

УДК 531.383

О НАБЛЮДАЕМОСТИ В ЗАДАЧЕ КОРРЕКЦИИ ГИРОГОРИЗОНТКОМПАСА

ВАВИЛОВ С. М.

Задача коррекции гироскопического компаса обсуждается с точки зрения наблюдаемости. При этом используется известная аналогия, существующая между гироскопическим компасом и инерциальной навигационной системой.

1. Чувствительный элемент гироскопического компаса (сферический маятник с двумя гироскопами, объединенными при помощи зубчатых секторов и связанными пружиной) реализует компасный трехгранник $Mz_1z_2z_3$ (Mz), оси которого Mz_2 и Mz_3 направлены вдоль суммарного кинетического момента гироскопов и вдоль линии маятниковости соответственно.

Прецессионные уравнения движения гиросферы в проекциях на Mz при условии, что момент $N(\varepsilon)$, развиваемый пружиной, выбран следующим образом $N(\varepsilon) = -(4B^2/mlR) \sin \varepsilon \cos \varepsilon$, имеют вид [1]:

$$-\omega_3' 2B \cos \varepsilon = M_1, (2B \cos \varepsilon)' = M_2, \omega_2' 2B \cos \varepsilon = M_3, \omega_2' = 2B \cos \varepsilon / mlR \quad (1.1)$$

Здесь $\omega' = (\omega_1', \omega_2', \omega_3')^*$ — абсолютная угловая скорость трехгранника Mz в проекциях на его оси (* — символ транспонирования), 2ε — угол разведения гироскопов, B — величина кинетического момента каждого из гироскопов, m — масса гиросферы, l — смещение ее центра масс по оси Mz_3 , M_i — проекции моментов силы тяжести и силы инерции на оси Mz , R — радиус земной сферы. Вводя вектор удельной силы $\mathbf{f} = g\mathbf{r}/R + \mathbf{r}''$, где \mathbf{r} — радиус-вектор точки M в инерциальной системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ ($O\xi$) с началом в центре Земли, запишем уравнения (1.1) в виде

$$\omega_1' = 0, R\omega_2' = f_1, R\omega_2'\omega_3' = f_2 \quad (1.2)$$

Эти уравнения по форме совпадают с уравнениями движения горизонтируемой платформы с двумя ньютонометрами [2], ось Mz_1 которой связана с приборной скоростью $\mathbf{v}' = (\omega_2'R, -\omega_1'R, 0)^*$. Указанная аналогия в поведении приборов позволяет сформулировать и решать задачу коррекции гироскопического компаса методами, применяемыми в теории корректируемых инерциальных навигационных систем [3].

2. Как гироскопический компас, так и система инерциальной навигации (1.2) моделируют движение трехгранника Дарбу $Mx_1x_2x_3$ (Mx), связанного с вертикалью и вектором абсолютной скорости точки подвеса. Если в начальный момент движения величина абсолютной скорости точки подвеса $v(0)$ равна $v'(0)$, а Mz совпадает с Mx , то они совпадают в течение всего времени движения и $v(t) = v'(t)$.

Но вследствие начальных погрешностей, а также возмущений, возникающих из-за неидеальности конструкции прибора, трехгранники Mz и Mx не совпадают. Ориентацию первого относительно второго можно определить при помощи вектора малого поворота $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^*$, заданного проекциями на Mx , при этом α_3 — азимутальная ошибка, а α_1 и α_2 — ошибки построения вертикали.

Упомянутые выше возмущения в общем случае сводятся к погрешности Δ_2 в угловой скорости ω_2' , к моменту $mlR\Delta M_3$ вокруг оси Mz_3 и к моменту силы $\Delta \mathbf{f} = (\Delta f_1, \Delta f_2, 0)^*$, приложенной к центру тяжести гиросферы.

