МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1983

УДК 531.8

О ДИНАМИКЕ МАНИПУЛЯТОРА С УЧЕТОМ ПОДАТЛИВОСТИ ШАРНИРОВ

ГОРИНЕВСКИЙ Д. М.

Рассматривается манипулятор, у которого одна из степеней свободы неидеальна, т. е. значение угла в одном из шарниров является суммой программного угла и отклонения от программы. Значения всех программных углов считаются заданными функциями времени. Предполагается, что отклонение вызвано деформацией или люфтом в шарнире или приводе. Возникающие в такой системе колебания изучаются асимптотическими методами. Рассматриваются примеры. В [1, 2] исследована динамика манипулятора с учетом упругой податливости звеньев. Методика, использованная в данной работе, аналогична подходу работы [2].

1. Рассматривается манипулятор, состоящий из N звеньев, соединенных последовательно цилиндрическими шарнирами. Массы и моменты инерции звеньев предполагаются известными. Изменение угла в каждом шарнире осуществляется независимыми приводами. Предполагается, что в захвате, находящемся на конце манипулятора, закреплен груз, масса и тензор инерции которого также известны. Считается, что внешние силы и моменты отсутствуют.

Примем в качестве обобщенных координат углы φ_k в шарнирах между последовательными звеньями (индекс соответствует номеру шарнира). Выражение для кинетической энергии манипулятора с грузом имеет вид

$$T=\sum_{j,k=1}^{N}\dot\varphi_j\dot\varphi_k A_{jk}(\varphi_1,\ldots,\varphi_N)$$

где $A_{jk}(\varphi_1,\ldots,\varphi_N)$ — матрица кинетической энергии.

Шарниры манипулятора неидеальны, т. е. двигатель связан со звеном, которое он приводит в движение, не абсолютно жестко. Тогда, обозначив через α_k угол в шарнире, который задается двигателем, а через χ_k отклонение от него, вызванное неидеальностью привода, получим $\varphi_k=\alpha_k+\chi_k$ $(k=1,\ldots,N)$. Отклонение χ_k — следствие деформаций шарнира или привода. Введем в рассмотрение потенциальную энергию этих деформаций

$$\Pi=\sum_{k=1}^{N}\Pi_k(\chi_k) \tag{1.1}$$

Деформации в различных шарнирах предполагаются независимыми, а потенциальная энергия деформации — не зависящей от программного движения.

Пусть двигатели достаточно мощные и, таким образом, неидеальность привода не влияет на их работу. В этом случае можно принять, что углы α_k — заданные функции времени $\alpha_k=\alpha_k(t)$. Уравнения Лагранжа относительно обобщенных координат χ_k имеют уже в случае двухзвенного манипулятора достаточно сложный вид.

Упростим задачу — предположим, что неидеален только один шарнир. Например, наибольшее влияние на погрешность в положении груза может оказывать неидеальность корневого шарнира. Итак

$$\chi_k=0 \quad \text{для } k=2,\ldots,N;\quad \chi_1=\chi \tag{1.2}$$

Выпишем с учетом (1.2) уравнение движения для χ:

$$A_{11}\ddot{\chi}+\Gamma_{11,1}\dot{\chi}^2+2\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{1k,1}\dot{\alpha}_k\dot{\chi}_k+\sum_{k=1}^{N}A_{1k}\ddot{\alpha}_k+\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{jk,1}\dot{\alpha}_k\dot{\alpha}_j+\frac{\partial\Pi_1}{\partial\chi_1}=0 \tag{1.3}$$

$$\Gamma_{jk,i}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial\varphi_j}+\frac{\partial A_{ij}}{\partial\varphi_k}-\frac{\partial A_{jk}}{\partial\varphi_i}\right) \tag{1.4}$$

Отметим, что $A_{ik}=A_{ik}(\varphi_1,\ldots,\varphi_N)$ и $\Gamma_{ik,j}=\Gamma_{ik,j}(\varphi_1,\ldots,\varphi_N)$.

