ до $+\infty$.

1. Напряжения и смещения при действии распределенных сил q_1 и q_2, изменяющихся по линейному закону (фиг. 1), получены интегрированием решения для сосредоточенной силы [3]. При переходе через нагруженный отрезок S напряжения изменяются скачкообразно. Разность предельных напряжений $\Delta\sigma=\sigma^+-\sigma^-$, вычисленных при подходе к отрезку S со стороны положительных (σ^+) и отрицательных (σ^-) ординат нормали к S, можно найти предельным переходом, используя полученные формулы напряжений при действии распределенных сил q; при этом скачки напряжений будут выражаться довольно громоздко через модули упругости материала. Здесь получим скачки напряжений иным путем, минуя интегрирование и последующий предельный переход, и выразим эти скачки в более компактной форме через коэффициенты деформации. Индексы у компонент напряжений σ_{ij}^k и распределенных сил q_k будем относить к осям Y_1, Y_2; нормальные к плоскости пластинки напряжения обозначим через σ_{33}^k.

Величина скачка напряжений не зависит от длины нагруженного участка S. Увеличим длину этого участка до бесконечности в обе стороны, полагая плотность распределенных на нем сил q постоянной. Плоскость окажется разделенной на две полуплоскости, в каждой из которых все компоненты напряженного состояния будут постоянны. Вырежем из плоскости прямоугольную пластинку с боковыми гранями, перпендикуляр-

[1] В [4] замечены опечатки: в формуле (18) правую часть выражения для B_i следует домножить на ν_i; в формуле для напряжений σ_{13} от силы, параллельной плоскости изотропии, во втором слагаемом у сомножителя, взятого в круглые скобки, знак дроби $2x^2/(R_i^2R_i^{*2})$ следует изменить на обратный.

[2] См. *Зиновьев Б. М., Карманова Т. Ф.* Численное решение плоских задач теории упругости для ортотропных тел. Новосибирск, 1981.— 24 с. Деп. в ВИНИТИ 4.06.81; № 2722-81.

[3] *Зиновьев Б. М., Карманова Т. Ф.* См. указ. выше публ.: в формуле для C_{23} знак минус в скобках следует заменить на плюс, в выражении для Φ_6 в третьем слагаемом X_0 и в формуле Φ_7 r_{ij} следует возвести в квадрат.

ными к нагруженному участку S и содержащую часть этого участка. Из условия равновесия вырезанной пластинки получим

$$\Delta\sigma_{11}{}^1=-q_1,\quad \Delta\sigma_{12}{}^1=\Delta\sigma_{11}{}^2=0,\quad \Delta\sigma_{12}{}^2=-q_2 \tag{1.1}$$

Скачки нормальных напряжений $\Delta\sigma_{22}$ и $\Delta\sigma_{33}$ найдем приравняв нулю скачки линейных деформаций ε_{22} и ε_{33}: $\Delta\varepsilon_{22}=0$, $\Delta\varepsilon_{33}=0$, где ε_{33} — деформация из плоскости пластины. В результате для плоской деформации получим

$$\Delta\sigma_{22}{}^1=q_1\frac{\gamma_{21}}{\gamma},\quad \Delta\sigma_{22}{}^2=q_2\frac{\gamma_{22}}{\gamma},\quad \Delta\sigma_{33}{}^1=q_1\frac{\gamma_{31}}{\gamma},\quad \Delta\sigma_{33}{}^2=q_2\frac{\gamma_{32}}{\gamma} \tag{1.2}$$

$$\gamma=a_{22}'-(a_{23}')^2/a_{33},\quad \gamma_{21}=a_{12}'-a_{13}'a_{23}'/a_{33}$$

$$\gamma_{22}=a_{24}'-a_{34}'a_{23}'/a_{33},\quad \gamma_{31}=(a_{22}'a_{13}'-a_{12}'a_{23}')/a_{33}$$

$$\gamma_{32}=(a_{22}'a_{34}'-a_{24}'a_{23}')/a_{33}$$

В случае плоского напряженного состояния

$$\Delta\sigma_{33}=0,\quad \Delta\sigma_{22}{}^1=q_1a_{12}'/a_{22}',\quad \Delta\sigma_{22}{}^2=q_2a_{24}'/a_{22}' \tag{1.3}$$