ры [4]. Ограничимся рассмотрением тех погрешностей, которые возникают, когда вследствие перекосов и дебалансов оси кожухов не параллельны, центр тяжести каждого гироскопа смещен с оси вращения кожуха, а кинетические моменты не ортогональны осям вращения кожухов. Тогда можно показать [4], что с точностью до малых более высокого порядка

$$\Delta_2 = -\omega_3 \Delta, \quad \Delta M_3 = -\omega_2 \Delta, \quad \Delta f = 0 \quad (2.1)$$

где Δ — малый угол между вектором суммарного кинетического момента гироскопов и его проекцией на приборный горизонт.

Введем матрицы ориентации A_z и A_x трехгранников Mz и Mx относительно $O\xi$, удовлетворяющие уравнениям Пуассона

$$A_z \dot{\cdot} = \omega \hat{\cdot} A_z \quad (2.2)$$

$$A_x \dot{\cdot} = \omega \hat{\cdot} A_x \quad (2.3)$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^*$ — абсолютная угловая скорость трехгранника Mx , $\omega'' = (\omega_1', \omega_2' + \Delta_2, \omega_3')^*$ (проекции на оси соответствующих трехгранников), символом $\hat{\cdot}$ отмечена кососимметрическая матрица, поставленная в соответствие вектору, обозначенному той же буквой

$$\omega \hat{\cdot} = \begin{vmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{vmatrix}$$

Матрицы A_z и A_x связаны соотношением (где E — единичная матрица)

$$A_z = (E + \alpha \hat{\cdot}) A_x \quad (2.4)$$

Вводя малые компоненты $\Delta \omega_i = \omega_i' - \omega_i$ ($i=1, 2, 3$) вектора $\Delta \omega$ и пренебрегая величинами выше первого порядка малости, из (2.2) — (2.4) получим первую группу уравнений ошибок

$$\begin{aligned} \alpha_1 \dot{\cdot} &= \omega_3 \alpha_2 - \omega_2 \alpha_3 + \Delta \omega_1 \\ \alpha_2 \dot{\cdot} &= -\omega_3 \alpha_1 + \Delta \omega_2 + \Delta_2 \\ \alpha_3 \dot{\cdot} &= \omega_2 \alpha_1 + \Delta \omega_3 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Вторую группу уравнений ошибок получим, переписав (1.2) в проекциях на Mx , учитывая ΔM_3 :

$$\begin{aligned} \omega_2 \Delta \omega_1 &= \Delta M_3; \quad \Delta \omega_2 \dot{\cdot} = (\omega_2^2 - g/R) \alpha_2 + \omega_3 \omega_2 \alpha_3 \\ \omega_3 \Delta \omega_2 + \omega_2 \Delta \omega_3 &= (g/R - \omega_2^2) \alpha_1 - \omega_2 \dot{\cdot} \alpha_3 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Введем безразмерные величины, сохранив прежние обозначения для угловых скоростей, $\omega_2 = \omega_2 / \omega_2^0$, $\omega_3 = \omega_3 / \omega_3^0$, $\Delta \omega_i = \Delta \omega_i / \omega_0$, $\tau = \omega_0 t$, $\mu = \omega_2^0 / \omega_0$, $\lambda = \omega_3^0 / \omega_0$, $\omega_0^2 = g/R$, где ω_2^0 , ω_3^0 — соответствующие характерные значения, и преобразуем (2.5), (2.6), принимая во внимание (2.1):

$$\begin{aligned} \alpha_1 \dot{\cdot} &= \lambda \omega_3 \alpha_2 - \mu \omega_2 \alpha_3 - (\omega_2 \dot{\cdot} / \omega_2) \Delta \\ \alpha_2 \dot{\cdot} &= -\lambda \omega_3 \alpha_1 + \Delta \omega_2 - \lambda \omega_3 \Delta, \quad (\mu \omega_2 \alpha_3) \dot{\cdot} = \alpha_1 - \lambda \omega_3 \Delta \omega_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \Delta \omega_2 \dot{\cdot} &= -(1 - \mu^2 \omega_2^2) \alpha_2 + \lambda \omega_3 (\mu \omega_2 \alpha_3) \\ \alpha_3 \dot{\cdot} &= \mu \omega_2 \alpha_1 + \Delta \omega_3, \quad \Delta \omega_1 = -(\omega_2 \dot{\cdot} / \omega_2) \Delta \end{aligned} \quad (2.8)$$

