МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1983

УДК 531.53

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ДЛИНЕ ПОДВЕСА ПРИ ПЕРЕМЕЩЕНИИ МАЯТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ

БОЛОТНИК Н. Н., НГУЕН ЧЫОНГ

Рассматривается задача о перемещении математического маятника переменной длины с массивной точкой подвеса на заданное расстояние с гашением колебаний в конце процесса. Управление движением точки подвеса осуществляется посредством приложенной к ней ограниченной силы. Исследуется режим управления системой, состоящий из трех последовательных этапов: изменения длины маятника от начального до некоторого промежуточного значения при неподвижной точке подвеса, перемещения системы при постоянной длине маятника на заданное расстояние с гашением колебаний, изменения длины до требуемого значения (точка подвеса при этом неподвижна). Решается задача об оптимальном выборе промежуточной длины маятника, обеспечивающей приведение системы в заданное состояние за наименьшее время. Подобная задача в случае, когда управление перемещением системы осуществляется изменением скорости точки подвеса маятника, рассматривалась в [1,2].

1. Рассматривается двухмассовая механическая система, представляющая собой математический маятник с массивной точкой подвеса, которая может перемещаться вдоль горизонтальной прямой. Предполагается, что маятник совершает малые колебания в вертикальной плоскости, проходящей через указанную прямую. К массивной точке подвеса в направлении ее движения приложена управляющая сила. Длина подвеса маятника может изменяться в заданных пределах $l_{\min}\leqslant l\leqslant l_{\max}$. Описанная система (фиг. 1) моделирует простые погрузочные механизмы типа мостовых кранов.

Введем обозначения: M и m — массы точки подвеса и маятника (груза) соответственно, φ — угол отклонения маятника от вертикали, x — координата точки подвеса, отсчитываемая от некоторого начального положения вдоль заданного горизонтального направления, g — ускорение свободного падения, $F(t)$ — величина управляющей силы. Пусть в начальный момент времени $t=0$ длина подвеса маятника равнялась l_1, а вся система находилась в состоянии покоя

$$x(0)=x^{\cdot}(0)=\varphi(0)=\varphi^{\cdot}(0)=0,\quad l(0)=l_1,\quad l^{\cdot}(0)=0 \tag{1.1}$$

Требуется за конечное время T переместить точку подвеса на заданное расстояние d при условии, чтобы в конце процесса длина подвеса маятника равнялась величине l_2 и вся система покоилась, т. е.

$$x(T)=d,\ x^{\cdot}(T)=0,\ \varphi(T)=\varphi^{\cdot}(T)=0,\ l(T)=l_2,\ l^{\cdot}(T)=0 \tag{1.2}$$

На величину управляющей силы $F(t)$ и скорость изменения длины подвеса $l^{\cdot}(t)$ наложены ограничения

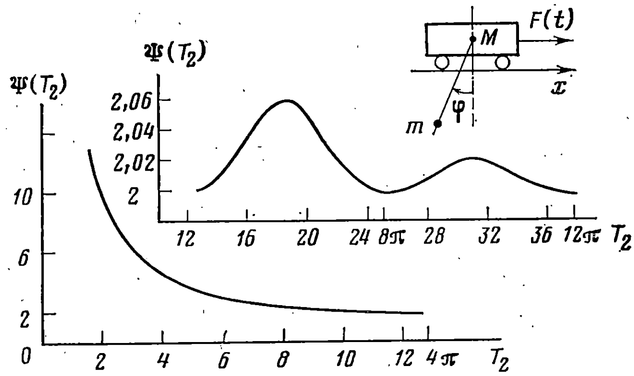
$$-F_1\leqslant F(t)\leqslant F_0,\quad |l^{\cdot}(t)|\leqslant\lambda \tag{1.3}$$

Здесь F_0, F_1, λ — заданные положительные постоянные. Время перемещения T определяется в процессе решения задачи.

