

УДК 539.3

**ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ УТОЧНЕННЫХ ЗАДАЧ
УПРУГОГО КОНТАКТА ДВУХ ТЕЛ**

ГАЛАНОВ Б. А.

Несколько подходов к приближенному решению контактных задач с неизвестной площадкой контакта приведены в [1-11]. Они условно делятся на классические и вариационные [9].

В публикуемой работе используется классический подход, основанный на применении метода граничных интегральных уравнений. Даны уточненные постановки задач вдавливания (без трения) в упругое полупространство одиночных штампов в виде конуса и пирамиды. Эти постановки учитывают смещения u и v в плоскости границы полупространства, что противоречиво оценивается в работах [3, 12, 13]. Такой учет в линейной по u и v постановке приводит к интегральным уравнениям с несимметричными ядрами. При помощи метода, аналогичного [14], получены решения уточненных задач (контактные давления, площадки контакта, осадки штампов). Показано, что учет u и v может приводить к существенному уменьшению несовместности деформаций, которая отмечается вблизи зоны контакта при обычной постановке этих задач [6, 15].

Рассмотрена уточненная постановка контактных задач для случая контакта двух упругих тел. Так как тела имеют в общем случае разные механические и геометрические характеристики, каждое тело имеет свою площадку контакта. Предлагаемая модель учитывает это. Дан пример.

1. Уточненные постановки задач. Пусть в упругое полупространство $z \geq 0$ вдавливается штамп, ограниченный поверхностью $z=f(x, y)$. Штамп занимает область $z \leq f(x, y)$, поэтому условие непроникновения точек границы полупространства в штамп, имеющего осадку h , запишется так:

$$w-h-f(x+u, y+v) \geq 0 \quad (1.1)$$

где u, v, w — компоненты вектора перемещения соответственно по осям x, y, z ; знак равенства имеет место на площадке контакта S (S — часть плоскости $z=0$, которая вступает в контакт со штампом).

Для штампа в виде правильной четырехгранной пирамиды, которая в недеформированном состоянии касается полупространства своей вершиной в начале координат O , неравенство (1.1) имеет вид

$$w-h+\beta \max(|x+u|, |y+v|) \geq 0, \quad \beta = \operatorname{ctg} \gamma \quad (1.2)$$

где γ — угол наклона граней пирамиды к оси z .

Обозначим через $\mu_1(M), \mu_2(M), \mu_3(M), \mu_4(M)$ характеристические функции соответственно множеств: $s_1=(x \geq 0, -x \leq y \leq x)$, $s_2=(-y < x < y)$, $s_3=(x < 0, x \leq y \leq -x)$, $s_4=(-y > x > y)$. Тогда на S в линеаризованном относительно u и v виде уравнение (1.2) запишется так:

$$w+\beta(\mu_1-\mu_3)u+\beta(\mu_2-\mu_4)v=h-\beta \max(|x|, |y|) \quad (1.3)$$

Как известно [16, 17], в классической постановке аналогичных задач в линеаризованном условии контакта, следуя Герцу, отбрасывают члены, содержащие u и v . В публикуемой работе исследуется влияние смещений u и v .

Если учесть выражения для перемещений u, v, w [12], то (1.3) примет вид

$$D \int_S K(\lambda, M, N) p(N) dS_N = h - \beta \max(|x|, |y|) \quad (1.4)$$

$$D = \frac{1-\nu^2}{\pi E}, \quad K(\lambda, M, N) = \frac{\omega(\lambda, M, N)}{R_{MN}}, \quad \lambda = \frac{1-2\nu}{2-2\nu}$$

$$\omega(\lambda, M, N) = 1 - \frac{\lambda\beta}{R_{MN}} [(\mu_1(M) - \mu_3(M))(x - \xi) + (\mu_2(M) - \mu_4(M))(y - \eta)]$$

Здесь E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, R_{MN} — расстояние между точками $M(x, y), N(\xi, \eta)$, $p(M)$ — контактное давление.

Видно, что $K(\lambda, M, N) \neq K(\lambda, N, M)$, функция $\omega(\lambda, M, N)$ — ограниченная (при фиксированных λ и β) и $K(\lambda, M, N) \geq 0$ для $\theta = \lambda\beta \leq 1$.