Входящие в (1.2) и (1.3) величины a_{ij}' есть коэффициенты деформаций в системе координат Y_1Y_2, повернутой по часовой стрелке относительно главных осей упругости X_1, X_2. Они вычисляются по формулам перехода через основные упругие постоянные $a_{11}=1/E'$, $a_{12}=a_{13}=-\nu'/E'$, $a_{22}=a_{33}=1/E$, $a_{23}=-\nu/E$, $a_{44}=1/G$, где E' и E — модули упругости в направлении осей X_1 и X_2, ν — коэффициент Пуассона по толщине пластинки при растяжении — сжатии вдоль оси X_2, ν' — коэффициент Пуассона в направлении оси X_2 при растяжении — сжатии вдоль оси X_1, G — модуль сдвига.

Отметим, что здесь в отличие от изотропного материала касательные силы q_2 вызывают скачки в нормальных напряжениях $\sigma_{22}{}^2$ и $\sigma_{33}{}^2$.

Перемещения изменяются непрерывно при переходе через нагруженный участок. С учетом формул скачков напряжения в точках произвольного нагружения отрезка S, в том числе гладкого криволинейного, исключая его концевые и особые точки, запишутся так:

$$\sigma_{ij}{}^k(\xi)=\pm\frac{1}{2}\Delta\sigma_{ij}{}^k(\xi)+\int\limits_{s} q_k(\zeta)T_{ij}{}^k(\xi,\zeta)\,dS_\zeta$$

где $\sigma_{ij}{}^k(\xi)$ — напряжение в точке $\xi\in S$, $T_{ij}{}^k(\xi,\zeta)$ — напряжение в точке ξ при действии силы $P_k=1$, сосредоточенной в точке $\zeta\in S$.

Полученные формулы скачков напряжений необходимы при исследовании свойств распределенных диполей.

2. Рассмотрим расчет тела с разрезами. Здесь используем специальные силовые возмущения — диполи. Нормальным диполем назовем две равные и разнонаправленные сосредоточенные силы P_k и $-P_k$ с общей линией действия, причем $\lim(P_ka_k)=M_{kk}<\infty$ при $P_k\to\infty$, $a_k\to0$ ($k=1, 2$), где a_k — расстояние между точками приложения сил (плечо диполя). Моментным диполем назовем пару параллельных сил P_k и $-P_k$, лежащих на общей нормали к линиям их действия, причем $\lim(P_ka_l)=M_{kl}<\infty$ при $P_k\to\infty$, $a_l\to0$. Нормальный диполь считаем положительным, если его силы стремятся разойтись; положительный моментный диполь стремится увеличить угол между осями координат, соответствующих индексам k и l.

При рассмотрении непрерывно распределенных по криволинейному отрезку S диполей $\mu_{kl}=\lim(q_ka_l)<\infty$ при $q_k\to\infty$, $a_l\to0$ (q_k — плотность распределенных сил) будем считать, что плечо диполя a_l всегда перпендикулярно к S, поэтому в дальнейшем второй индекс в обозначении плотности распределенных диполей μ_{kl} уберем. Пусть диполи μ_k непрерывно распределены по кривой S, заданной своим уравнением в декартовой системе координат X_1OX_2. Введем на S подвижную систему координат $Y_1O_1Y_2$, где ось Y_1 — нормаль к S, ось Y_2 — касательная. Напряжения в точке наблюдения m, не лежащей на S, можно записать так (напряжения при действии диполей пометим штрихом):

$$\sigma'_{ijk}(m) = -\int_S \mu_k(\zeta)\,\frac{\partial T_{ij}^k(m,\zeta)}{\partial n}\,dS_\zeta \quad (i,j,k=1,2) \tag{2.1}$$

где индекс k относится к осям $Y_1O_1Y_2$ с началом в точке истока ζ. Дифференцирование под интегралом по нормали к S производится по координатам точки m. Аналогичным образом можно вычислить и упругие смещения, вызываемые действием распределенных диполей.