Так как $A_{11}=I_1$ — момент инерции манипулятора с грузом относительно первого шарнира и, следовательно, от угла φ_1 не зависит, то из (1.4) следует, что $\Gamma_{11,1}={}^1/_2\partial I_1/\partial\varphi_1=0$. Получим также

$$2\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{1k,1}\dot{\alpha}_k=\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial I_1}{\partial\varphi_k}\dot{\alpha}_k=\frac{d\tilde{I}_1}{dt} \tag{1.5}$$

Обозначим в (1.3)

$$\Phi=\sum_{k=1}^{N}A_{1k}\ddot{\alpha}_k+\sum_{j,k=1}^{N}\Gamma_{jk,1}\dot{\alpha}_k\dot{\alpha}_j \tag{1.6}$$

момент сил инерции относительно первого (неидеального) шарнира.

Введем характерные размерные параметры: β — характерный программный угол разворота ($\beta\sim1$), Θ — характерное время программного движения, I_x — характерный момент инерции манипулятора с грузом (например, в некотором среднем положении), d — характерная амплитуда колебаний угла χ.

Введем безразмерный параметр $\mu=d/\beta$ и предположим $\mu\ll1$, что оправдано при достаточно жестких шарнирах и не слишком большой энергии колебаний.

Переходя в уравнении (1.3) к безразмерным переменным $\tau=t/\Theta$ и $q=\chi/d$, получим с учетом (1.5) и (1.6)

$$\mu\frac{d}{d\tau}\left(I\frac{dq}{d\tau}\right)+\frac{1}{\mu}\frac{\Pi(d)}{T_x}Q(q)+\Psi=0 \tag{1.7}$$

$$I=\frac{I_1}{I_x},\quad \Psi=\frac{\Phi\Theta}{\beta I_x},\quad Q=\frac{d}{\Pi(d)}\left.\frac{\partial\Pi}{\partial\chi}\right|_{\chi=qd} \tag{1.8}$$

$T_x=\beta^2I_x/\Theta^2$ — характерная кинетическая энергия программного движения, $\Pi(d)$ — характерная энергия колебаний.

Считаем, что в момент времени $\tau=\tau_0$ заданы

$$q|_{\tau=\tau_0}=x_0,\quad \left.\frac{dq}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}=v_0 \tag{1.9}$$

причем $x_0\sim1$ и $v_0\sim\mu^{-1}(\Pi(d)/T_x)^{1/2}$.

Далее рассматриваются колебания, описываемые уравнением (1.7).

2. Пусть в начальный момент времени в манипуляторе были возбуждены колебания относительно первого (неидеального) шарнира, например в результате захвата груза. Найдем изменение параметров этих колебаний при работе манипулятора. Пусть энергия этих колебаний $\Pi(d)$ имеет тот же порядок величины, что и кинетическая энергия программного движения T_x. Определим в этом случае характерную энергию колебаний из равенства

$$\Pi(d)=T_x \tag{2.1}$$

Переходя к быстрому времени $\theta=\tau/\mu$, получим из (1.7) с учетом (2.1)

$$\frac{d}{d\theta}\left(I(\tau)\frac{dq}{d\theta}\right)+Q(q)+\mu\Psi=0$$

Обозначим $V(q)=\int Qdy$, V выражается линейно через П. Вводя $p=Idq/d\theta$ и $H=p^2/(2I)+V(q)$, получим систему, близкую к гамильтоновой

$$dp/d\theta=-\partial H(p,q,\tau)/\partial q-\mu\Psi$$

$$dq/d\theta=\partial H(p,q,\tau)/\partial p, \quad d\tau/d\theta=\mu$$

Энергию колебаний $E=H(p(\theta),\ q(\theta),\tau)$ с точностью до малых порядка μ можно найти из условия адиабатической инвариантности для данной системы интеграла действия [3]

$$J=\oint pdq=2\sqrt{2I(\tau)}\int_{F_2}^{F_1}\sqrt{E-V(q)}\,dq\simeq\mathrm{const} \tag{2.2}$$

Здесь F_1 и F_2 — амплитудные значения координаты q, которые определяются как соответственно больший и меньший корни уравнения $V(F)-E=0$.

