МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1983

УДК 539.3

# ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ ПЕРВОГО РОДА В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ СРЕДАХ

КОНДАУРОВ В. И., НИКИТИН Л. В.

Широкий круг процессов, происходящих в твердых деформируемых средах, тесно связан с фазовыми превращениями первого рода [1]. Феноменологические теории фазовых переходов первого рода в твердых телах развивались в [2–5] на основе принципа Гиббса [6], сформулированного для термостатики жидких и газообразных тел. Различная трактовка этого принципа применительно к твердому деформируемому телу приводит в этих работах к существенно различным условиям равновесия фаз.

Ниже на основе предположений о непрерывности температуры и об отсутствии диссипации на поверхности раздела фаз исследуется термомеханика фазовых переходов первого рода в нелинейно-упругом материале при конечных деформациях. В качестве примера рассматривается сферически-симметричная задача о равновесии упругого тела с жидким расплавом при действии механической нагрузки и тепловых источников. При заданных граничных условиях и заданной реологии фаз определяется температура фазового перехода и положение границы раздела двух фаз.

**1. Основные соотношения нелинейной термоупругости.** Рассмотрим конечные деформации нелинейной термоупругой анизотропной безмоментной среды. Пусть $X^i$ — координаты материальной частицы в начальной конфигурации, $x^i$ — в текущей конфигурации в эйлеровой пространственной прямоугольной системе координат, $t$ — время, $v^i=\partial x^i/\partial t|_{X^m}$ — скорость частицы, $F_j^i=\partial x^i/\partial X^j$ — градиент деформации (дисторсия), $\theta>0$ — абсолютная температура, $\gamma_m=\partial\theta/\partial x^m$ — градиент температуры. Тогда определяющие уравнения рассматриваемого материала могут быть записаны в виде

$$U=U(F_n^m,\ \theta,\ \gamma_m),\quad \sigma_{ij}=\sigma_{ij}(F_n^m,\ \theta,\ \gamma_m),\quad \eta=\eta(F_n^m,\ \theta,\ \gamma_m),$$
$$q^i=q^i(F_n^m,\ \theta,\ \gamma_m) \tag{1.1}$$

где $U$ — плотность внутренней энергии, $\sigma_{ij}$ — компоненты тензора напряжений Коши, $\eta$ — плотность энтропии, $q^i$ — удельный тепловой поток.

Рассматривая только тепловое и механическое взаимодействие, систему законов сохранения массы, импульса, энергии и совместности деформаций можно записать для инерциальной системы отсчета в форме

$$\rho\Delta=\rho_0,\quad \Delta=\det\|F_n^m\| \tag{1.2}$$

$$\partial(\rho v^i)/\partial t+\partial(\rho v^i v^k-\sigma^{ik})/\partial x^k=\rho b^i \tag{1.3}$$

$$\partial(\rho E)/\partial t+\partial(\rho E v^k-\sigma^{ik}v_i-q^k)/\partial x^k=\rho r+\rho b^i v_i \tag{1.4}$$

$$\partial(F_j^i/\Delta)/\partial t+\partial(F_j^i v^k/\Delta-F_j^k v^i/\Delta)/\partial x^k=0 \tag{1.5}$$

где $\rho_0$, $\rho$ — плотность материала в начальной и текущей конфигурации тела, $b^i$ — вектор массовых сил, $r$ — удельное тепловыделение, $E=U+v_iv^i/2$ — плотность полной энергии.

Соотношение (1.5), полученное в [7], является дивергентной формой общеизвестной кинематической связи

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt}\mathbf{F}^{-1}=\nabla\mathbf{v},\qquad \left.\frac{\partial F_j^i}{\partial t}\right|_{x^m}+v^k\frac{\partial F_j^i}{\partial x^k}=F_j^k\frac{\partial v^i}{\partial x^k}$$

следующей из взаимной однозначности отображения $x^i=x^i(X^m,t)$. С учетом закона сохранения массы (1.2) запишем соотношение (1.5), которое можно назвать дифференциальной формой закона сохранения совместности деформаций, в виде

$$\partial(\rho F_j^i)/\partial t+\partial(\rho v^k F_j^i-\rho v^i F_j^k)/\partial x^k=0 \tag{1.6}$$

Используя второй принцип термодинамики в форме неравенства Клаузиуса — Дюгема

$$\rho d\eta/dt-\partial(q^k/\theta)/\partial x^k-\rho r/\theta\geqslant 0 \tag{1.7}$$

получим [8, 9]:

$$\partial A/\partial\gamma_m=0,\quad \eta=-\partial A/\partial\theta,\quad \sigma_j^i=\rho F_m^i\partial A/\partial F_m^j,\quad \delta_T=q^m\partial\theta/\partial x^m\geqslant 0 \tag{1.8}$$

где $A=U-\theta\eta$ — плотность свободной энергии.