Из формулы (2.1) после преобразований получим выражение для разности предельных напряжений $\Delta\sigma'(\xi)=\sigma'(\xi^+)-\sigma'(\xi^-)$, вычисленных при подходе к точке ξ на S со стороны положительных и отрицательных ординат нормали O_1Y_1 (индексы i, j, k уберем, вводить их будем по мере необходимости)

$$\Delta\sigma'(\xi) = -\Delta\sigma[\mu(\xi)]/r - \Delta\partial\sigma[\mu(\xi)]/\partial Y_1 \tag{2.2}$$

где r — радиус кривизны кривой S в точке ξ.

В левой части формулы (2.2) стоит скачок предельных напряжений, вызываемых действием распределенных диполей плотности $\mu(\xi)$, в правой части формулы фигурирует скачок напряжений $\Delta\sigma[\mu(\xi)]$, вызванных действием распределенных сил такой же плотности, что и диполи. Второе слагаемое в правой части есть разность нормальных производных от предельных напряжений. Нормальная производная, как будет показано ниже, заменяется производной вдоль дуги нагруженного отрезка S.

Первое слагаемое в (2.2) выражается полученными в п. 1 формулами (1.1), (1.2) или (1.3).

Вычислим второе слагаемое формулы (2.2). Здесь покажем вычисления для одной какой-либо компоненты, например σ_{11}. Возьмем соответствующее дифференциальное уравнение равновесия в криволинейной ортогональной системе координат S_1 и S_2 и запишем его для разности предельных напряжений, положив кривизну одной из кривых, например S_1, равной нулю и заменив ∂S_1 на ∂Y_1, ∂S_2 на ∂S

$$\Delta\partial\sigma_{11}/\partial Y_1 = -\partial\Delta\sigma_{12}/\partial S - (\Delta\sigma_{11} - \Delta\sigma_{22})/r$$

где r — радиус кривизны кривой S. Входящие в правую часть этой формулы скачки напряжений вычисляются по соответствующим формулам п. 1. Аналогичным образом, с привлечением закона Гука и связей между деформациями и смещениями, можно найти скачки нормальных производных других компонент напряжений, а также и смещений.

Для плоской деформации скачки напряжений и смещений при действии распределенных диполей запишутся так:

$$\Delta\sigma_{11}' = \frac{\partial\Delta\sigma_{12}}{\partial S} - \frac{\Delta\sigma_{22}}{r}, \quad \Delta\sigma_{12}' = \frac{\partial\Delta\sigma_{22}}{\partial S} + \frac{\Delta\sigma_{12}}{r}$$

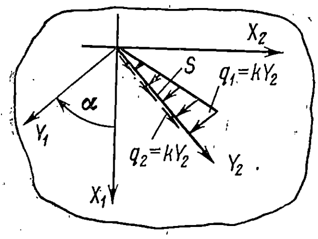
$$\Delta\sigma_{22}' = -\frac{1}{r}\left(1-\frac{\gamma_{21}}{\gamma}\right)\Delta\sigma_{22} + \frac{1}{\gamma}\left[\frac{\partial}{\partial S}\Delta u_2' + \frac{1}{r}\Delta u_1' - \right.$$

$$\left. -\gamma_{21}\left(\frac{\partial\Delta\sigma_{12}}{\partial S} + \frac{1}{r}\Delta\sigma_{11}\right) - \gamma_{22}\left(\frac{\partial\Delta\sigma_{22}}{\partial S} + \frac{2}{r}\Delta\sigma_{12}\right)\right]$$