Зная $I(\tau)$ и $E(\tau_0)=E_0$, из (2.2) можно, выполнив интегрирование, найти зависимость $E(\tau)$ на интервале медленного времени порядка единицы. Рассмотрим подробнее два случая.

1. Пусть $V(q)=k|q|^{\lambda+2}$, где $k>0$, $\lambda>-1$. Тогда условие $J=J_0$ примет вид

$$\sqrt{I(\tau)}\int_{-F}^{F}\sqrt{E-k|q|^{\lambda+2}}dq=\sqrt{I_0}\int_{-F}^{F}\sqrt{E_0-k|q|^{\lambda+2}}\,dq \tag{2.3}$$

$$E=kF^{\lambda+2} \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.3) и выполняя интегрирование, получим $F^{\lambda+4}=F_0^{\lambda+4}I_0/I(\tau)$. Зависимость энергии от времени определится выражением $E(\tau)=E_0(I_0/I(\tau))^{(\lambda+2)/(\lambda+4)}$. Как видно, энергия колебаний уменьшается с увеличением момента инерции I, причем зависимость E от I слабее для более мягких характеристик (меньшие λ).

2. Пусть $V(q)=0$, $|q|\leqslant\delta$; $V(q)=k(|q|-\delta)^2/2$, $|q|>\delta$. Обозначив $b=F-\delta$, получим из (2.2):

$$b(\tau)=-\frac{2\delta}{\pi}+\sqrt{\frac{4\delta^2}{\pi^2}+\left[\frac{I_0b_0}{I(\tau)}\left(b_0+\frac{4\delta}{\pi}\right)\right]^{1/2}}$$

Поскольку $E=kb^2/2$, нетрудно получить отсюда зависимость $E(\tau)$. В этом случае также происходит уменьшение E с увеличением I, но по более сложному закону.

3. Рассмотрим случай, когда в начальный момент времени колебания отсутствовали, а их источником являлась работа манипулятора. Тогда характерную энергию колебаний определим из равенства

$$\Pi(d)=d\beta I_x/\Theta^2=\mu T_x \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в (1.7), получим уравнение

$$\mu \frac{d}{d\tau}\left(I(\tau)\frac{dq}{d\tau}\right)+Q(q)+\Psi=0$$

Перейдем к быстрому времени $\theta=\tau/\sqrt{\mu}$:

$$\frac{d}{d\theta}\left(I(\tau)\frac{dq}{d\tau}\right)+Q(q)+\Psi=0 \qquad (3.2)$$

Учтем, что в (1.6) $A_{ik}=A_{ik}(\alpha_1+\chi, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$. В соответствии с (1.8)

$$\Psi=\Psi(\tau, \mu q)=\Psi_1(\tau)+\mu q\Psi_2(\tau)+O(\mu^2)$$

Тогда из (3.2) имеем

$$\frac{d}{d\theta}\left(I(\tau)\frac{dq}{d\theta}\right)+Q(q)+\Psi_1(\tau)+\mu q\Psi_2(\tau)+O(\mu^2)=0 \qquad (3.3)$$

Если в уравнении (3.3) перейти к каноническим переменным, то получим систему, близкую к гамильтоновой. Можно найти первое приближение для энергии, пользуясь адиабатической инвариантностью интеграла действия [3]. Обозначив $V=\int Qdq$ и $p=I(\tau)dq/d\theta$, получим гамильтониан $H=p^2/(2I)+V(q)+q\Psi_1(\tau)$. Из адиабатической инвариантности интеграла действия следует

$$\sqrt{I(\tau)}\int\limits_{F_2}^{F_1}(E-V(q)-q\Psi_1(\tau))^{1/2}dq=\sqrt{I_0}\int\limits_{F_2}^{F_1}(E-V(q)-q\Psi_0)^{1/2}dq \qquad (3.4)$$

где F_1 и F_2 — соответственно больший и меньший корни уравнения $E-V(F)-F\Psi_1=0$. Из (3.4) можно получить значение $E(\tau)$ с точностью до малых порядка $\mu^{1/2}$ на интервале быстрого времени порядка $\mu^{-1/2}$, или медленного порядка единицы.

