МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1983

УДК 531.55:521.1

КВАТЕРНИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ СИСТЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ

ЧЕЛНОКОВ Ю. Н.

Приведены различные варианты кватернионных алгоритмов систем пространственной инерциальной навигации платформенного и бесплатформенного типов. Алгоритмы используют величины, комплексные комбинации которых являются дуальными параметрами Родрига – Гамильтона и могут оказаться удобными для решения ряда навигационных задач.

Получены кватернионные уравнения идеальной работы систем пространственной инерциальной навигации со стабилизированной в азимуте платформой [1–3] и с гиростабилизированной платформой, сохраняющей свою ориентацию в инерциальном пространстве неизменной, эквивалентные для произвольного движения объекта уравнениям возмущенного осциллятора, а для кеплеровских движений объекта – уравнениям гармонического осциллятора. Установлена динамическая аналогия кватернионных уравнений идеальной работы указанных навигационных систем с регулярными уравнениями Кустаанхеймо – Штифеля пространственной задачи двух тел [4, 5]. На основании этой аналогии ряд результатов, полученных в [4], распространен на кватернионные уравнения идеальной работы систем пространственной инерциальной навигации.

Публикуемая работа является развитием [6].

1. Рассмотрим систему пространственной инерциальной навигации, построенную следующим образом [3]. На платформе трехстепенного измерителя абсолютной угловой скорости, установленной на борту движущегося объекта в общем случае в кардановом подвесе, жестко закреплены три ньютонометра. Направления осей чувствительности ньютонометров совпадают с направлениями осей O_2Y_1, O_2Y_2, O_2Y_3 системы координат $O_2Y_1Y_2Y_3(Y)$, жестко связанной с платформой. В качестве инерциальной системы координат примем систему координат $O_1X_1X_2X_3(X)$ с началом в центре масс Земли, ось O_1X_3 которой направлена по оси вращения Земли, а оси O_1X_1, O_1X_2 лежат в плоскости экватора и не участвуют в суточном вращении Земли. С объектом жестко свяжем систему координат $O_2Z_1Z_2Z_3(Z)$. Введем также связанную с Землей систему координат $O_1\eta_1\eta_2\eta_3(\eta)$, направив ось $O_1\eta_1$ вдоль линии пересечения плоскостей экватора и гринвичского меридиана, а ось $O_1\eta_3$ – вдоль вектора $\mathbf{U}$ угловой скорости вращения Земли.

Задачей инерциальной навигации будем считать определение декартовых координат x_i, η_i ($i=1, 2, 3$) точки O_2 местоположения чувствительных масс ньютонометров в системах координат X и η, проекций вектора $\mathbf{v}$ абсолютной скорости этой точки на оси систем координат X, Y и Z, а также определение параметров ориентации платформы и объекта относительно систем координат X и η.

Исходной информацией для решения этой задачи служат показания измерителя абсолютной угловой скорости платформы и ньютонометров. Будем считать, что показания измерителя абсолютной угловой скорости равны проекциям ω_i вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости платформы на оси координатного трехгранника Y, а показания ньютонометров – проекциям a_i вектора $\mathbf{a}$ кажущегося ускорения точки O_2 на оси трехгранника Y.

Условная схема конечных поворотов введенных координатных трехгранников имеет вид

$$X \xrightarrow{\boldsymbol{\lambda}} Y \xrightarrow{\mathbf{d}} Z \sim X \xrightarrow{\boldsymbol{\pi}} \eta \xrightarrow{\boldsymbol{\varkappa}} Y \xrightarrow{\mathbf{d}} Z \sim X \xrightarrow{\boldsymbol{\pi}} \eta \xrightarrow{\boldsymbol{\varphi}} Z \sim X \xrightarrow{\mathbf{e}} Z \qquad (1.1)$$