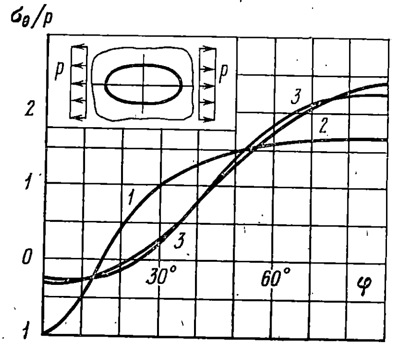
$$\Delta u_1' = -(a_{11}'\Delta\sigma_{11} + a_{12}'\Delta\sigma_{22} + a_{13}'\Delta\sigma_{33} + a_{14}'\Delta\sigma_{12})$$

$$\Delta u_2' = -(a_{14}'\Delta\sigma_{11} + a_{24}'\Delta\sigma_{22} + a_{34}'\Delta\sigma_{33} + a_{44}'\Delta\sigma_{12}) \tag{2.3}$$

Скачки нормальных напряжений из плоскости пластины $\Delta\sigma_{33}'$ можно найти приравняв нулю скачки поперечных деформаций $\Delta\varepsilon_{33}'$. При плоском напряженном состоянии, когда $\sigma_{33}=0$, в (2.3) следует заменить γ на a_{22}', γ_{21} на a_{12}', γ_{22} на a_{24}'. Входящие в (2.3) величины a_{ij}' являются упругими константами материала в локальной системе координат.



Фиг. 1



Фиг. 2

Записывая в развернутом виде правые части формул (2.3), необходимо обозначение сил q заменить на μ. Из анализа этих формул следует, что разрыв смещений пропорционален плотности распределенных диполей, разрыв напряжений – первой производной плотности, произведению плотности на кривизну нагруженной кривой и на производную упругих характеристик материала вдоль дуги нагруженной кривой.

Из этого можно сделать два практически важных вывода: при численном решении задач теории упругости по методу, изложенному в [3, 6], неизвестные, компенсирующие нагрузки – диполи, нельзя аппроксимировать ступенчато-постоянной функцией, если не принять специальных мер к тому, чтобы учесть скачок напряжений, зависящий от производной плотности; кроме того, криволинейный контур тела или разреза нельзя заменять ломаной линией, даже с очень мелкими прямолинейными участками, так как при этом будет потерян скачок напряжений, зависящий от кривизны контура и от производных упругих характеристик. В отличие от изотропного материала, здесь нормальные диполи μ_1 вызывают, помимо скачка смещений u_1', скачок касательных смещений u_2'. Свойство распределенных диполей создавать разрывы в смещениях используется в [6] для расчета тел с разрезами[4].

При решении первой основной задачи, когда на берегах разреза заданы напряжения, вводятся так называемые обобщенные нагрузки – сочетания распределенных диполей и сил, в которых плотности сил подобраны так, чтобы уничтожался скачок напряжений, создаваемый диполями. Нормальная обобщенная нагрузка состоит из нормальных диполей μ_1 и нормальных и касательных к S распределенных сил с плотностями $q_1=\Delta\sigma_{11}'^{(1)}$, $q_2=\Delta\sigma_{12}'^{(1)}$, где $\Delta\sigma_{11}'^{(1)}$ и $\Delta\sigma_{12}'^{(1)}$ – скачки напряжений при действии нормальных диполей. Моментная обобщенная нагрузка состоит из моментных диполей μ_2 и распределенных сил $q_1=\Delta\sigma_{11}'^{(2)}$, $q_2=\Delta\sigma_{12}'^{(2)}$, где $\Delta\sigma_{11}'^{(2)}$ и $\Delta\sigma_{12}'^{(2)}$ – скачки напряжений при действии моментных диполей. С учетом формул скачков предельные напряжения и смещения можно записать так:

$$\sigma'(\xi) = \pm\frac{1}{2}\Delta\sigma'(\xi) + \int\limits_S \mu(\zeta)T'(\xi,\zeta)\,dS_\zeta$$