Рассмотрим простой режим управления перемещением описанной системы, состоящий из трех последовательных этапов: изменения длины подвеса маятника от начального значения l_1 до некоторого промежуточного l, перемещения точки подвеса на расстояние d при постоянной длине подвеса с гашением колебаний маятника, изменения длины подвеса от значения l до конечной величины l_2. Обозначим продолжительности указанных этапов символами $T_1(l)$, $T_2(l)$, $T_3(l)$ соответственно. Полное время перевода системы из состояния (1.1) в состояние (1.2), очевидно, равно

$$T_\Sigma(l)=T_1(l)+T_2(l)+T_3(l) \tag{1.4}$$

Ставится задача об определении промежуточной длины $l=l_0$ ($l_{\min}\leqslant l_0\leqslant l_{\max}$), обеспечивающей минимизацию суммарного времени $T_\Sigma(l)$ при условии, что режим перемещения маятника с постоянной длиной из-



Фиг. 1, 2

вестен. Этот режим следует выбирать так, чтобы второй этап процесса происходил за минимальное время (при заданной промежуточной длине l). Задачи о наискорейшем перемещении маятника с постоянной длиной рассматривались в [2].

2. Движение системы при постоянной длине подвеса маятника описывается дифференциальными уравнениями

$$(m+M)x^{\cdot\cdot}-ml\varphi^{\cdot\cdot}=F(t),\quad l\varphi^{\cdot\cdot}+g\varphi=x^{\cdot\cdot} \tag{2.1}$$

Точка в (2.1) означает производную по времени t. Перейдем в (1.3), (2.1) к новым безразмерным переменным

$$x'=\frac{M}{F\,T^2}x,\quad \varphi'=\frac{Ml}{F_0T_0^2}\varphi,\quad t'=\frac{t}{T_0},\quad T_2'=\frac{T_2}{T_0},$$

$$a=\frac{Md}{F_0T_0^2},\quad b=\frac{F_1}{F_0},\quad u(t)=\frac{F(t)}{F_0}$$

$$\mu=(m+M)/m,\quad T_0=\sqrt{l/k},\quad k=(m+M)g/M \tag{2.2}$$

В новых переменных система уравнений (2.1), будучи приведенной к нормальной форме Коши, имеет следующий вид (штрихи опущены для удобства записи):

$$x^{\cdot}=v,\quad v^{\cdot}=-\varphi/\mu+u(t),\quad \varphi^{\cdot}=\omega,\quad \omega^{\cdot}=-\varphi+u(t) \tag{2.3}$$

Начальные (1.1) и конечные (1.2) условия, а также ограничения (1.3) на управляющую силу преобразуются к виду

$$x(0)=v(0)=\varphi(0)=\omega(0)=0 \tag{2.4}$$

$$x(T_2)=a,\quad v(T_2)=\varphi(T_2)=\omega(T_2)=0 \tag{2.5}$$

$$-b\leqslant u(t)\leqslant 1 \tag{2.6}$$

Опишем кратко некоторые режимы управления перемещением системы (2.3) из состояния (2.4) в состояние (2.5) при ограничениях (2.6). Задачи об оптимальном по быстродействию управлении линейными системами типа (2.2) рассматривались в работах, библиография которых содержится, например, в [2]. При построении режимов управления использовался подход предложенный в [1, 2].

Будем рассматривать релейные режимы управления двух типов: с одним переключением управления в момент t_1

$$u(t)=1,\quad 0\leqslant t\leqslant t_1,\quad u(t)=-b,\quad t_1<t\leqslant T_2 \tag{2.7}$$

и с тремя переключениями управления в моменты времени t_1, t_2, t_3

$$\begin{gathered} u(t)=1,\quad 0\leqslant t\leqslant t_1,\quad t_2\leqslant t\leqslant t_3 \\ u(t)=-b,\quad t_1<t<t_2,\quad t_3<t\leqslant T_2 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Моменты переключения t_1, t_2, t_3 и окончания процесса T_2 определяются из условия удовлетворения решения системы (2.3) при управлении (2.7) или (2.8) начальным (2.4) и конечным (2.5) соотношениям, а также условиям оптимальности.