Здесь над стрелками указаны кватернионы, определяющие конечные повороты рассматриваемых координатных трехгранников: кватернион $\boldsymbol{\lambda}$ определяет собой конечный поворот трехгранника Y относительно X и т. д. В дальнейшем полагается, что каждый кватернион

$$\mathbf{z}=z_0+z_1\mathbf{i}_1+z_2\mathbf{i}_2+z_3\mathbf{i}_3,\ \mathbf{z}=\boldsymbol{\lambda},\ \mathbf{d},\ \boldsymbol{\pi},\ \boldsymbol{\varkappa},\ \boldsymbol{\varphi},\ \mathbf{e}$$

определен своими компонентами z_j ($j=0,\ 1,\ 2,\ 3$) в базисе, преобразуемом этим кватернионом, т. е. z_j являются параметрами Родрига — Гамильтона соответствующего конечного поворота. ($\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — орты гиперкомплексного пространства).

Кватернионные уравнения идеальной работы описанной системы пространственной инерциальной навигации имеют вид

$$2d\boldsymbol{\lambda}_+^\circ/dt=\boldsymbol{\lambda}_+^\circ\circ\boldsymbol{\omega}_Y+\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{w}_Y=\boldsymbol{\lambda}_+^\circ\circ\boldsymbol{\omega}_Y+\mathbf{w}_X\circ\boldsymbol{\lambda} \qquad (1.2)$$

$$2d\boldsymbol{\lambda}^\circ/dt=\boldsymbol{\lambda}^\circ\circ\boldsymbol{\omega}_Y+2\boldsymbol{\lambda}_+^\circ,\ 2d\boldsymbol{\lambda}/dt=\boldsymbol{\lambda}\circ\boldsymbol{\omega}_Y \qquad (1.3)$$

$$\mathbf{v}_X=2\boldsymbol{\lambda}_+^\circ\circ\overline{\boldsymbol{\lambda}},\ \mathbf{r}_X=2\boldsymbol{\lambda}^\circ\circ\overline{\boldsymbol{\lambda}},\ \mathbf{v}_Y=2\overline{\boldsymbol{\lambda}}\circ\boldsymbol{\lambda}_+^\circ,\ \mathbf{r}_Y=2\overline{\boldsymbol{\lambda}}\circ\boldsymbol{\lambda}^\circ \qquad (1.4)$$

$$\mathbf{v}_\eta=\overline{\boldsymbol{\pi}}\circ\mathbf{v}_X\circ\boldsymbol{\pi},\ \mathbf{r}_\eta=\overline{\boldsymbol{\pi}}\circ\mathbf{r}_X\circ\boldsymbol{\pi},\ \mathbf{v}_Z=\overline{\mathbf{d}}\circ\mathbf{v}_Y\circ\mathbf{d},\ \mathbf{e}=\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{d},\ \boldsymbol{\varphi}=\overline{\boldsymbol{\pi}}\circ\mathbf{e},\ \boldsymbol{\varkappa}=\boldsymbol{\varphi}\circ\overline{\mathbf{d}}$$