С учетом конечных соотношений (1.1), (1.2) система дифференциальных законов сохранения (1.3), (1.4), (1.6) является замкнутой системой уравнений относительно переменных $(F_n^m,\ \theta,\ v^i)$.

Дивергентная форма уравнений (1.3)—(1.6) позволяет определить не только классическое решение в областях достаточной гладкости, но и обобщенное, слабое решение [10] в областях, включающих разрывы.

Пусть $\varphi(x^m,t)=0$ — уравнение поверхности разрыва, $D$ — нормальная составляющая скорости движения, $n_i$ — вектор нормали к этой поверхности, $c=D-n^iv_i$ — скорость движения относительно частиц среды. Тогда из (1.3), (1.4) и (1.6) стандартным образом [10] следуют универсальные, пригодные для любой реологии и любого сильного разрыва соотношения

$$[\rho cE]+[\sigma^{im}v_i+q^m]n_m=0 \tag{1.9}$$

$$[\rho cv^i]+[\sigma^{im}]n_m=0,\qquad [\rho cF_j^i]+[\rho v^iF_j^m]n_m=0$$

где $[a]$ — скачок величины $a$ на разрыве.

Из третьего уравнения (1.9) следуют соотношения [7]:

$$[\rho F_j^m]n_m=0,\qquad [\rho c]=0,\qquad [F_j^i]=h^i\rho F_j^m n_m \tag{1.10}$$

где $h^i=-[v^i]/(\rho c)$. Формулы (1.10) показывают, что при взаимной однозначности отображения $x^i=x^i(X^m,t)$ девять компонент скачка $F_j^i$ полностью определены тремя компонентами вектора $h^i$.

**2. Соотношения на поверхности раздела двух фаз.** Применим формулы (1.9), (1.10) для установления соотношений на поверхности раздела двух фаз в квазистатическом приближении, когда инерционными членами можно пренебречь, т. е. $\rho_0V_0^2/\sigma_0\ll 1$. Величины $\rho_0$, $V_0$ и $\sigma_0$ представляют собой характерную плотность, скорость и напряжение соответственно.

Поверхность фазового перехода первого рода определим как поверхность сильного разрыва, на которой

$$[\theta]=0,\quad \rho c\theta[\eta]+[q^k]n_k=0,\quad c\neq 0 \tag{2.1}$$

Второе из соотношений (2.1) представляет собой условие отсутствия диссипации при переходе материальной частицы через поверхность раздела двух фаз.

Действительно, дифференциальная форма второго закона термодинамики (1.7) с учетом закона сохранения массы и формул (1.8) может быть записана для нелинейно-упругого тела в виде

$$\frac{\partial(\rho\eta)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\rho v^k\eta-\frac{1}{\theta}q^k\right)-\frac{1}{\theta}\rho r=\frac{1}{\theta^2}\delta_T\geqslant 0$$

Учитывая (1.10) и предполагая, что для произвольного объема $\tau$, пересекаемого поверхностью разрыва, интеграл от $\delta_T$ по объему $\tau$ стремится к нулю при $\tau\to 0$, т. е. поверхностная диссипация отсутствует, получим, что на сильных разрывах, на которых скачок температуры равен нулю, имеет место вторая из формул (2.1).

Тогда система (1.9) соотношений на скачках принимает вид

$$[A]=\sigma^{ij}n_ih_j, \quad [\sigma^{ij}]n_j=0 \tag{2.2}$$

где по-прежнему $A=U-\theta\eta$, $[F_j^{\ i}]=h^i\rho F_j^{\ m}n_m$. Отметим, что скорость $c$ распространения поверхности раздела двух фаз не входит явным образом в систему (2.2); относительно скорости $c$ не делается никаких предположений, кроме предположения о квазистатичности процесса, т. е. $c/V_0\sim O(1)$.