В публикуемой работе рассматривается случай $b=1$, соответствующий симметричному ограничению на управление. В [2] доказано, что при $b=1$ управление (2.8) с тремя переключениями осуществляет наискорейший перевод системы (2.3) из состояния (2.4) в (2.5), если режим управления симметричен относительно момента времени $t=T_2/2$, т. е.

$$t_1=T_2/2-\xi,\quad t_2=T_2/2,\quad t_3=T_2/2+\xi \tag{2.9}$$

а величины T_2, ξ, a связаны соотношениями

$$\begin{gathered} T_2^2/4-\mu a/(\mu-1)=2\xi^2,\quad f(T_2)=\mu a/(\mu-1) \\ f(T_2)=T_2^2/4-2\left[\arccos\left(\cos^2 {}^1\!/_4 T_2\right)\right]^2 \end{gathered} \tag{2.10}$$

В [2] показано также, что при $b=1$ режим (2.7) с одним переключением управления обеспечивает наискорейший перевод системы из состояния (2.4) в (2.5), если между величинами a, μ, t_1, T_2 выполнены соотношения

$$T_2=4\pi n,\quad t_1=T_2/2,\quad a=(\mu-1)4\pi^2n^2/\mu \quad (n=1,2,\ldots) \tag{2.11}$$

и отмечается, что при $a\mu/(\mu-1)\to 4\pi^2n^2$ режим управления (2.8)–(2.10) переходит в режим (2.7), (2.11). В [3] исследовалась задача оптимального перемещения рассматриваемой маятниковой системы в случае, когда допускается мгновенное (импульсное) торможение точки подвеса ($b\to\infty$). Показано, что оптимальное время перемещения при $b\to\infty$ стремится к величине $T_2=[2\mu a/(\mu-1)]^{1/2}$.

3. Будем предполагать, что в начальный момент времени груз находится на земле или специальной платформе, не позволяющей осуществить его опускание до начала перемещения, и $l_{\max}=l_1$.

Величины, обозначающие время, будем выражать в исходных размерных переменных, чтобы выявить зависимость от промежуточной длины l. Выпишем в явном виде продолжительность каждого из этапов процесса перемещения, описанного в п. 1. Наименьшая продолжительность первого этапа равна, очевидно, времени подъема груза на высоту l_1-l с максимально допустимой скоростью

$$T_1(l)=(l_1-l)/\lambda \tag{3.1}$$

Время оптимального перемещения маятника с постоянной длиной l на заданное расстояние с гашением колебаний равно

$$T_2(l)=T_0T_2=\sqrt{l/k}\,T_2 \tag{3.2}$$

где T_2 (без указания аргумента) — безразмерное время оптимального перемещения системы на втором этапе, определяемое соотношениями (2.10), (2.11). Наименьшая продолжительность третьего этапа процесса равна времени изменения длины от промежуточного значения до конечного с максимально допустимой скоростью

$$T_3(l)=|l_2-l|/\lambda \tag{3.3}$$

Из (3.1)—(3.3) следует, что суммарное время перемещения системы (1.4) вычисляется по формулам

$$T_\Sigma(l)=(l_1-l_2)/\lambda+\sqrt{l/k}\,T_2 \quad (l_2\leqslant l)$$

$$T_\Sigma(l)=(l_1+l_2)/\lambda-2l/\lambda+\sqrt{l/k}\,T_2 \quad (l_2>l) \tag{3.4}$$

Ниже излагается решение задачи о минимизации суммарного времени процесса $T_\Sigma(l)$ за счет выбора величины l в случае, когда перемещение системы с постоянной длиной маятника обеспечивается описанными в п. 2 режимами управления с одним (2.7) или тремя (2.8) переключениями.

Разобьем множество допустимых значений искомого параметра l, определяемое неравенствами $l_{\min}\leqslant l\leqslant l_{\max}=l_1$, на два подмножества, имеющих не более одной общей точки

$$\Omega_1=\{l: L_1=\max[l_{\min}, l_2]\leqslant l\leqslant l_1\}$$

$$\Omega_2=\{l: l_{\min}\leqslant l\leqslant \min[l_1, l_2]=L_2\}$$

При $l\in\Omega_1$ и $l\in\Omega_2$ суммарное время $T_\Sigma(l)$ вычисляется по первой и второй формуле (3.4) соответственно. Как следует из (2.11), режим управления с одним переключением может обеспечить перемещение системы на заданное расстояние с гашением колебаний тогда и только тогда, когда выполнены соотношения

$$l=\frac{hd}{4\pi^2n^2} \quad h=\frac{\mu}{\mu-1}\frac{Mk}{F_0}, \quad T_2=4\pi n \quad (n=1,2,\ldots) \tag{3.5}$$