Таким образом контактная задача сводится к нахождению величин $p(M), S, h$ из нелинейной системы

$$D \int_S K(\lambda, M, N) p(N) dS_N = h - \beta \max(|x|, |y|), \quad \int_S p(N) dS_N = P$$

$$p(M) \geq 0, \quad p(M)|_L = 0 \quad (M(x, y), N(\xi, \eta) \in S) \quad (1.5)$$

где P — сила, вдавливающая штамп, L — граница S .

Как видно из приведенных уравнений, при $\nu = 0,5$ (что соответствует $\lambda = 0$) решения задач в уточненной и обычной постановках совпадают и при достаточно малых значениях $\theta = \lambda\beta$ они близки.

Очевидно, что задача (1.5) эквивалентна краевой задаче со свободной границей [14], в которой отыскивается гармоническая в полупространстве $z > 0$ функция $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$ ($\varphi(M) = O(r^{-1})$ при $r \rightarrow \infty$, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$), удовлетворяющая при $z = 0$ условиям

$$D \left(\varphi(M) + \lambda\beta \int_0^\infty \left((\mu_1(M) - \mu_3(M)) \frac{\partial \varphi(M)}{\partial x} + (\mu_2(M) - \mu_4(M)) \frac{\partial \varphi(M)}{\partial y} \right) dz \right) = h - \beta \max(|x|, |y|) \quad (M \in S)$$

$$\partial \varphi(M) / \partial z = 0 \quad (M \notin S)$$

а свободная граница L и осадка штампа h удовлетворяют условию непрерывности $\partial \varphi(M) / \partial z$ на L (кроме, может быть, конечного числа точек L) и условиям

$$\frac{\partial \varphi(M)}{\partial z} \Big|_{z=0} \geq 0, \quad \int_S \frac{\partial \varphi(M)}{\partial z} \Big|_{z=0} dS = 2\pi P \quad (1.7)$$

Если в упругое полупространство вдавливается штамп в виде кругового конуса, то в полярных координатах контактная задача (аналогичная (1.5)) запишется так:

$$D \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{p(\rho)}{R_{MN}} \left(1 - \frac{\lambda\beta}{R_{MN}} (r - \rho \cos \varphi) \right) \rho d\rho d\varphi = h - \beta r$$

$$p(\rho) \geq 0, \quad p(a) = 0 \quad (0 \leq r \leq a), \quad 2\pi \int_0^a p(\rho) \rho d\rho = P$$

$$R_{MN} = (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi)^{1/2}, \quad \beta = \text{ctg } \gamma$$

где γ — угол наклона образующей конуса к оси z .

Рассмотрим теперь задачу контакта двух упругих тел. Поместим начало координат в точке первоначального касания тел. Пусть недеформированные тела занимают области, определяемые неравенствами $z \leq f_1(x, y)$, $z \geq f_2(x, y)$. Индексы будут обозначать номер тела и принадлежащие ему соответствующие величины. Считаем, что тела сближаются вдоль оси z на величину h под действием сдвигивающей силы P . Ось z направлена внутрь тела 2 по линии действия P .

Аналогично (1.1) условия непроникновения границ одного тела в другое могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} w_2(M_2) - w_1(M_1) - h + f_2(x_1 + u_1(M_1) - u_2(M_2), y_1 + v_1(M_1) - v_2(M_2)) - f_1(M_1) &\geq 0, \\ w_2(M_2) - w_1(M_1) - h - f_1(x_2 + u_2(M_2) - u_1(M_1), y_2 + v_2(M_2) - v_1(M_1)) + f_2(M_2) &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь компоненты u_i, v_i, w_i (соответственно по осям x, y, z) вектора перемещения i -го тела в точке $M_i(x_i, y_i)$ определяются по формулам [12]:

$$\begin{aligned} u_i(M_i) &= -D_i \int_{S_i} \frac{p_i(N)(x_i - \xi)}{R_{M_i N}^2} dS_N, \quad D_i = \frac{(1 - 2\nu_i)(1 + \nu_i)}{2\pi E_i} \\ v_i(M_i) &= -D_i \int_{S_i} \frac{p_i(N)(y_i - \eta)}{R_{M_i N}^2} dS_N, \quad w_i(M_i) = (-1)^i D_i^* \int_{S_i} \frac{p_i(N)}{R_{M_i N}} dS_N \\ D_i^* &= (1 - \nu_i^2) / \pi E_i \end{aligned} \quad (1.10)$$

где E_i, ν_i — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, $p_i(M)$ — контактное давление, распределенное на площадке S_i .