Уравнения (2.7) при $\Delta = 0$ совпадают с уравнениями малых колебаний гироскопа, полученными в [1], если сделать замену $\alpha_1 \rightarrow \beta$, $\alpha_2 \rightarrow \gamma$, $\alpha_3 \rightarrow \alpha$, $\Delta \omega_2 \rightarrow \delta 2B \sin \sigma / ml \sqrt{gR}$.

В последнем уравнении (2.7) пренебрегаем членом $\mu^2 \omega_2^2 \alpha_2$, так как μ^2 не превышает 0,01 при движении точки M со скоростью, не превышающей скорость звука.

Далее будем предполагать Δ постоянным на интервале коррекции. Обозначим

$$B_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad B_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$B = B_1 + \lambda \omega_3 B_2, \quad \mathbf{b} = (-\omega_2' / \omega_2, -\lambda \omega_3, 0, 0)^* \\ \mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \mu \omega_2 \alpha_3, \Delta \omega_2)^*$$

и перепишем (2.7) в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta, \quad \Delta' = 0 \quad (2.9)$$

3. Будем считать, что для коррекции гиригоризонткомпаса привлекается дополнительная информация о компонентах относительной скорости V_1, V_2 в осях Mz , поставляемая доплеровским лагом с постоянной погрешностью 0,1 м/с.

Пусть также есть возможность измерять угол разведения гироскопов, т. е. имеется информация об ω_2' , вырабатываемая самим гиригоризонткомпасом. Погрешностью измерения угла пренебрежем по сравнению с ошибкой измерения скорости.

Задачу оценивания вектора \mathbf{x} и Δ при помощи данной информации назовем задачей коррекции гиригоризонткомпаса и для ее решения предварительно представим информацию в стандартной форме.

Перепишем соотношение $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{w}$, где \mathbf{V} — относительная, а \mathbf{w} — переносная скорости точки M , в проекциях на Mx , используя равенства $V_x = -(E - \alpha^2)V_z, R\omega_2 = R(\omega_2' - \Delta\omega_2)$:

$$R(\omega_2' - \Delta\omega_2) = V_1 - V_2\alpha_3 + Ru \cos \varphi \cos \kappa \quad (3.1)$$

$$0 = V_2 + V_1\alpha_3 - Ru \cos \varphi \sin \kappa, \quad 0 = V_3 - V_1\alpha_2 + V_2\alpha_1$$

Здесь V_i — проекции на оси Mz , u — угловая скорость вращения Земли, κ — азимутальный угол, отсчитываемый от направления на восток до оси Mx_1 в положительном направлении, φ — широта места. Исключая κ из первых двух уравнений (3.1), положив $\omega_2^0 = u, \mu_1 = V^0 / v^0$ и переходя к безразмерным величинам, найдем

$$0,5\mu_1 [\mu_1^2 V^2 - \cos^2 \varphi + (\omega_2')^2 - 2\mu_1 \omega_2' V_1] = -\mu_1 V_2 x_3 + (v - \mu_1 V_1) x_4 \quad (3.2)$$

Широту φ можно считать интегрируя уравнения (2.3):

$$\sin \varphi = \sin \varphi(0) + \mu_1 \mu_1 \int_0^\tau V_2 \omega_2' d\tau + \mu_1 z \quad (3.3)$$