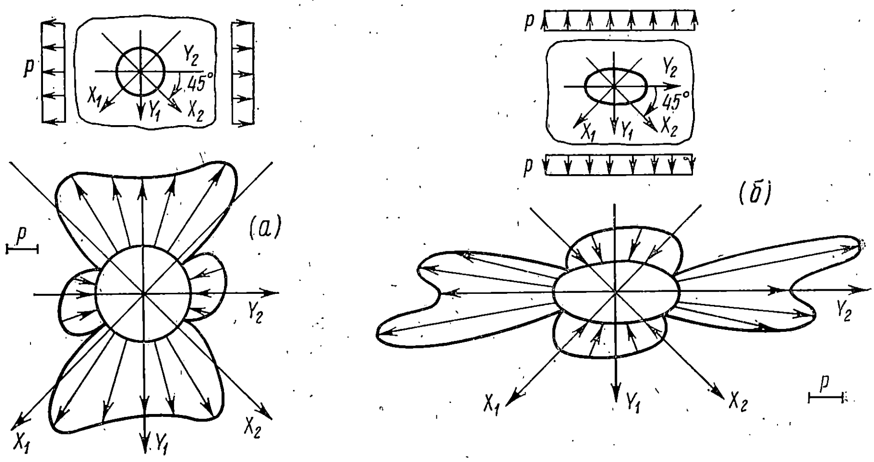
$$u'(\xi) = \pm\frac{1}{2}\Delta u'(\xi) + \int\limits_S \mu(\zeta)U'(\xi,\zeta)\,dS_\zeta$$

где $T'(\xi,\zeta)$ и $U'(\xi,\zeta)$ – напряжения и смещения в точке $\xi\in S$ при действии единичного диполя, сосредоточенного в точке $\zeta\in S$. Интеграл в первом выражении следует понимать как прямое значение первообразной, так как в смысле главного значения этот интеграл не существует. Вычисления таких интегралов в общем случае затруднительно и требует специальных приемов[5].

---

[4] Результаты [6], где нет данных о зависимости скачков напряжений от кривизны нагруженного диполями отрезка, могут использоваться для расчета тел с криволинейными разрезами с учетом полученных здесь результатов.

[5] Для частного случая, когда диполи, изменяющиеся по линейному закону, распределены по отрезку прямой, в работе Б. М. Зиновьева и Т. Ф. Кармановой приведены формулы напряжений и смещений. См. указ. публ. с. 64.



Фиг. 3

3. В качестве примеров были решены некоторые тестовые задачи для эллипса, квадрата и для бесконечной пластинки с разрезом. При решении использовались формулы напряжений и смещений, возникающих в ортотропной бесконечной пластинке при действии сил или диполей, распределенных по прямолинейному отрезку и изменяющихся по линейному закону [6].

1. Уравнение эллипса возьмем в параметрической форме $x=k_xR\sin\varphi$, $y=k_yR\cos\varphi$ ($k_x\leqslant1$, $k_y\leqslant1$). При решении внутренней задачи компенсирующие нагрузки (распределенные силы) прикладываем на сторонах многоугольника, описанного около эллипса. Многоугольник строим следующим образом. Интервал изменения параметра φ разбиваем на n частей $\Delta\varphi=2\pi/n$ (или $\Delta\varphi=\pi/n$, если условия задачи позволяют учесть симметрию), затем около окружности радиуса R строим описанный многоугольник со сторонами $\Delta l_i=2R\,\mathrm{tg}(^1/_2\Delta\varphi)$ постоянной длины. Окружность преобразуем в эллипс, при этом преобразуется и описанный многоугольник, стороны которого Δl_i становятся неравными. На сторонах этого многоугольника прикладываем неизвестные компенсирующие нагрузки; граничные условия удовлетворяем в точках на контуре эллипса. Каждому участку Δl_i соответствуют две точки на контуре. Общее количество неизвестных составляет $4n$. Принимаем $n=36$. Для увеличения точности численного решения применялась и другая аппроксимация контура, когда каждый шаг $\Delta\varphi$ разбивался на n_1 частей, после чего участок Δl_i из прямолинейного превращался в ломаный и описанный многоугольник касался эллипса в $n\times n_1$ точках вместо n.

При решении внешней задачи искомые нагрузки прикладываются на сторонах вписанного в эллипс многоугольника.