Однако первое приближение не дает возможности определить фазу колебаний и, следовательно, фазовые координаты в конечный момент времени. Чтобы отыскать фазу, необходимо второе приближение метода усреднения [3].

4. Представим уравнение (3.3) в стандартной форме систем с быстро вращающейся фазой. Для этого перейдем в (3.3) к новым переменным — энергии и фазе

$$E={}^1/_2 I(dq/d\theta)^2+V(q)+q\Psi_1 \qquad (4.1)$$

$$\psi=h_i+(-1)^{i+1}\frac{2\pi\sqrt{2I}}{T}\int\limits_{q}^{F_1}[E-V(y)-y\,\Psi_1]^{-1/2}\,dy \qquad (4.2)$$

Здесь h_1 и h_2 — константы, $i=1$ при $dq/d\theta<0$ и $i=2$ при $dq/d\theta\geqslant 0$, а $T=T(E, \tau)$ — период колебаний в быстром времени

$$T=\sqrt{2I(\tau)}\int\limits_{F_2}^{F_1}[E-V(q)-q\Psi_1(\tau)]^{-1/2}\,dq \qquad (4.3)$$

В новых переменных уравнение (3.3) сведется к системе

$$\begin{aligned} dE/d\theta&=\sqrt{\mu}A_1(E, q, \tau)+\\ &+\mu q[2(E-V(q)-q\Psi_1)/I]^{1/2}\Psi_2(\tau)+\ldots \\ d\psi/d\theta&=2\pi/T(E, \tau)+\sqrt{\mu}\Phi_1(E, q, \tau)+\ldots \end{aligned} \qquad (4.4)$$

В (4.4) нужно подставить $q=q(E, \psi, \tau)$ из (4.2), а функция A_1 равна $A_1=q\Psi_{1\tau}'-(E-V(q)-q\Psi_1)I_\tau'/I$. Функцию Φ_1 выписывать не будем.

Процедура построения второго приближения для систем, близких к гамильтоновой, без нахождения явного вида решения невозмущенной системы изложена в [3]. Выпишем усредненную систему второго приближения, соответствующую (4.4), причем перейдем в ней к медленному времени

$$d\langle E\rangle/d\tau=\langle A_1\rangle(\langle E\rangle, \tau); \quad d\langle\psi\rangle/d\tau=2\pi/[\sqrt{\mu}T(\langle E\rangle, \tau)] \qquad (4.5)$$

$$\langle A_1\rangle(E, \tau)=\frac{\sqrt{2I(\tau)}}{T}\int\limits_{F_2}^{F_1}\frac{A_1(E, \tau)\,dq}{\sqrt{E-V(q)-q\Psi_1}}$$

Решая последовательно уравнения (4.5), получаем $\langle E\rangle=\langle E\rangle(\tau)$ и $\langle\psi\rangle=\langle\psi\rangle(\tau\mu^{-1/2})$. Согласно теореме Боголюбова [3], $\langle\psi\rangle$ отличается от ψ на величину порядка $O(\mu^{1/2})$ на интервале быстрого времени $\theta\sim\mu^{-1/2}$ или медленного времени $\tau\sim 1$. Заметим, что уравнение для энергии в (4.5) совпадает с уравнением первого приближения и, следовательно, имеет первым интегралом интеграл действия. Таким образом, решение уравнения для энергии получим из квадратуры (3.4). После нахождения зависимости $\langle E\rangle(\tau)$ в явном виде фазу также можно найти из квадратуры.