В (1.10) при определении смещений u_i, v_i, w_i каждое из тел заменяется полупространством. Поэтому S_i — часть плоскости $z=0$, которую можно рассматривать как проекцию вдоль оси z части поверхности i -го тела, вступающей в контакт после деформации.

Первое неравенство в (1.9) есть условие непроникновения границы тела 1 в тело 2, второе условие — условие непроникновения границы тела 2 в тело 1. Знаки равенства в (1.9) имеют место на площадках контакта S_i для точек M_1 и M_2 , вступающих в контакт после деформации.

Из (1.9) получаем линеаризованные относительно смещений u_i и v_i условия контакта

$$\begin{aligned} w_2(M_2) - w_1(M_1) + L_{21}(M_1)(u_1(M_1) - u_2(M_2)) + \\ + L_{22}(M_1)(v_1(M_1) - v_2(M_2)) = h + f_1(M_1) - f_2(M_1) \\ w_2(M_2) - w_1(M_1) - L_{11}(M_2)(u_2(M_2) - u_1(M_1)) - \\ - L_{12}(M_2)(v_2(M_2) - v_1(M_1)) = h + f_1(M_2) - f_2(M_2) \end{aligned} \quad (1.11)$$

где операторы $L_{ij}(M)$ получены линеаризацией f_i по u_i и v_i . Подставив (1.10) в (1.11), получим сложную систему интегральных уравнений контактной задачи. Эта система может быть существенно упрощена, если предположить, что

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \frac{p_2(N)(x_2 - \xi)}{R_{M_2 N}^2} dS_N \approx t \int_{S_1} \frac{p_1(N)(x_1 - \xi)}{R_{M_1 N}^2} dS_N \\ \int_{S_2} \frac{p_2(N)(y_2 - \eta)}{R_{M_2 N}^2} dS_N \approx t \int_{S_1} \frac{p_1(N)(y_1 - \eta)}{R_{M_1 N}^2} dS_N \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\int_{S_2} \frac{p_2(N)}{R_{M_2N}} dS_N \approx t \int_{S_1} \frac{p_1(N)}{R_{M_1N}} dS_N \quad (t = \text{const} > 0)$$

поскольку M_1 и M_2 — точки, вступающие в контакт после деформации.

Механический смысл гипотезы (1.12) состоит в том, что при почти равных нагрузках на полупространство ($p_1(M) \approx p_2(M)$) в двух близких точках M_1 и M_2 на его границе векторы перемещений почти одинаково направлены, но имеют разные длины (это учитывается множителем t). В приведенном далее численном примере показано, что гипотеза (1.12) приводит к удовлетворительным результатам.

Таким образом, учитывая (1.10), (1.12), из (1.11) получаем для отыскания $p_i(M)$, S_i , h и t следующую систему (L_i — контур S_i):

$$D_i(t) \int_{S_i} K_i(\lambda(t), M_i, N) p_i(N) dS_N = h + f_1(M_i) - f_2(M_i) \quad (1.13)$$

$$p_i(M) \geq 0, \quad p_i(M)|_{L_i} = 0, \quad \int_{S_i} p_i(N) dS_N = P \quad (M_i, N \in S_i) \quad (i=1,2)$$

$$K_1(\lambda(t), M_1, N) = \frac{1}{R_{M_1N}} \left\{ 1 - \frac{\lambda(t)}{R_{M_1N}} [L_{21}(M_1)(x_1 - \xi) + L_{22}(M_1)(y_1 - \eta)] \right\}$$

$$K_2(\lambda(t), M_2, N) = \frac{1}{R_{M_2N}} \left\{ 1 - \frac{\lambda(t)}{R_{M_2N}} [L_{11}(M_2)(x_2 - \xi) + L_{12}(M_2)(y_2 - \eta)] \right\}$$

$$\lambda(t) = \frac{D_1 - tD_2}{D_1 + tD_2}, \quad D_1(t) = D_1^* + tD_2^*, \quad D_2(t) = \frac{D_1(t)}{t}$$

Задача (1.13) эквивалентна краевой задаче со свободной границей, в которой отыскиваются две гармонические функции, свободные границы L_i , сближение тел h и параметр t , удовлетворяющие условиям, аналогичным (1.6), (1.7).