При этом ошибка счисления широты z удовлетворяет уравнению

$$z' = V_1 x_3 - V_2 x_4 \quad (3.4)$$

Подставляя (3.3) в (3.2), получим необходимое нам измерение

$$\sigma = 0,5 \left[\mu_1^2 V^2 + \left(\sin \varphi(0) + \mu_1 \mu_1 \int_0^\tau V_2 \omega_2' d\tau \right)^2 - 1 + (\omega_2')^2 - \right. \\ \left. - 2\mu_1 \omega_2' V_1 \right] = -\mu_1 V_2 x_3 + (v - \mu_1 V_1) x_4 - \mu_1 \mu_1 \sin \varphi z \quad (3.5)$$

Вводя векторы $\mathbf{h}_1(\tau) = (0, 0, -\mu_1 V_2, v - \mu_1 V_1)^*$ и $\mathbf{h}_2(\tau) = (0, 0, V_1, -V_2)^*$, сформулируем задачу оценивания в стандартной форме: требуется оценить

x , z и Δ , подчиняющиеся уравнениям

$$\dot{x} = Bx + b\Delta, \quad \dot{z} = h_2^*x, \quad \dot{\Delta} = 0 \quad (3.6)$$

при помощи измерения

$$\sigma = h_1^*x - \mu\mu_1 \sin \varphi z \quad (3.7)$$

4. Для решения поставленной задачи необходимо в первую очередь исследовать наблюдаемость системы (3.6), (3.7). Однако отсутствие информации об ω_2 и ω_3 , входящих в матрицу состояния, требует дополнительных предположений о траектории точки M . Особый интерес представляет рассмотрение стационарных движений — движения по ортодромии и циркуляции, совершаемых с постоянной относительной скоростью. В этих ситуациях появляется возможность оценивать вектор состояния простым способом при помощи стационарных асимптотических фильтров [5], предварительно учитывая уровень ошибок в измерении и его влияние на наблюдаемость отдельных переменных.

4.1. Рассмотрим равномерное движение точки M в плоскости ортодромии, проходящей через ось $O\xi_1$. Обозначим ϑ — угол наклона плоскости ортодромии к плоскости экватора, ψ — полярный угол в плоскости ортодромии. Произведя необходимые вычисления, найдем

$$\begin{aligned} v^2 &= (\mu_1 V + \cos \vartheta)^2 + (\sin \vartheta \cos \psi)^2 \\ \omega_3 &= \sin \varphi (1 + \mu_1 V_1 / v) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$V_1 = V(\mu_1 V + \cos \vartheta) / v, \quad V_2 = V \sin \vartheta \cos \psi / v$$

$$V_1^* = \mu\mu_1 \sin \varphi V_1 V_2 / v, \quad V_2^* = -\mu\mu_1 \sin \varphi V_1^2 / v, \quad v^* = -\mu\mu_1 \sin \varphi V_2, \quad \lambda = \mu$$

Для удобства исследования введем новые переменные

$$y = G_1 x, \quad z = G_2 x, \quad G_i = \|h_i, B_1^* h_i, -B_2^* h_i, B_2^* B_1^* h_i\|^* \quad (4.2)$$

Используя формулы (4.1), получим систему уравнений для y , z , Δ :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (B_2 + \mu \sin \varphi B_1) y + \mu \sin \varphi (\mu_1 z + b_1 \Delta) \\ \dot{z} &= (B_2 + \mu \sin \varphi B_1) z + \mu \sin \varphi b_2 \Delta \\ \dot{\Delta} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\sigma = y_1 - \mu\mu_1 \sin \varphi z \quad (4.4)$$

$$b_1 = (0, v - \mu_1^2 V^2 / v, 0, 2\mu_1 V_2)^*, \quad b_2 = (0, -V_2, 0, -V_1 - \mu_1 V^2 / v)^*$$

Система (4.3), (4.4) стационарна на интервале коррекции $\tau \in (0, 1)$ с точностью $\mu^2 \mu_1$.