Первое из равенств (3.5) представляет собой последнее соотношение (2.11), выраженное в исходных размерных переменных (см. (2.2)). Обозначим символом n_* минимальное натуральное число n, удовлетворяющее неравенству $hd/(4\pi^2n^2)\leqslant l_1$, а l_* — максимальную длину маятника, удовлетворяющую ограничению $l_*\leqslant l_1$, при которой возможен перевод системы из состояния (2.4) в состояние (2.5) при помощи режима с одним переключением управления ($l_*=hd/(4\pi^2n_*^2)$). Исследование функции $T_\Sigma(l)$ (3.4) на минимум при условиях (3.5) и ограничениях $l_{\min}\leqslant l\leqslant l_1$ приводит к решению задачи о выборе оптимального значения промежуточной длины маятника l_0, если режим управления перемещением системы имеет одну точку переключения.

Если $l_*<l_{\min}$, то задача решения не имеет. Если $l_*\in\Omega_1$, то

$$l_0=hd/(4\pi^2n^2), \quad T_\Sigma(l_0)=(l_1-l_2)/\lambda+2\sqrt{hd/k}$$

В качестве n можно взять любое натуральное число, удовлетворяющее соотношению $hd/(4\pi^2n^2)\in\Omega_1$.

Если $l_*\in\Omega_2$, то $l_0=l_*$

$$T_\Sigma(l_0)=(l_1+l_2)/\lambda-2l_*/\lambda+2\sqrt{hd/k}$$

Переходим к решению задачи в случае, если перемещение системы с постоянной длиной маятника реализуется посредством режима (2.8) с тремя переключениями управления. Исследуем сначала случай $l\in\Omega_1$, когда суммарное время процесса $T_\Sigma(l)$ определяется первым равенством

(3.4). Из (2.2), (2.10) вытекает, что между длиной маятника l и безразмерным временем перемещения T_2 существует зависимость

$$f(T_2)=hd/l, \quad h=\mu Mk/[(\mu-1)F_0] \tag{3.6}$$

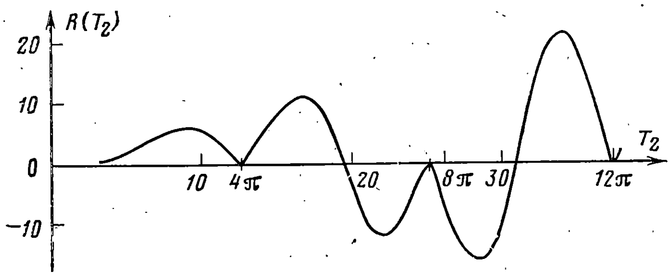
В [2] установлено, что функция $f(T_2)$ (2.10) монотонно возрастает от 0 до ∞ при увеличении T_2 от 0 до ∞. Выразив из (3.6) величину l через T_2 и подставив полученное соотношение в первое равенство (3.4), имеем

$$T_\Sigma(l(T_2))=\frac{l_1-l_2}{\lambda}+\sqrt{\frac{hd}{k}}\,\Psi(T_2), \quad \Psi(T_2)=\frac{T_2}{\sqrt{f(T_2)}} \tag{3.7}$$

Из выражения (2.10) для функции $f(T_2)$ непосредственно вытекает, что для всех $T_2\geqslant 0$ выполняется неравенство $\Psi(T_2)\geqslant 2$. Производная функции $\Psi(T_2)$ равна

$$\Psi'(T_2)=\chi(T_2)/2[f(T_2)]^{3/2}, \quad \chi(T_2)=2f(T_2)-T_2f'(T_2) \tag{3.8}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что в точках $T_2=4\pi n$ ($n=1, 2, \ldots$) функция $\chi(T_2)$ и, следовательно, производная функции $\Psi(T_2)$ обращаются в нуль. В этих точках функция $\Psi(T_2)$ принимает



Фиг. 3

минимальное значение, равное $\Psi(4\pi n)=2$. Анализ функции $\chi(T_2)$ показывает, что эта функция имеет единственный нуль на каждом интервале вида $4\pi n<T_2<4\pi(n+1)$, $n=0, 1, 2 \ldots$ и, следовательно, между любыми двумя точками абсолютного минимума $T_2=4\pi n$ ($n=1, 2, \ldots$) функция $\Psi(T_2)$ имеет единственную стационарную точку, являющуюся точкой локального максимума. При $T_2\to\infty$ $\Psi(T_2)\to 2$. График функции $\Psi(T_2)$ представлен на фиг. 2. Поскольку минимум функции $T_\Sigma(l(T_2))$ (3.7) достигается одновременно с минимумом функции $\Psi(T_2)$, то из описанных выше свойств функции $\Psi(T_2)$ вытекает решение задачи о выборе оптимальной промежуточной длины маятника $l=l_0^{(1)}$ при $l\in\Omega_1$.