Обозначим $I|_{\tau=\tau_0}=I_0$, $\Psi_1|_{\tau=\tau_0}=\Psi_0$. Тогда в соответствии с (1.8) и (1.9) начальные условия для (4.5) имеют вид

$$E_0=\mu I v_0^2/2+V(x_0)+x_0\Psi_0$$

$$\psi_0=(-1)^{i+1}\frac{\pi\sqrt{2I_0}}{T(E_0, \tau_0)}\int\limits_{x_0}^{F_{10}}[E_0-V(q)-q\Psi_0]^{-1/2}dq+\frac{\pi}{2}$$

При этом $i=1$, когда $v_0<0$, и $i=2$, когда $v_0\geqslant 0$.

Зная энергию и фазу колебаний, можно найти фазовую координату q, выражая ее из (4.2).

Однако метод усреднения применим только в случае непрерывных функций $I(\tau)$ и $\Psi_1(\tau)$. Зависимость момента инерции от времени $I(\tau)$ — всегда достаточно гладкая функция. Согласно (1.3), (1.6) и (3.4), функция Ψ_1 зависит от $\ddot{\alpha}_k(t)$ и будет разрывна, если одно из угловых ускорений $\ddot{\alpha}_k(t)$ разрывно. Заметим, что часто встречаются программы движения с кусочно-постоянными (или кусочно-непрерывными) ускорениями. В этом случае на участках непрерывности $\Psi_1(\tau)$ можно пользоваться адиабатической инвариантностью интеграла действия. Для момента же скачка ускорения $\ddot{\alpha}_k(t)$ необходимо производить «сшивку» решений.

Пусть τ_* — момент времени, в который Ψ_1 скачкообразно изменяется от значения Ψ_- до значения Ψ_+, причем $\Psi_+-\Psi_-=\Delta\Psi$.

Очевидно, что $dq/d\theta$ и q в (4.1) не претерпевают скачкообразных изменений при скачке Ψ_1. Следовательно, получим $\Delta E=E(\tau_*+0)-E(\tau_*-0)=q(\tau_*)\Delta\Psi$. Точность, с которой известна фазовая координата (фаза) в нелинейной системе, на порядок меньше точности по энергии [3]. Таким образом, согласно (4.6), после каждого разрыва ускорения точность снижается на один порядок, если система не квазилинейна.

Для иллюстрации предложенной методики далее рассматриваются два примера конкретного вида потенциальной энергии деформации.

5. Рассмотрим примеры колебаний с малой энергией.

Пример 1. Люфт с абсолютно жестким ограничением. Пусть потенциальная энергия деформации шарнира (1.1) имеет вид: $\Pi(\chi)=0$, $|\chi|\leqslant d$; $\Pi(\chi)=+\infty$, $|\chi|>d$. В безразмерных переменных $V(q)=0$, $|q|\leqslant 1$; $V(q)=+\infty$, $|q|>1$.

Построим формально второе приближение метода усреднения для системы (4.4). Строгого доказательства достаточной близости его к решению исходной системы в данном случае не существует. Заметим, что первое приближение для рассматриваемой системы применимо. Во всяком случае, можно рассматривать как первое приближение для энергии первую из формул (5.2).

Энергия колебаний в этом случае согласно (4.1) будет равна

$$E={}^1/_2I(\tau)\,(dq/d\theta)^2+q\Psi_1(\tau)$$

При ударах об ограничение величина $(dq/d\theta)^2$ предполагается непрерывной. Вычислим период колебаний согласно (4.3):

$$T=\begin{cases}2\sqrt{2I(E-|\Psi_1|)}/|\Psi_1|, & E\leqslant|\Psi_1|\\ 2\sqrt{2I}(\sqrt{E+|\Psi_1|}-\sqrt{E-|\Psi_1|})/|\Psi_1|, & E>|\Psi_1|\end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда все время $\Psi_1>0$ и $E<|\Psi_1|$. Это соответствует ударам только об одно ограничение в процессе колебаний. Тогда $T=2[2I(E+\Psi_1)]^{1/2}/\Psi_1$. Усредненные уравнения второго приближения (4.6) в этом случае примут вид

$$d\langle E\rangle/d\tau=\Psi_{1\tau}'(2\langle E\rangle-\Psi_1)/(3\Psi_1)-I_\tau'(\langle E\rangle+\Psi_1)/(3I)$$
$$d\langle\psi\rangle/d\tau=\pi\Psi_1/\sqrt{2\mu I(\langle E\rangle+\Psi_1)} \tag{5.1}$$