2. Метод решения. Сделаем в (1.5) замену переменных

$$x = \frac{h}{\beta} x', \quad y = \frac{h}{\beta} y', \quad z = \frac{h}{\beta} z', \quad P = D^{-1} \beta^{-1} h^2 P', \quad p'(x', y') = D \beta^{-1} p \left(\frac{h}{\beta} x', \frac{h}{\beta} y' \right), \quad P' = \int_{S'} p'(N') dS_{N'}$$

Тогда относительно неизвестных $p'(M')$, S' получим систему

$$\int_{S'} K(\lambda, M', N') p'(N') dS_{N'} = 1 - \max(|x'|, |y'|),$$

$$p'(M') \geq 0, \quad p'(M')|_{L'} = 0 \quad (M', N' \in S') \quad (2.1)$$

или в операторном виде

$$A_{L'} p' = b, \quad p' \geq 0, \quad p'|_{L'} = 0, \quad b = 1 - \max(|x'|, |y'|) \quad (2.2)$$

где оператор $A_{L'}$ — вполне непрерывный в $L_2(S')$, но не самосопряженный (L' — граница S').

Такой же заменой переменных (только записанной в полярных координатах) система (1.8) может быть приведена к виду

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{a'} \frac{p'(p')}{R_{M'N'}} \left(1 - \frac{\lambda \beta}{R_{M'N'}} (r' - \rho' \cos \varphi) \right) \rho' d\rho' d\varphi' = 1 - r'$$

$$p'(r') \geq 0, \quad p'(a') = 0 \quad (0 \leq r' \leq a') \quad (2.3)$$

Если ввести обозначения $\theta = \lambda\beta$, $g(\theta) = (P')^{-1/2}$, $h_0 = \beta^{1/2}g(\theta)$, то осадка штампа будет $h = h_0(PD)^{1/2}$, где h_0 зависит от ν и β . Площадка $S = H_0^{h/\beta}(S')$, где $H_0^{h/\beta}$ — гомотетия с центром O и коэффициентом h/β .

Чтобы применить для решения (2.2) метод последовательных приближений [14], от системы (2.2) перейдем к эквивалентной системе

$$A_{L'}^* A_{L'} p' = A_{L'}^* b, \quad p' \geq 0, \quad p'|_{L'} = 0 \quad (2.4)$$

где оператор $A_{L'}^*$ сопряженный к оператору $A_{L'}$. Так как оператор $A_{L'}^* A_{L'}$ положительный в $L_2(S')$, то для решения системы (2.4) полностью применим метод [14], его алгоритм и реализация.

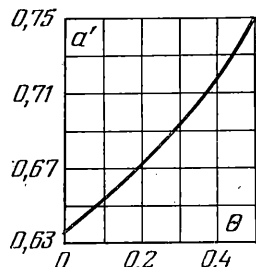
Суть метода [14] заключается в том, что по приближению L'_k к границе L' области S' определяется контактное давление $p'_k(M')$ (путем решения интегрального уравнения первого рода $A_{L'_k}^* A_{L'_k} p'_k = A_{L'_k}^* b$ с применением регуляризующего алгоритма, использующего вспомогательное уравнение $\alpha p'_k + A_{L'_k}^* A_{L'_k} p'_k = A_{L'_k}^* b$, $\alpha > 0$ — параметр регуляризации), по которому затем определяется следующее приближение L'_{k+1} к L' ($k=1, 2, \dots$). При этом построение последовательности $\{L'_k\}$ осуществляется итерационным методом, который можно рассматривать как совокупность одномерных итерационных процессов, работающих на каждом луче, лежащем в плоскости $x'y'$ и исходящем из начала координат. Аналогично, но проще (из-за осевой симметрии) решается система (2.3).