Обозначим через $T_2^{l_1}$ и $T_2^{L_1}$ значения величины T_2, отвечающие в силу (3.6) длинам l_1 и $L_1=\max[l_{\min}, l_2]$ соответственно, т. е.

$$T_2^{l_1}=f^{-1}(hd/l_1), \quad T_2^{L_1}=f^{-1}(hd/L_1) \tag{3.9}$$

Здесь f^{-1} — функция, обратная $f(T_2)$. Так как функция $f(T_2)$ монотонно возрастает, то $T_2^{l_1}<T_2^{L_1}$, если $\Omega_1\neq\varnothing$. Если существуют натуральные числа n, такие, что выполняются неравенства

$$T_2^{l_1}\leqslant 4\pi n\leqslant T_2^{L_1} \tag{3.10}$$

то

$$l_0^{(1)}=hd/(4\pi^2n^2), \quad T_\Sigma(l_0^{(1)})=(l_1-l_2)/\lambda+2\sqrt{hd/k}$$

Если неравенства (3.10) не выполняются ни при каком натуральном n, то

$$l_0^{(1)}=l_1, \quad T_\Sigma(l_0^{(1)})=(l_1-l_2)/\lambda+\sqrt{hd/k}\;\Psi(T_2^{l_1}), \quad \Psi(T_2^{l_1})\leqslant\Psi(T_2^{L_1})$$

$$l_0^{(1)}=L_1, \quad T_\Sigma(l_0^{(1)})=(l_1-l_2)/\lambda+\sqrt{hd/k}\;\Psi(T_2^{L_1}), \quad \Psi(T_2^{l_1})\geqslant\Psi(T_2^{L_1})$$

Отметим, что при выполнении неравенств (3.10) режим управления с тремя переключениями переходит в режим с одним переключением.

Рассмотрим теперь случай $l \in \Omega_2$. Выразив из (3.6) величину l через T_2 и подставив полученное соотношение во второе равенство (3.4), имеем

$$T_\Sigma(l(T_2)) = (l_1+l_2)/\lambda + \sqrt{hd/k}\, g(T_2)$$
$$g(T_2) = T_2/\sqrt{f(T_2)} - \varkappa/f(T_2), \quad 0<\varkappa = 2\sqrt{hdk}/\lambda \tag{3.11}$$

Из (3.11) следует, что минимум времени $T_\Sigma(l(T_2))$ достигается одновременно с минимумом функции $g(T_2)$. Производная $g'(T_2)$ функции $g(T_2)$ равна

$$g'(T_2) = \frac{f'(T_2)}{f^2(T_2)}[\varkappa - R(T_2)], \quad R(T_2) = -\frac{\sqrt{f(T_2)}}{2f'(T_2)}\chi(T_2) \tag{3.12}$$

Функция $\chi(T_2)$ определяется равенством (3.8). Как было отмечено, функция $f(T_2)$ монотонно возрастающая и множитель перед выражением в квадратной скобке в первом равенстве (3.12) положителен. Следовательно, знак производной $g'(T_2)$ определяется знаком выражения в квадратной скобке. Из (3.12) вытекает, что корни T_2^* уравнения $R(T_2)=\varkappa$ являются стационарными точками функции $g(T_2)$, причем T_2^* — точка локального максимума (минимума), если $R'(T_2^*)>0$ ($R'(T_2^*)<0$).