$$\pi_0=\cos{}^1/_2Ut,\ \pi_1=\pi_2=0,\ \pi_3=\sin{}^1/_2Ut,\ U=|\mathbf{U}| \qquad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
d_0&=\cos{}^1/_2\alpha\cos{}^1/_2\beta\cos{}^1/_2\gamma-\sin{}^1/_2\alpha\sin{}^1/_2\beta\sin{}^1/_2\gamma\\
d_1&=-\sin{}^1/_2\alpha\cos{}^1/_2\beta\cos{}^1/_2\gamma-\cos{}^1/_2\alpha\sin{}^1/_2\beta\sin{}^1/_2\gamma\\
d_2&=\sin{}^1/_2\alpha\cos{}^1/_2\beta\sin{}^1/_2\gamma-\cos{}^1/_2\alpha\sin{}^1/_2\beta\cos{}^1/_2\gamma\\
d_3&=-\cos{}^1/_2\alpha\cos{}^1/_2\beta\sin{}^1/_2\gamma-\sin{}^1/_2\alpha\sin{}^1/_2\beta\cos{}^1/_2\gamma
\end{aligned} \qquad (1.6)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}_Y$, $\mathbf{w}_Y$, $\mathbf{v}_Y$, $\mathbf{r}_Y$ – гиперкомплексные отображения [7] векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{r}$ на базис Y, связанный с платформой, $\mathbf{w}_X$, $\mathbf{v}_X$, $\mathbf{r}_X$ – гиперкомплексные отображения векторов $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{r}$ на инерциальный базис X, $\mathbf{v}_\eta$ и $\mathbf{r}_\eta$ – гиперкомплексные отображения векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$ на базис η, связанный с Землей, $\mathbf{v}_Z$ – гиперкомплексное отображение вектора $\mathbf{v}$ на базис Z, связанный с объектом, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки O_2, проведенный из центра масс Земли O_1, $\mathbf{w}$ – вектор абсолютного ускорения точки O_2, $\boldsymbol{\lambda}^\circ$, $\boldsymbol{\lambda}_+^\circ$ – кватернионы, компонентами которых являются величины λ_j°, λ_{+j}° ($j=0,\ 1,\ 2,\ 3$), комплексные комбинации $\lambda_j+s\lambda_j^\circ$, $\lambda_j+s\lambda_{+j}^\circ$ ($s^2=0$) являются дуальными параметрами Родрига – Гамильтона [6], $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$, $\overline{\mathbf{d}}$, $\overline{\boldsymbol{\pi}}$ – кватернионы, сопряженные кватернионам $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{d}$, $\boldsymbol{\pi}$, знак $\circ$ означает кватернионное умножение, t – время, α, β, γ – углы поворотов кардановых колец платформы инерциальной системы, взятые в такой же последовательности, как и в работе [3].

Уравнения (1.2), (1.3) получены в [6]. Соотношения (1.4) легко устанавливаются из схемы поворотов (1.1). Равенства (1.6) позволяют находить параметры Родрига – Гамильтона d_j через углы α, β, γ и получаются из рассмотрения схемы поворотов платформы инерциальной системы относительно объекта, приведенной в [3].

Абсолютное ускорение

$$\mathbf{w}=\mathbf{a}+\mathbf{g}(\mathbf{r})=\mathbf{a}-\mu r^{-3}\mathbf{r}+\operatorname{grad}\varepsilon(\eta_i),\ r=|\mathbf{r}| \qquad (1.7)$$

где μ — произведение массы Земли на гравитационную постоянную, $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ — вектор ускорения, создаваемого полем тяготения Земли в точке O_2 местонахождения объекта, $\varepsilon(\eta_i)$ — функция, характеризующая малое отклонение поля тяготения Земли от сферической формы, зависящая от координат η_i точки O_2 в системе координат η.

Уравнение (1.2) с учетом равенства (1.7) принимает вид

$$\begin{aligned}2d\boldsymbol{\lambda}_+^\circ/dt&=\boldsymbol{\lambda}_+^\circ\circ\boldsymbol{\omega}_Y-2\mu r^{-3}\boldsymbol{\lambda}^\circ+\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{a}_Y+\\
&+[\operatorname{grad}_X\varepsilon(\eta_i)]\circ\boldsymbol{\lambda},\ r=2\lambda^\circ=2(\lambda_0^{\circ2}+\lambda_1^{\circ2}+\lambda_2^{\circ2}+\lambda_3^{\circ2})^{1/2}\end{aligned} \qquad (1.8)$$

где $\mathbf{a}_Y$ — гиперкомплексное отображение вектора $\mathbf{a}$ на базис Y, $\text{grad}_X\, \varepsilon(\eta_i)$ — гиперкомплексное отображение вектора $\text{grad}\, \varepsilon(\eta_i)$ на базис X:

$$\text{grad}_X\, \varepsilon(\eta_i) = \boldsymbol{\pi}\circ[\text{grad}_\eta\, \varepsilon(\eta_i)]\circ\bar{\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\pi}\circ\left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\varepsilon(\eta_i)}{\partial\eta_i}\mathbf{i}_i\right]\circ\bar{\boldsymbol{\pi}} \tag{1.9}$$