Рассмотрим необходимые условия разрешимости системы (2.2) относительно функций $\theta=\theta(F^{\circ a}_{\ b},\ n_m)$, $h^j=h^j(F^{\circ a}_{\ b},\ n_m)$. Нуль в индексе здесь и далее обозначает величины, относящиеся к одной из фаз с известным состоянием. Записывая (2.2) в виде системы четырех уравнений

$$\Phi^\circ(F^{\circ a}_{\ b},n_a,\theta,h^j)\equiv A(F^{\circ a}_{\ b}+h^a\rho^\circ F^{\circ s}_{\ b}n_s,\theta)-A^\circ(F^{\circ a}_{\ b},\theta)-\sigma^{jk}(F^{\circ a}_{\ b},\theta)n_kh_j=0$$

$$\Phi^i(F^{\circ a}_{\ b},n_a,\theta,h^j)\equiv n_k\{\sigma^{ik}(F^{\circ a}_{\ b}+h^a\rho^\circ F^{\circ s}_{\ b}n_s,\theta)-\sigma^{0ik}(F^{\circ a}_{\ b},\theta)\}=0 \tag{2.3}$$

получим условия разрешимости (2.3):

$$\partial(\Phi^1,\ \Phi^2,\ \Phi^3,\ \Phi^\circ)/\partial(h^1,\ h^2,\ h^3,\ \theta)\neq 0 \tag{2.4}$$

Вычисляя с учетом (1.8) производные, входящие в якобиан, найдем, что (2.4) удовлетворяется, если

$$N=[\eta]+n_ih_j\partial\sigma^{\circ ij}/\partial\theta\neq 0 \tag{2.5}$$

$$\det\left\|(\rho F_m^{\ a}n_a)\frac{\partial^2 A}{\partial F_m^{\ i}\,\partial F_n^{\ j}}(\rho F_n^{\ b}n_b)\right\|\neq 0 \tag{2.6}$$

Если применить полученные результаты к фазовому переходу «упругое тело — идеальная жидкость», то с учетом формул

$$\begin{gathered}A=A(V,\theta),\quad V=\det\|F_n^{\ m}\|,\quad [V]=n_ih^i,\quad \sigma_j^{\ i}=-p\delta_j^{\ i}\\ p=-\partial A/\partial V=\rho^2\partial A/\partial\rho,\quad \partial\rho/\partial F_j^{\ i}=-\rho F_i^{\ -1j}\end{gathered} \tag{2.7}$$

получим, что определитель (2.4) тождественно равен нулю. Это значит, что решение задачи по определению величин $(F_n^{\ m},\ \theta,\ v^i)$ в идеальной жидкой фазе по известному состоянию в упругой фазе в общем случае не является единственным. Причина этого заключается в том, что уравнение состояния идеальной жидкости инвариантно относительно произвольного изохорического (а не только ортогонального) преобразования актуальной конфигурации. Отсюда следует, что неединственным образом будут определяться значения скоростей $v^i$ и градиента $F_j^{\ i}$.

Для температуры $\theta$ сосуществования твердой и жидкой фаз и скачка удельного объема $V=1/\rho$ система (2.3) с учетом (2.7) приобретает вид

$$\begin{gathered}\Psi^\circ(F^{\circ a}_{\ b},n_a,[V],\theta)\equiv A(V,\theta)-A^\circ(F^{\circ a}_{\ b},\theta)+p(V,\theta)[V]=0\\ \Psi^1(F^{\circ a}_{\ b},n_a,[V],\theta)\equiv\sigma^{ij}(F^{\circ a}_{\ b},\theta)n_in_j+p(V,\theta)=0\end{gathered} \tag{2.8}$$

Необходимые условия единственности являются более слабыми по сравнению с (2.5), (2.6):

$$\partial p(V,\theta)/\partial V\neq 0,\quad [\eta]+[V]n_in_j\partial\sigma^{ij}(F^{\circ a}_{\ b},\theta)/\partial\theta\neq 0 \tag{2.9}$$

Сформулируем теперь уравнения, которые являются аналогом уравнения Клапейрона — Клаузиуса [11] для случая нелинейной термоупругой среды и определяют частные производные температуры фазового перехода $\partial\theta/\partial F^{\circ a}_{b}$ и $\partial\theta/\partial n_m$ через параметры скачка и состояние одной из фаз. Эти уравнения позволяют оценить некоторые локальные свойства температуры фазового перехода как функции $F^{\circ a}_{b}$ и $n_m$.