Рассмотрим теперь решение системы (1.13), которая при фиксированном t распадается на две системы, аналогичные (1.5). Если p_{it}, S_{it}, h_{it} ($i=1, 2$) — решения этих систем (индекс t указывает на их зависимость от t), то среди этих решений содержится решение p_i, S_i, h системы (1.13), для которого параметр t удовлетворяет условию $h_{1t} = h_{2t} = h$. Поэтому реализуемый далее метод решения системы (1.13) состоит в построении семейства p_{it}, S_{it}, h_{it} , зависящего от t , и последующем определении из условия $h_{1t} = h_{2t} = h$ значения параметра t , выделяющего из этого семейства решение системы (1.13).

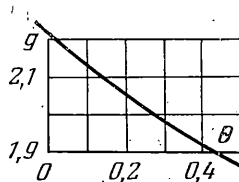
3. Численный анализ. Рассмотренные ниже примеры позволяют оценить влияние на напряженно-деформированное состояние учета в постановке контактной задачи смещений u и v .

1. В упругое полупространство вдавливаются жесткий конус. Система (2.3) решалась для значений $\theta = \lambda\beta$, удовлетворяющих неравенствам $0 \leq \theta \leq 0,5$. Дискретизация системы (2.3) выполнялась равномерной по ρ' и φ' ($\Delta\varphi' = 2\pi/k$, $\Delta\rho' = a'/m$, $k=120$, $m=20$). Параметр регуляризации $\alpha = 5 \cdot 10^{-5}$.

На фиг. 1 показана зависимость радиуса площадки контакта a' от θ . На фиг. 2



Фиг. 1



Фиг. 2

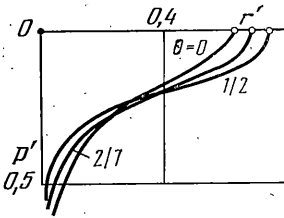
дан график функции $g = g(\theta)$ ($0 \leq \theta \leq 0,5$), при помощи которой определяется осадка штампа по формуле $h = h_0(PD)^{1/2}$ ($h_0 = \beta^{1/2}g(\theta)$).

Распределения контактных давлений на оси Or' приводятся на фиг. 3. Значениям $\theta=0$, $\theta=2/7$, $\theta=0,5$ соответствуют кривые 1–3.

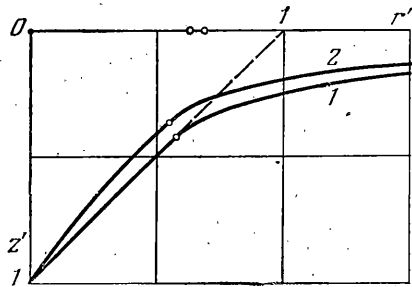
На фиг. 4 изображена деформация границы полупространства для двух случаев: с учетом (кривая 1) и без учета (кривая 2) в (2.3) смещений в плоскости $z'=0$.

Точками обозначены границы контакта. Из сравнения кривых 1 и 2 видно, что в уточненной постановке задачи (которой соответствует кривая 1, $\beta=1$, $\nu=0,3$, $\theta=2/7$) существенно уменьшается несовместность деформаций (проникание упругого полупространства в штамп), которая в представленном на фиг. 4 масштабе практически отсутствует.

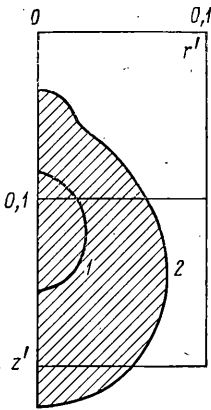
На фиг. 5 заштрихованы зоны несовместности деформаций (т. е. области полупространства $z' > 0$, где якобиан $I \leq 0$ [6, с. 217], I — якобиан преобразования $\xi=x+u$, $\eta=y+v$, $\zeta=z+w$). Кривые 1, 2 ограничивают области несовместности деформаций



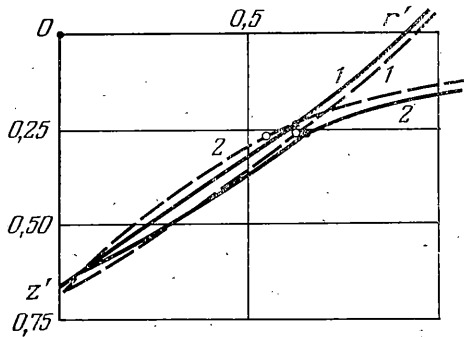
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

для рассматриваемой задачи ($\beta=1$, $\nu=0,3$) соответственно в уточненной (т. е. с учетом u и v) и обычной постановках.