На фиг. 2 дано сравнение численного решения с аналитическим [7] для плоскости с эллиптическим отверстием ($k_x=^1/_3$, $k_y=1$), равномерно растягиваемой на бесконечности вдоль большой оси эллипса. Оси эллипса ориентированы вдоль главных осей упругости материала пластинки. Задача решена с учетом симметрии – граничные условия удовлетворялись в точках одной половины контура эллипса с учетом действия компенсирующих нагрузок на всех участках Δl_i. Сравниваются нормальные контурные напряжения σ_θ на площадках, перпендикулярных к контуру отверстия. Кривая *1* соответствует изотропному материалу (здесь точное и численное решения практически совпадают); кривая *2* – точное решение для ортотропного материала, кривая *3* – численное решение.

На фиг. 3 даны результаты точного [8] и численного решений для ортотропной пластинки с круговым (*а*) и эллиптическим отверстиями (*б*). Главные оси упругости пластинки повернуты на 45° относительно направления растягивающих сил. Аналитическое и численное решения практически совпадают.

Рассмотрим тестовую задачу с более сложными граничными условиями. Точное решение получим так: в сплошной бесконечной пластине приложим сосредоточенную силу, от ее действия на контуре эллипса вычислим напряжения и смещения, которые и примем за граничные условия при решении соответственно первой или второй основной задачи. При решении внутренней задачи силу приложим на расстоянии $2R$ от центра эллипса, при решении внешней – в центре эллипса. Силу ориентируем вдоль одной из осей эллипса, которые направлены вдоль главных осей упру-

[6] *Зиновьев Б. М., Карманова Т. Ф.* Указ. публ. с. 64.

N	$\sigma_\theta^{(1)}$	$\sigma_\theta^{(2)}$	ξ, %	$\sigma_\theta^{(2)}$	ξ, %	$\sigma_\theta^{(2)}$	ξ, %
1	1,23	1,31	−6,54	1,19	2,96	1,22	0,18
2	0,34	0,17	49,3	0,47	−39,4	0,32	4,88
3	−0,74	−0,61	16,6	−0,76	−3,34	0,72	2,13
4	−1,64	−1,69	−3,44	−1,59	3,03	−1,65	−0,76
5	−2,23	−2,16	3,06	−2,23	0,03	−2,22	0,66
6	−2,54	−2,55	−0,32	−2,52	0,73	−2,54	−0,19
7	−2,63	−2,60	1,33	−2,62	0,40	−2,62	0,36
8	−2,59	−2,57	0,59	−2,58	0,34	−2,59	0,04
9	−2,46	−2,45	0,52	−2,45	0,63	−2,46	0,18
10	−2,29	−2,26	1,29	−2,29	0,13	−2,28	0,22
11	−2,09	−2,10	−0,24	−2,08	0,84	−2,09	0,01
12	−1,89	−1,85	1,97	−1,89	0,14	−1,88	0,38
13	−1,67	−1,69	−1,09	−1,66	1,03	−1,68	−0,18
14	−1,46	−1,41	2,64	−1,46	−0,50	−1,45	0,52
15	−1,23	−1,26	−2,11	−1,22	1,24	−1,24	−0,40
16	−1,01	−0,97	3,53	−1,02	−0,99	−1,00	0,70
17	−0,77	−0,80	−3,87	−0,76	1,81	−0,78	−0,75
18	−0,54	−0,50	6,05	−0,55	−2,02	−0,53	1,16
19	−0,30	−0,33	11,4	−0,28	5,23	−0,30	−2,18
20	−0,06	−0,03	48,8	−0,08	−16,3	−0,06	8,94
21	0,14	0,10	30,8	0,17	−15,3	0,14	5,73
22	0,32	0,36	−10,6	0,31	3,27	0,33	−1,80
23	0,45	0,38	13,6	0,47	−5,86	0,44	2,78
24	0,50	0,48	3,36	0,50	−0,44	0,49	1,08

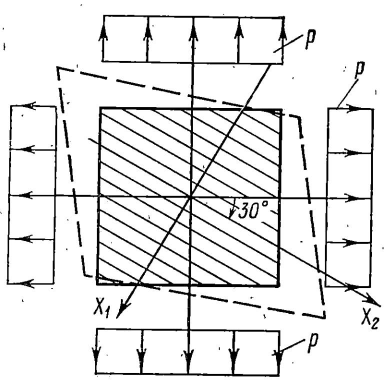
гости. При решении полагалось $E'=55{,}8$ ГПа, $E=3{,}9$ ГПа, $\nu=\nu'=0{,}277$, $G=5{,}58$ ГПа, $k_x=0{,}8$, $k_y=1$, $R=10$ см.