Будем предполагать, что характерное значение ошибок гирогоризонт-компыаса $x^\circ \sim 1,5 \cdot 10^{-3}$ рад, или пять угловых минут. Тогда для погрешности $\Delta\sigma$ в измерении (3.5), связанной с неточностью информации п. 3, получим

$$\Delta\sigma \sim 0,1 \mu x^\circ \quad (4.5)$$

Разберем вначале случай движения корабля, т. е. $V^\circ \sim 15$ м/с, $\mu_1 \sim 0,03$. Согласно (4.5), второе слагаемое в правой части (4.4) имеет порядок ошибки измерения, поэтому его следует отбросить. В уравнениях (4.3) также пренебрежем членами порядка $\mu\mu_1$. В результате придем к системе уравнений только для y и Δ

$$\dot{y} = (B_2 + \mu \sin \varphi B_1) y + \mu \sin \varphi b_1 \Delta, \quad \dot{\Delta} = 0, \quad \sigma = y_1 \quad (4.6)$$

При анализе наблюдаемости системы (4.6) воспользуемся понятием о мере наблюдаемости для стационарных систем [6]. Результаты такого анализа следующие: на единичном интервале коррекции $\tau \in (0, 1)$ переменные y_1 и y_2 наблюдаемы с мерой единица и точность их оценки порядка $\Delta\sigma$; переменные y_3 , y_4 и Δ наблюдаемы с мерой $\mu \sin \varphi$ и, следовательно,

точность их оценки порядка $\Delta\sigma/\mu \sin \varphi \sim 0,1x^\circ$. Последнее легко проверить, если оценивание осуществляется при помощи стационарного асимптотического фильтра [5]. В этом случае коэффициенты усиления в уравнениях для оценок последних трех переменных будут пропорциональны величине $1/\mu \sin \varphi$.

Оценку вектора x получим при помощи преобразования, обратного к (4.2), $\det G_1 \neq 0$.

Хорошо наблюдаемые переменные y_1 и y_2 представляют собой проекции двумерных векторов соответственно $(x_3, x_4)^*$ и $(x_1, x_2)^*$ на северное направление, а слабо наблюдаемые y_3 и y_4 — проекции тех же векторов на восточное направление. Поскольку для корабля в умеренных широтах скоростная девиация имеет порядок μ_1 , то в исходных переменных хорошо наблюдаются x_2, x_4 и слабо — x_1, x_3 .

В случае движения самолета ($\mu_1 \sim 1$) наблюдаемыми являются следующие комбинации:

$$\begin{aligned} s_1 &= y_1 - \mu \sin \varphi z, & s_2 &= y_2 - \mu \sin \varphi (2y_3 - z_1) \\ s_3 &= -y_1 + \mu \sin \varphi (3y_4 + 2z_2 + b_{12}\Delta) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$s_4 = y_3 - z_1 = -vx_3, \quad s_5 = y_4 + z_2 = vx_1$$

которые с точностью до μ^2 удовлетворяют системе уравнений с матрицей

$$s^* = Ds, \quad \sigma = s_1 \quad (4.8)$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \mu \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2\mu \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

При этом на единичном интервале коррекции s_1, s_2, s_3 наблюдаемы с мерой 1, а s_4 и s_5 — с мерой $\mu \sin \varphi$. Однако исходные переменные x_2 и x_4 из-за наличия в измерении слагаемого $\mu \sin \varphi z$ восстанавливаются из (4.7) с точностью до этого слагаемого, а Δ не восстанавливается.

4.2. Рассмотрим циркуляцию точки M с постоянной скоростью. Как для корабля период циркуляции, так и для самолетов период выража при крене $15-30^\circ$ составляет 6–8 мин, поэтому отношение $\lambda_1 = \omega_0/\Omega$ частоты Шулера к угловой скорости циркуляции имеет порядок 0,1.