Начальные условия для уравнений (5.1) согласно (4.2) и (1.9) будут

$$E_0=\mu I_0v_0^2/2+x_0\Psi_0,\qquad \psi_0=(-1)^{i+1}\pi\sqrt{(E_0-v_0\Psi_0)/(E_0+\Psi_0)}+\pi/2$$

Находя решение уравнения (5.1) из условия, что интеграл действия — его первый интеграл, и вычислив квадратуру во втором уравнении, имеем

$$\langle E\rangle(\tau)=(E_0+\Psi_0)\,[I_0\Psi_1^2(\tau)/I(\tau)\Psi_0]^{1/3}-\Psi_1(\tau)$$
$$\langle\psi\rangle(\tau)=\psi_0+\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}\,T_0}\int_{\tau_0}^{\tau}\left[\frac{I_0^2\Psi_1(\tau)}{I^2(\tau)\Psi_0}\right]^{1/6}d\tau \tag{5.2}$$

Итак, получено выражение для энергии и фазы колебаний (5.2) на участке непрерывности угловых ускорений.

Пример 2. Линейные колебания. Запишем потенциальную энергию деформации первого шарнира (1.1) в виде $\Pi(\chi)=c\chi^2/2$. Перейдем к безразмерным переменным. Положим, согласно (3.1), $\Pi(d)=(d/\beta)T_x$. Таким образом, $\mu=2T_x/c\beta^2$ — малый параметр задачи в этом случае (шарнир считается жестким, так что $\mu\ll1$). Получаем, следовательно, в безразмерных переменных $Q(q)=2q$ и $V(q)=q^2$.

Из (4.3) период колебаний $T=\pi(2I(\tau))^{1/2}$. Усредненные уравнения второго приближения, согласно (4.5) и (4.6), имеют вид

$$d\langle E\rangle/d\tau=-2\Psi_1\Psi_{1\tau}'-I_\tau'(E+\Psi_1^2)/(2I)\qquad d\langle\psi\rangle/d\tau=1/\sqrt{\mu I} \tag{5.3}$$

Начальные условия для (5.3) находим по (4.8):

$$E_0=\mu I_0v_0^2/2+x_0^2+x_0\Psi_0$$

$$\psi_0=(-1)^{i+1}\arcsin[(x_0+\Psi_0)/\sqrt{E_0+\Psi_0^2}]+\pi(1-i)$$

Здесь $i=1$ при $v_0\geqslant0$ и $i=2$ при $v_0<0$. Воспользовавшись тем, что интеграл действия (3.4) является первым интегралом уравнения для энергии, получим

$$\langle E\rangle(\tau)=(E_0+\Psi_0^2)\,(I_0/I(\tau))^{1/2}-\Psi_1^2(\tau) \tag{5.4}$$
$$\langle\psi\rangle(\tau)=\psi_0+\frac{1}{\sqrt{\mu I_0}}\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{I_0}{I(\tau)}d\tau$$

Выписанные соотношения (5.4) позволяют найти как фазу, так и энергию колебаний при непрерывно изменяющихся угловых ускорениях $\alpha^{\cdot\cdot}{}_k(t)$.

Автор благодарит Ф. Л. Черноусько и Л. Д. Акуленко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л.* Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями.– Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 3, с. 118–124.
2. *Черноусько Ф. Л.* Динамика управляемых движений упругого манипулятора.– Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 5, с. 142–152.
3. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.

Москва

Поступила в редакцию 11.III.1983