В таблице даны результаты решения первой основной внутренней задачи при различных n_1; приведены точные значения контурных напряжений $\sigma_\theta^{(1)}$, приближенные $\sigma_\theta^{(2)}$ (для $n_1=1$, 3, 5) и погрешности ξ для точек одной половины контура пластинки. С увеличением n_1 погрешности заметно уменьшаются. Погрешности изменяются от точки к точке, достигая наибольших значений там, где напряжения минимальны, и уменьшаясь до десятых долей процента, в зоне наибольших по абсолютной величине напряжений. В таблице значения напряжений даны с точностью до сотых долей, поэтому имеют место случаи, когда численное решение совпадает с точным, однако погрешность не равна нулю.

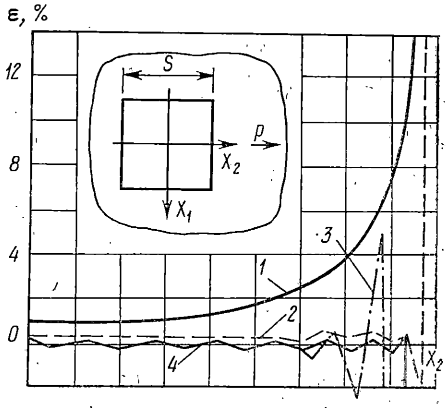
Были просчитаны первая внешняя, а также вторая внешняя и внутренняя задачи; погрешности численного решения изменяются в тех же пределах, что и приведенные в таблице.

2. Для квадрата приведены результаты решения внутренней задачи. На фиг. 4 штрихами показан деформированный вид равномерно растягиваемой квадратной пластинки, стороны которой составляют угол 30° с главными осями упругости. Сторона квадрата S разбивалась на участки ΔS_i переменной длины, уменьшающейся к угловым точкам

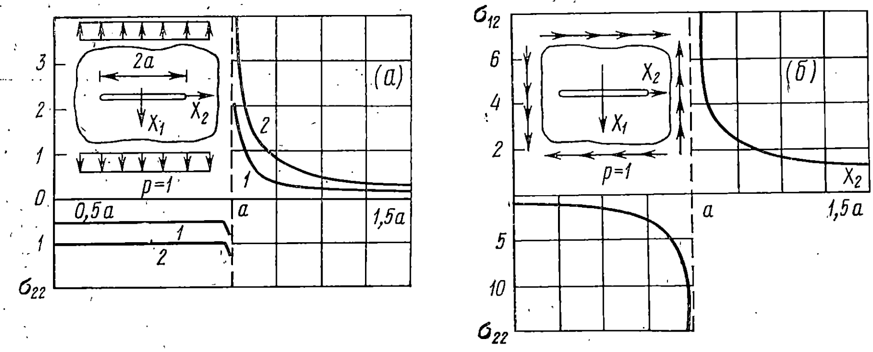
$$\Delta S_i={}^1/_2S\{\cos[\pi(i-1)/n]-\cos(\pi i/n)\}\quad (i=1,\ldots,n)$$



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

При решении принималось $n=10$, $E'=55{,}8$ ГПа, $E=3{,}9$ ГПа, $\nu'=0{,}277$, $G=5{,}58$ ГПа, $S=10$ см.