Для вывода уравнения для $\partial\theta/\partial n_m$ рассмотрим дифференциал

$$d\Phi^\circ=\left(\frac{\partial\Phi^\circ}{\partial n_m}+\frac{\partial\Phi^\circ}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial n_m}+\frac{\partial\Phi^\circ}{\partial h^j}\frac{\partial h^j}{\partial n_m}\right)dn_m=0$$

при $F^{\circ a}_{b}=\mathrm{const}$. Учитывая, что $\partial\Phi^\circ/\partial h^j=0$, $n_m n^m=1$, $n^m dn_m=0$ $(m=1,2,3)$, нетрудно получить, пользуясь (2.3) и (1.8): $\partial\theta/\partial n_\alpha=h^i[\sigma_i^\alpha]/N$, $n_i=(0,0,1)$ $(\alpha=1,2)$.

Аналогично, вычисляя дифференциал функции $\Phi^\circ$ при фиксированной нормали $n_m$, получим на поверхности раздела двух фаз

$$N\frac{\partial\theta}{\partial F^{\circ m}_{n}}=(\delta_m{}^a+\rho^\circ h^a n_m)\left[\frac{1}{\rho}F^{-1n}{}_k\sigma_a{}^k\right]+$$

$$+h^a\sigma^{\circ k}_{a}(n_m(F^{-1})^{\circ n}_{k}-(F^{-1})^{\circ n}_{m}n_k)-n_i h^k\frac{\partial\sigma^{\circ i}_{k}}{\partial F^{\circ m}_{n}}$$

В частном случае, когда одна из фаз — идеальная жидкость, из системы (2.8) следует

$$\partial\theta/\partial n_\alpha\equiv0,\quad \theta=\theta(F_b)$$

$$N_1\frac{\partial\theta}{\partial F^{\circ a}_{b}}+(p\delta_a{}^i+\sigma^{\circ i}_{a})V^\circ(F^{-1})^{\circ b}_{i}+\frac{\partial\sigma^{\circ ij}}{\partial F^{\circ a}_{b}}n_i n_j[V]=0$$

$$N_1=[\eta]+[V]n_i n_j\partial\sigma^{\circ ij}/\partial\theta$$

Когда обе фазы являются идеальной жидкостью, эти формулы существенно упрощаются и принимают вид, хорошо известный в термодинамике [11]: $\theta=\theta(V^\circ)$, $d\theta/dp=[V]/[\eta]$.

**3. Пример.** Рассмотрим в качестве иллюстрации сферически-симметричную задачу о равновесии твердой фазы со своим расплавом при действии точечного источника тепла. Пусть $r$ — радиус точки пространства со сферической системой координат $r$, $\chi$, $\varphi$. В начале координат $(r=0)$ действует точечный источник мощностью $4\pi Q$. На бесконечности $(r\to\infty)$ заданы радиальные напряжения $\sigma_r\to\sigma_0<0$ и температура $\theta\to\theta_0$. Действие источника приводит к плавлению части упругого пространства, ограниченного сферой $r=a$. Величина $a$ находится из решения задачи.

Предположим, что существует естественная конфигурация упругого материала при $\theta=\theta_0$. Деформации как твердой, так и жидкой фазы рассматриваются относительно этой конфигурации и полагаются малыми.

Для жидкости $(0\leqslant r\leqslant a)$ свободная энергия $A_f$ принимается в виде

$$\rho A_f=\rho A_1-p_1 I-\beta_1\Delta\theta+{}^1/_2\gamma_1(\Delta\theta)^2-\alpha_1 I\Delta\theta+{}^1/_2K_1 I^2$$
$$I=1-\rho/\rho_0,\qquad \Delta\theta=\theta-\theta_0 \tag{3.1}$$

где коэффициенты разложения по $I$ и $\Delta\theta$ являются функциями $\theta_0$. Зависимость $p=p(I,\theta)$ в этом случае имеет вид

$$p=-K_1 I+\alpha_1\Delta\theta+p_1 \tag{3.2}$$

Отсюда видно, что $K_1>0$ — объемный модуль сжатия, $\alpha_1>0$ — коэффициент линейного температурного расширения, а $p_1$ — давление, которое необходимо приложить к жидкости с температурой $\theta_0$, чтобы фазовый переход происходил без изменения объема относительно естественной конфигурации. Для материалов, у которых плавление происходит с увеличением объема, $p_1>0$.