Эти результаты указывают на значительное уменьшение несовместности деформаций для более точных постановок задач.

2. *Задача о контакте упругого конуса с упругим полупространством.* Система (1.13) в полярных координатах имеет вид

$$D_1(t) \int_0^{2\pi} \int_0^{a_1} \frac{p_1(\rho)}{R_{M_1N}} \rho \, d\rho \, d\varphi = h - \beta r_1 \quad (0 \leq r_1 \leq a_1)$$

(3.1)

$$D_2(t) \int_0^{2\pi} \int_0^{a_2} \frac{p_2(\rho)}{R_{M_2N}} \left[1 + \frac{\lambda(t)\beta}{R_{M_2N}} (r_2 - \rho \cos \varphi) \right] \rho \, d\rho \, d\varphi = h - \beta r_2$$

$$(0 \leq r_2 \leq a_2) \quad p_i(\rho) \geq 0, \quad p_i(a_i) = 0, \quad 2\pi \int_0^{a_i} p_i(\rho) \rho \, d\rho = P \quad (i=1,2)$$

Отсюда и из решения предыдущей задачи имеем $h_{1t} = 2,22\beta^{1/2}(PD_1(t))^{1/2}$, $h_{2t} = g(\theta)\beta^{1/2}(PD_2(t))^{1/2}$, $\theta = -\lambda(t)\beta$; Поэтому уравнение $h_{1t} = h_{2t} = h$ для определения t принимает вид

$$2,22 = g(-\lambda(t)\beta) (D_2(t)/D_1(t))^{1/2} \quad (3.2)$$

Рассмотрим конкретный пример. Для $\nu_1=0,4$, $E_1=E$, $\beta=1$, $\nu_2=0,1$, $E_2=0,5E$ уравнение (3.2) записывается так: $2,22 = g(-\lambda(t))t^{-1/2}$, где $\lambda(t) = (0,07 - 0,44t)/(0,42 + 0,99t)$, и гра-

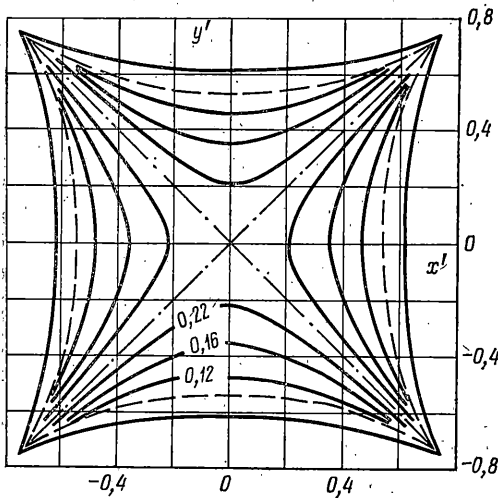
ij	x_i	y_j	p_{ij}	ij	x_i	y_j	p_{ij}
11	0,0000	0,0000	0,6194	55	0,3011	0,3011	0,3642
13	0,1462	0,0000	0,2609	57	0,4290	0,3011	0,1615
15	0,2837	0,0000	0,1891	59	0,5444	0,3011	0,1004
17	0,4116	0,0000	0,1377	511	0,6293	0,3011	0,0000
19	0,5270	0,0000	0,0894	77	0,4517	0,4517	0,3321
111	0,6119	0,0000	0,0000	79	0,5670	0,4517	0,1158
33	0,1506	0,1506	0,4062	711	0,6520	0,4517	0,0000
35	0,2881	0,1506	0,2017	99	0,6023	0,6023	0,2724
37	0,4160	0,1506	0,1441	911	0,6872	0,6023	0,0000
39	0,5313	0,1506	0,0926	1111	0,7528	0,7528	0,0000
311	0,6163	0,1506	0,0000				

фический метод его решения, использующий график функции $g(\theta)$ (фиг. 2), дает (при помощи функции $a'(\theta)$, фиг. 1) следующие искомые величины: $t=0,84$, $\theta=0,24$, $a_1=a_1'h=0,64h$, $a_2=a_2'h=0,68h$, $h=3,51(P/(\pi E))^{1/2}$.