Результаты решения тестовой задачи, когда точное решение получалось как результат действия сосредоточенной силы в бесконечной пластине, представлены на фиг. 5; сила приложена на расстоянии S от центра квадрата, направлена вдоль оси симметрии, совпадающей с главной осью упругости. Задача решена с учетом симметрии. Графики изображают распределение погрешностей на половине вертикальной правой кромки в нормальных напряжениях по площадкам, перпендикулярным к кромке пластинки. Кривые *1* и *2* соответствуют решению первой основной задачи с участками ΔS_i постоянной и переменной длины при $n=18$; кривые *3* и *4* соответствуют решению второй основной задачи с участками ΔS_i постоянной и переменной длины. При переменном шаге решение значительно улучшается, так как зона наибольших погрешностей ($\xi \geqslant 10\%$) сдвигается к угловой точке, занимая около 1/40 от длины кромки. Как показывают результаты решения внешней задачи для квадрата, во входящих углах зона больших погрешностей при переменном шаге не выходит за пределы первого от угловой точки участка. Погрешности в смещениях при решении первой основной задачи примерно на порядок меньше погрешностей в напряжениях как в первой, так и во второй задачах. При решении принималось $E'=55{,}8$ ГПа, $E=13{,}8$ ГПа, $\nu'=0{,}277$, $G=5{,}58$ ГПа.

Приведенные результаты по решению задач для эллипса позволяют сделать заключение о том, что чем плотнее аппроксимирующий многоугольник охватывает криволинейный контур, тем выше точность численного решения при одинаковом числе неизвестных. Возрастание точности носит затухающий характер. Из численных экспериментов с квадратом следует, что в окрестности особых точек длины участков должны уменьшаться с приближением к этой точке. Необходимое количество участков и закон их изменения в окрестности особой точки можно оценить сравнивая численные решения задачи при различной разбивке контура на участки.

3. На фиг. 6 даны результаты решения задачи для пластинки с прямолинейным разрезом, ориентированным вдоль главной оси упругости.

Решение задач теории упругости для тел с разрезами с учетом асимптотики напряжений в окрестности вершин разреза излагается в [9]. Здесь для учета особенности напряжений применяется разбивка на участки переменной длины, уменьшающиеся к его вершинам; асимптотика напряжений при этом схватывается достаточно точно. При решении использовались моментные и безмоментные обобщенные нагрузки. На фиг. 6, *а* приведены эпюры напряжений для пластинки, растягиваемой равномерно на бесконечности поперек разреза: кривая *1* соответствует ортотропному материалу с $E'=55{,}8$ ГПа, $E=13{,}8$ ГПа, $\nu'=0{,}4$, $G=3{,}96$ ГПа; кривая *2* – изотропному материалу с $E=E'=55{,}8$ ГПа, $\nu=0{,}25$. Задача решена с учетом симметрии, разрез разбивался на 80 участков переменной длины. Напряжения вычислены в точках на оси OX_2.

Эпюры касательных σ_{12} (кривая *1*) и нормальных σ_{22} (кривая *2*) напряжений для пластинки с разрезом, нагруженной на бесконечности касательными напряжениями постоянной величины, приводятся на фиг. 6, *б*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Я.* Об одном приближенном методе решения плоских контактных задач теории упругости.– Тр. Новосиб. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1955, вып. 11, с. 5–28.
2. *Александров А. Я.* Некоторые решения осесимметричных контактных задач теории упругости.– Тр. Новосиб. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1955, вып. 11, с. 29–61.
3. *Александров А. Я.* Решение основных трехмерных задач теории упругости для тел

произвольной формы путем численной реализации метода интегральных уравнений.— Докл. АН СССР, 1973, т. 208, № 2, с. 291–294.
4. *Pan Y.-C., Chon T.-W.* Point force solution for an infinite transversely isotropic solid.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1976, v. 43, No. 4, p. 608–612.
5. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М.— Л.: Гостехиздат, 1947. 364 с.
6. *Александров А. Я., Зиновьев Б. М.* Численное решение задач теории упругости для тел с разрезами.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 89–93.
7. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 887 с.
8. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
9. *Александров А. Я., Зиновьев Б. М., Куршин Л. М.* Об одном численном методе решения задач теории упругости с учетом особенностей напряженного состояния вблизи угловых точек и линий.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 3, с. 39–49.

Новосибирск

Поступила в редакцию
14.II.1983