Поскольку множитель перед $\chi(T_2)$ в выражении (3.12) для $R(T_2)$ отрицателен при всех $T_2>0$, то из отмеченных выше свойств функций $\chi(T_2)$ (3.8) следует, что функция $R(T_2)$ обращается в нуль в точках $T_2=4\pi n$ ($n=1, 2, \ldots$), а также в единственной внутренней точке каждого интервала $4\pi n<T_2<4\pi(n+1)$. График функции $R(T_2)$ изображен на фиг. 3. Согласно изложенному, находим оптимальную промежуточную длину маятника $l=l_0^{(2)}$ при условии $l\in\Omega_2$. Обозначим через $T_2^{L_2}$ и $T_2^{l_{\min}}$ величины (ср. (3.9)): $T_2^{L_2}=f^{-1}(hd/L_2)$, $T_2^{l_{\min}}=f^{-1}(hd/l_{\min})$.

Если $\Omega_2\neq\varnothing$, то из монотонного возрастания функции $f(T_2)$ вытекает, что $T_2^{L_2}<T_2^{l_{\min}}$. Обозначим через Γ_1 множество корней T_2^* уравнения $R(T_2)=\varkappa$, принадлежащих отрезку $[T_2^{L_2}, T_2^{l_{\min}}]$ и удовлетворяющих неравенству $R'(T_2^*)<0$. Если $\varkappa-R(T_2)>0$ для всех $T_2\in[T_2^{L_2}, T_2^{l_{\min}}]$, то

$$l_0^{(2)}=L_2, \quad T_\Sigma(l_0^{(2)}) = (l_1+l_2)/\lambda+\sqrt{hd/k}\; g(T_2^{L_2})$$

Если $\varkappa-R(T_2)<0$ для всех $T_2\in[T_2^{L_2}, T_2^{l_{\min}}]$, то

$$l_0^{(2)}=l_{\min}, \quad T_\Sigma(l_0^{(2)}) = (l_1+l_2)/\lambda+\sqrt{hd/k}\; g(T_2^{l_{\min}})$$

Если на отрезке $[T_2^{L_2}, T_2^{l_{\min}}]$ существуют корни уравнения $R(T_2)=\varkappa$, то

$$l_0^{(2)}=\min_{T_2\in\Gamma}\frac{hd}{f(T_2)}, \quad \Gamma=\Gamma_1\cup\{T_2^{L_2}\}\cup\{T_2^{l_{\min}}\}$$

$$T_\Sigma(l_0^{(2)}) = (l_1+l_2)/\lambda+\sqrt{hd/k}\; g(f^{-1}(hd/l_0^{(2)})) \tag{3.13}$$

Отметим, что выражения (3.13) дают исчерпывающее решение задачи о нахождении величины $l_0^{(2)}\in\Omega_2$, минимизирующей функцию $T_\Sigma(l)$ (3.4), если допустить, что множество Γ_1 может быть и пустым. Анализ знака разности $\varkappa-R(T_2)$, а также решение уравнения $R(T_2)=\varkappa$ с анализом знака производной функции $R(T_2)$ в точках, являющихся корнями этого уравнения, удобно проводить используя график функции $R(T_2)$, представленный на фиг. 3.

Окончательное решение исходной задачи о нахождении оптимального значения промежуточной длины маятника $l_{min} \leqslant l_0 \leqslant l_1$, минимизирующего суммарное время $T_\Sigma(l)$ перевода рассматриваемой системы из состояния (1.1) в состояние (1.2), если перемещение вдоль горизонтальной прямой осуществляется при помощи режима (2.8) с тремя переключениями управления, находится сравнением величин $l_0^{(1)}$ и $l_0^{(2)}$:

$$l_0 = l_0^{(1)}, \text{ если } \Omega_2 = \varnothing; \quad l_0 = l_0^{(2)}, \text{ если } \Omega_1 = \varnothing;$$

$$l_0 = \min[l_0^{(1)}, l_0^{(2)}], \text{ если } \Omega_1 \neq \varnothing, \quad \Omega_2 \neq \varnothing$$

Авторы благодарят Л. Д. Акуленко и Ф. Л. Черноусько за обсуждение постановки задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мамалыга В. М., Черноусько Ф. Л.* Управление перемещением груза в вертикальной плоскости.– Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 4, с. 93–101.
2. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
3. *Нгуен Чыонг.* Управление колебаниями маятниковой системы с переменной длиной подвеса.– Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 5, с. 28–36.

Москва, Ханой

Поступила в редакцию
23.VI.1981