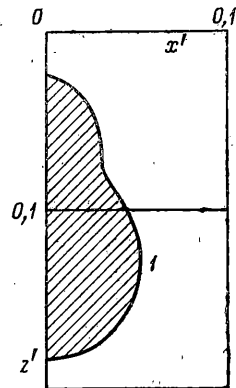
О распределениях контактных давлений можно судить, используя результаты примера (1) (фиг. 3).

На фиг. 6 сплошными линиями отмечены деформированные поверхности конуса (кривая 1) и полупространства (кривая 2), рассчитанные по предлагаемой схеме; штриховыми линиями показаны соответствующие поверхности, рассчитанные по обычной теории. Точками отмечены границы контакта.

Сравнение соответствующих кривых указывает на уменьшение несовместности деформаций при расчете по предлагаемой схеме. Несовместность деформаций умень-



Фиг. 7



Фиг. 8

шилась, но не исчезла. По-видимому, здесь сказывается влияние предположения, по которому упругие перемещения в телах рассчитываются по формулам (1.10) (т. е. каждое из тел рассматривается как упругое полупространство).

3. В упругое полупространство вдавливаются штамп в виде правильной четырехгранной пирамиды (см. системы (1.5), (2.1)). Расчеты выполнены для $\nu=0,3$, $\beta=1$ ($\theta=\lambda\beta=2/7$).

Площадка контакта и распределение контактного давления на ней при учете u и v показаны на фиг. 7, штриховыми линиями отмечена граница площадки контакта, когда не учитываются смещения u и v . Дискретизация системы (2.1) выполнялась аналогично [14]. Координаты узлов (i, j) для нечетных i, j и точек границы контакта (узлы ($i, 11$)), а также контактные давления p_{ij} в узлах, принятые за приближенное решение, даны в таблице ($\alpha=0,0005$, $n=441$, $\delta_n=0,0307$, обозначения см. [14]). Для постоянной h_0 получено значение $h_0=1,87$ вместо $h_0=2,03$ в обычной постановке задачи [14], когда проникание полупространства в штамп имеет характер (в количественном и качественном отношении), аналогичный прониканию в задаче контакта конуса с полупространством (см. фиг. 4). В уточненной постановке это проникание практически отсутствует и характер деформации границы полупространства такой же, как на фиг. 4 (кривая 1).

На фиг. 8 заштрихована зона несовместности деформаций (т. е. область полупространства $z' > 0$, где якобиан $I \leq 0$ [6]) для задачи в обычной постановке, т. е. без учета u и v , которая, как показали проведенные вычисления, в уточненной постановке отсутствует.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зайцев Е. А., Кравчук А. С.* Решение на ЭВМ контактных задач вязкоупругости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 4, с. 93–98.
2. *Керман В. И.* Вариационные задачи определения площадки контакта упругих тел.— Докл. АН СССР, 1979, т. 246, № 6, с. 1326–1329.
3. *Кильчевский Н. А.* Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. Киев: Наук. думка, 1976. 319 с.
4. *Кравчук А. С.* К задаче Герца для линейно и нелинейно-упругих тел конечных размеров.— Докл. АН СССР, 1976, т. 230, № 2, с. 308–310.
5. *Малый В. И., Ефимов А. Б., Воробьев В. Н.* О решении пространственных контактных задач теории упругости.— Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 2, с. 316–319.
6. *Рвачев В. Л., Проценко В. С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наук. думка, 1977. 235 с.
7. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
8. *Фридман В. М., Чернина В. С.* Решение задачи о контакте упругих тел итерационным методом.— Инж. ж. МТТ, 1967, № 1, с. 116–120.
9. *Kalker J. J.* A survey of the mechanics of contact between solid bodies.— Z. angew. Math. und Mech., 1977, V. 57, N. 5, S. 3–17.
10. *Singh K. P., Paul V.* Numerical solution of non-hertzian elastic contact problems.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1974, v. 41, No. 2, p. 484–490.
11. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
12. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.—Л., ОНТИ, 1935. 674 с.
13. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
14. *Галанов Б. А.* О приближенном решении некоторых задач упругого контакта двух тел.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 5, с. 61–67.
15. *Савин Г. Н., Рвачев В. Л.* О нарушениях совместности деформаций в некоторых задачах теории упругости.— Докл. АН УССР, 1963, № 3, с. 354–357.
16. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
17. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.—Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.

Киев

Поступила в редакцию
24.II.1982г.