Обозначим ψ_1 — полярный угол в плоскости циркуляции, $\tau_1 = \Omega t = \tau/\lambda_1$, тогда $\psi_1 = \tau_1 + \psi_1(0)$. С точностью $\lambda_1 \mu_1$ имеем

$$\begin{aligned} v^2 &= \mu_1^2 V^2 + \cos^2 \varphi - 2\mu_1 \cos \varphi \cos \psi_1, & \omega_3 &= \mu_1 V_1/v \\ V_1 &= V(\mu_1 V - \cos \varphi \sin \psi_1)/v, & V_2 &= V \cos \varphi \cos \psi_1/v \\ V_1^* &= -V_2 + \mu_1 V_1 V_2/v, & V_2^* &= V_1 - \mu_1 V_1^2/v, & v^* &= -\mu_1 V_2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь и далее производные берутся по времени τ_1 . Интегрирование в (3.3) ведется теперь также по времени τ_1 , поэтому второе слагаемое в измерении (3.7) имеет вид $\lambda_1 \mu_1 \sin \varphi z$ и в силу (4.5) не превышает ошибку измерения, если скорость точки M не превосходит самолетную.

В переменных (4.2) система (3.6), (3.7) примет вид

$$y^* = \lambda_1 B_2 y + \mu_1 d \Delta, \quad \Delta^* = 0, \quad \sigma = y_1 \quad (4.10)$$

$$d = (0, V_1 - \mu_1 V^2/v, 0, V_2)^* \quad (4.11)$$

В случае циркуляции корабля перепишем (4.10), опустив уравнения для ненаблюдаемых переменных y_3 и y_4 , вводя дополнительные переменные $p_1 = d_2 \Delta$, $p_2 = d_4 \Delta$ и пренебрегая членами порядка μ_1^2

$$y_1^* = \lambda_1 y_2, \quad p_1^* = -p_2, \quad y_2^* = -\lambda_1 y_1 + \mu_1 p_1, \quad p_2^* = p_1, \quad \sigma = y_1$$

Система (4.11) стационарна и наблюдаема, однако при $\tau_1 \in (0, 1)$ \dot{p}_1 и p_2 наблюдаются с мерой $\lambda_1 \mu_1$, поэтому для их оценивания необходим интервал времени $\tau_1 \in (0, 1/\lambda_1)$, что составляет два периода циркуляции.

В случае виража самолета переменные y_1 , y_2 и Δ наблюдаемы, но система (4.10) не сводится к стационарной, что вынуждает применять более сложные алгоритмы оценивания, чем в случае циркуляции корабля.

Отметим, что задача коррекции гиригоризонткомпаса рассматривается здесь в рамках информационного подхода. Основным этапом такого подхода является анализ наблюдаемости, который позволяет выявить принципиальные возможности использования той или иной информации, оценить предельную точность коррекции и выделить класс приемлемых алгоритмов для оценивания наблюдаемых переменных.

При наличии соответствующих возможностей в конструкции гиригоризонткомпаса коррекцию можно также осуществлять вводя корректирующие моменты, которые, основываясь на результатах исследования наблюдаемости, легко выбрать так, чтобы обеспечить необходимое качество переходных процессов в замкнутой системе.

Автор благодарит Н. А. Парусникова и Ю. К. Жбанова за постановку задачи и помощь в работе над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. К теории гиригоризонткомпаса.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 4, с. 487–499.
2. Десянин Е. А. Механика инерциальных навигационных систем.— Науч. тр. Ин-та механики МГУ, 1973, № 29, с. 18–41.
3. Парусников Н. А. Задача коррекции в инерциальной навигации.— Науч. тр. Ин-та механики МГУ, 1973, № 29, с. 42–70.
4. Жбанов Ю. К. К теории гиригоризонткомпаса.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 6, с. 1130–1135.
5. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.
6. Парусников Н. А., Каленова В. И., Морозов В. М., Шакогько А. Г. О мере наблюдаемости.— В кн.: Некоторые вопросы навигации и управления. М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 29–37.

Москва

Поступила в редакцию
23.IV.1982