Из уравнения равновесия $\partial p/\partial r=0$ и уравнения для энергии (1.3), которое в случае закона Фурье с коэффициентом теплопроводности $\varkappa_1=\mathrm{const}$ имеет вид $\partial^2\theta/\partial r^2+(2/r)\partial\theta/\partial r=0$, следует

$$p=p_0=\mathrm{const},\qquad \Delta\theta=B+Q/(\varkappa_1 r),\qquad B=\mathrm{const} \tag{3.3}$$

В дальнейшем потребуется выражение для радиального перемещения $u$ частиц жидкости относительно естественной конфигурации. Для его определения воспользуемся соотношением $-K_1I+\alpha_1\Delta\theta+p_1=p_0$, из которого с учетом условия $|u|<\infty$ при $r\to 0$ получается

$$u=\xi_1+g_1r,\qquad \xi_1=\alpha_1Q/(2\varkappa_1K_1)$$
$$g_1={}^1/_3(\alpha_1Q/\varkappa_1+p_1-p_0) \tag{3.4}$$

Относительно свободной энергии $A_e$ твердой фазы, которую будем считать однородным, изотропным, линейно-упругим телом, предположим, что

$$\rho A_e={}^1/_2\lambda I^2+\mu J-\alpha_0 I\Delta\theta+{}^1/_2\gamma_0(\Delta\theta)^2,\qquad I=\varepsilon_{ii},\quad J=\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{3.5}$$

где $\varepsilon_{ij}$ – тензор малых деформаций, $\lambda$, $\mu$, $\alpha_0$, $\gamma_0$ – положительные величины, возможно, зависящие от $\theta_0$. Соотношение (3.5) приводит к обычному закону Гука для термоупругости.

Из уравнения равновесия $\partial\sigma_r/\partial r+2(\sigma_r-\sigma_\varphi)/r=0$ и выражений $\varepsilon_r=\partial u/\partial r$, $\varepsilon_\chi=\varepsilon_\varphi=u/r$ следует

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2}{r^2}u=\frac{\alpha_0}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\theta(r)}{\partial r} \tag{3.6}$$

Из уравнения теплопроводности с учетом, что $\theta\to\theta_0$ при $r\to\infty$, получаем

$$\Delta\theta=\theta-\theta_0=Q/(\varkappa_0 r) \tag{3.7}$$

где $\varkappa_0$ – коэффициент теплопроводности твердой фазы.

Подставляя (3.7) в (3.6) и принимая во внимание граничные условия для напряжений при $r\to\infty$, находим

$$u=\xi_0+\frac{\sigma_0}{3K_0}r+\frac{c}{r^2},\qquad \xi_0=\frac{\alpha_0Q}{2(\lambda+2\mu)\varkappa_0} \tag{3.8}$$

$$\sigma_r=\sigma_0-\frac{4\mu}{r}\left(\xi_0+\frac{c}{r^2}\right),\qquad \sigma_\varphi=\sigma_0-\frac{2\mu}{r}\left(\xi_0-\frac{c}{r^2}\right),\qquad c=\mathrm{const}$$

Таким образом, в решение рассматриваемой задачи входят четыре неизвестные величины: $p_0$, $B$, $a$, $c$, для определения которых воспользуемся соотношениями (2.1), (2.2) на поверхности раздела фаз и условием непрерывности перемещений.

Из условий $[\theta]=0$, $[\sigma_r]=0$ и $[u]=0$ при $r=a$ находим с учетом (3.3), (3.4) и (3.7), (3.8)

$$B=\frac{Q}{a}\left(\frac{1}{\varkappa_0}-\frac{1}{\varkappa_1}\right),\qquad \sigma_0+p_0=\frac{4\mu}{a}\left(\xi_0+\frac{c}{a^2}\right)$$
$$\frac{\sigma_0}{K_0}+\frac{p_0-p_1}{K_1}=\frac{\xi_1}{a}\left(1+\frac{2\varkappa_1}{\varkappa_0}\right)-\frac{3}{a}\left(\xi_0+\frac{c}{a^2}\right) \tag{3.9}$$

Обозначая $y=(\xi_0+c/a^2)/a$, $z=2\xi_0/a=\alpha_0\Delta\theta/(\lambda+2\mu)$, где $z$ – безразмерная температура плавления, из (3.9) можно получить $y$ и $p_0$ как функции $z$:

$$y=\frac{1}{3K_1+4\mu}\left\{K_1\zeta z+\sigma_0\left(1-\frac{K_1}{K_0}\right)+p_1\right\}$$
$$\frac{p_1}{K_1}=\frac{1}{3K_1+4\mu}\left\{4\mu\zeta z-3\frac{\lambda+2\mu}{K_0}\sigma_0+4\mu\frac{p_1}{K_1}\right\}$$
$$\zeta=\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\frac{\lambda+2\mu}{K_1}\left(1+\frac{\varkappa_0}{2\varkappa_1}\right) \tag{3.10}$$

После этого инварианты тензора деформации на границе $r=a$ упругой и жидкой фаз также представимы в виде функций $z$:

$$I_0=z+\sigma_0/K_0, \qquad J={}^1/_3(z+\sigma_0/K_0)^2+{}^2/_3(3y-z)^2$$
$$I_1=z(\alpha_1/\alpha_0)(\lambda+2\mu)/K_1-(p_0-p_1)/K_1 \tag{3.11}$$

Для определения $z$ воспользуемся уравнением для скачка энергии $\rho[A]+ +p_0[I]=0$. В результате получим квадратное относительно $z$ уравнение

$$\rho A_1-\beta_1\Delta\theta^*+{}^1/_2\gamma_1(\Delta\theta^*)^2-{}^1/_2K_1I_1{}^2={}^1/_2\gamma_0(\Delta\theta^*)^2+{}^1/_2\lambda I_0{}^2+\mu J-\alpha_1I_0\Delta\theta^*+p_0I_0 \tag{3.12}$$

определяющее температуру $\theta^*$ фазового перехода при заданной реологии (3.1), (3.5) и заданных граничных условиях.

Если $|\rho A_1/\sigma_0|\gg|\sigma_0/K_0|$, $|\beta_1\Delta\theta^*/\sigma_0|\gg|\sigma_0/K_0|$, то квадратичными членами в (3.12) можно пренебречь, температура и положение поверхности фазового перехода $\theta^*=\theta_0+\rho A_1(\theta_0)/\beta_1(\theta_0)$, $a=\beta_1Q/(\rho\varkappa_0A_1)$ определятся отношением разности свободных энергий жидкой и твердой фаз в начальном состоянии. Этот случай является традиционным, когда фазовый переход первого рода характеризуется только «скрытой теплотой» и температурой фазового перехода и никак не связан с напряженно-деформированным состоянием среды. Как видно из решения, справедлив он в случае, если вклад деформаций в энергию мал и все термодинамические потенциалы совпадают между собой, являясь функцией температуры.

Если же величины $\rho A_1/\sigma_0$, $\beta_1\Delta\theta/\sigma_0$ и $\sigma_0/K_0$ одного порядка, то эффекты упругого деформирования сравнимы с чисто термическими эффектами и существенны для фазовых переходов первого рода.

Соотношения (3.10), (3.11), подставленные в (3.12), приводят к квадратному уравнению относительно $z$, явный вид которого из-за громоздкости здесь не приводится.

Предполагая, что коэффициенты этого уравнения, определяемые коэффициентами реологических соотношений (3.1) и (3.5), таковы, что существует положительное решение $z$, находим радиус зоны расплава $a=\alpha_0Q/(\varkappa_0z(\lambda+2\mu))$, значение давления $p_0$ в жидкости и значение константы $c$, задающую напряжения $\sigma_r$, $\sigma_\varphi$ в упругой части тела.

Выясним, что дает полученная система термодинамических условий на поверхности раздела фаз в случае, если мощность теплового источника $Q=0$. Из уравнений (3.7), (3.10)–(3.12) следует

$$\theta\equiv\theta_0, \qquad y=\frac{c}{a^3}=\frac{1}{3K_1+4\mu}\left\{p_1+\sigma_0\left(1-\frac{K_1}{K_0}\right)\right\}$$
$$\frac{p_0}{K_1}=\frac{1}{3K_1+4\mu}\left\{4\mu\frac{p_1}{K_1}-3\frac{\lambda+2\mu}{K_0}\sigma_0\right\}$$
$$I_1=\frac{p_1-p_0}{K_1}, \qquad I_0=\frac{\sigma_0}{K_0}, \qquad J=\frac{1}{3}\left(\frac{\sigma_0}{K_0}\right)^2+6y^2 \tag{3.13}$$

Подставляя эти величины в уравнение (3.12) для скачка энергии, получим соотношение

$$\rho A_1-{}^1/_2(p_1-p_0)^2/K_1-{}^1/_2\sigma_0{}^2/K_0+6\mu y^2-p_0\sigma_0/K_0=0 \tag{3.14}$$

которое определяет значение $\theta_0^*$. При $\theta_0\neq\theta_0^*$ все пространство будет занято либо жидкой, либо твердой фазой в зависимости от знака левой части соотношения (3.14). При $\theta_0=\theta_0^*$ возможно равновесие фаз, но, как видно из (3.13), положение границы раздела и напряженное состояние в твердой фазе определены неоднозначно.

Для устранения этой неоднозначности требуется знание количества тепла, которое было подведено к телу в однофазном состоянии с температурой $\theta_0^*$. Пусть для определенности, вначале среда была в состоянии упругости. Затем в окрестности $r=0$ телу было сообщено дополнительное количество энергии $\Delta E$, которое пошло на плавление сферической области неизвестного пока радиуса $a$. Температура всего пространства при этом осталась неизменной. В таком процессе величина $\Delta E$ равна разности свободной энергии в конечном и начальном состоянии. С учетом того, что в начальном состоянии

$$\sigma_r=\sigma_\varphi=\sigma_0, \qquad \rho A^\circ=\sigma_0{}^2/2K_0, \qquad K_0=\lambda+2\mu/3$$

а в конечном

$$I_1=(p_1-p_0)/K_1, \qquad \rho A_f=\rho A_1+{}^1/_2(p_0{}^2-p_1{}^2)/K_1 \qquad (0\leqslant r\leqslant a)$$
$$I_0=\sigma_0/K_0, \qquad J={}^1/_3(\sigma_0/K_0)^2+6(c/r^3)^2, \qquad \rho A_e={}^1/_2\sigma_0{}^2/K_0+6\mu c^2/r^6 \qquad (a\leqslant r\leqslant\infty)$$

получаем уравнение

$$\Delta E={}^4/_3\pi a^3\{\rho A_1+{}^1/_2(p_0{}^2-p_1{}^2)/K_1-{}^1/_2\sigma_0{}^2/K_0+6\mu y^2\}$$

которое определяет радиус $a$ области плавления и замыкает задачу в рассматриваемом случае.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Уманский Я. С., Скаков Ю. А.* Физика металлов. М.: Атомиздат, 1978. 352 с.
2. *Kamb W. B.* The thermodynamic theory of nonhydrostatically stressed solids.— J. Geophys. Res., 1961, v. 66, No. 1, p. 259–271.
3. *McLellan A. G.* A thermodynamical theory of systems under nonhydrostatic stresses.— J. Geophys. Res., 1966, v. 71, No. 18, p. 4341–4348.
4. *Ida Y.* The thermodynamic theory of nonhydrostatically stressed solids involving finite strains.— J. Geophys. Res., 1969, v. 74, No. 12, p. 3208–3212.
5. *Гринфельд М. А.* Об условиях термодинамического равновесия фаз нелинейно-упругого материала.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 824–828.
6. *Гиббс Дж. В.* Термодинамические работы. М.– Л.: Гостехтеоретиздат, 1951. 492 с.
7. *Кондауров В. И.* О законах сохранения и симметризации уравнений нелинейной теории термоупругости.— Докл. АН СССР. 1981, т. 256, № 4, с. 819–823.
8. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
9. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
10. *Курант Р.* Уравнение с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. М.: Наука, 1964. 567 с.


Москва

Поступила в редакцию
15.XII.1981