Для сферического поля тяготения Земли уравнение (1.8) упрощается

$$2d\boldsymbol{\lambda}_+{}^\circ/dt = \boldsymbol{\lambda}_+{}^\circ\circ\boldsymbol{\omega}_Y - 2\mu r^{-3}\boldsymbol{\lambda}^\circ + \boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{a}_Y \tag{1.10}$$

Уравнения (1.3)—(1.6), (1.8), (1.9) представляют собой кватернионный алгоритм описанной системы пространственной инерциальной навигации и образуют замкнутую систему уравнений, которая по величинам $\boldsymbol{\omega}_Y$, $\mathbf{a}_Y$, α, β, γ, полученным в результате измерений, по заданным начальным условиям $\mathbf{r}_X(0)$, $\mathbf{v}_X(0)$, $\boldsymbol{\lambda}(0)$ (или $\mathbf{r}_Y(0)$, $\mathbf{v}_Y(0)$, $\boldsymbol{\lambda}(0)$ или $\mathbf{r}_\eta(0)$, $\mathbf{v}_\eta(0)$, $\boldsymbol{\lambda}(0)$) и по заданным μ, U, а также $\varepsilon(\eta_i)$ позволяет найти: декартовы координаты объекта x_i, y_i и η_i в системах координат X, $O_1Y_1Y_2Y_3$ и η (т. е. кватернионы $\mathbf{r}_X$, $\mathbf{r}_Y$ и $\mathbf{r}_\eta$); проекции вектора $\mathbf{v}$ абсолютной скорости точки O_2 объекта на оси систем координат X, Y, η и Z (т. е. кватернионы $\mathbf{v}_X$, $\mathbf{v}_Y$, $\mathbf{v}_\eta$ и $\mathbf{v}_Z$); параметры Родрига — Гамильтона e_j и φ_j, характеризующие ориентацию объекта в системах координат X и η (т. е. кватернионы $\mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\varphi}$).

Для контроля правильности интегрирования уравнений (1.3), (1.8) могут быть использованы равенства $\boldsymbol{\lambda}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}=1$, $\text{sqal}(\boldsymbol{\lambda}_+{}^\circ\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}})=0$, $\text{sqal}(\boldsymbol{\lambda}^\circ\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}})=0$, которым удовлетворяют точные значения параметров λ_j, $\lambda_j{}^\circ$, $\lambda_{+j}{}^\circ$.

Для сферического поля тяготения Земли вместо уравнений (1.8), (1.9) в указанном алгоритме необходимо взять уравнение (1.10).

Для получения кватернионного алгоритма бесплатформенной инерциальной навигационной системы в уравнениях (1.4) следует положить $\mathbf{d}=1$ ($d_0=1$, $d_i=0$).

2. Рассмотрим другой вариант кватернионного алгоритма системы пространственной инерциальной навигации.

Считаем, что инерциальная навигация объекта должна вестись в двух системах координат: в инерциальной X и $O_1\xi_1\xi_2\xi_3(\xi)$, вращающейся относительно инерциальной с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, проекции которой Ω_i на оси системы координат ξ являются известными функциями времени.

Условная схема поворотов координатных трехгранников имеет вид

$$X \xrightarrow{\boldsymbol{\psi}} \xi \xrightarrow{\mathbf{v}} Y \xrightarrow{\mathbf{d}} Z \sim X \xrightarrow{\boldsymbol{\psi}} \xi \xrightarrow{\boldsymbol{\vartheta}} Z \tag{2.1}$$

Здесь кватернионы $\boldsymbol{\psi}$, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\vartheta}$ характеризуют собой ориентацию следующих координатных трехгранников: ξ относительно X, Y относительно ξ и Z относительно ξ.

Из рассмотрения схемы (2.1) и уравнений (1.2), (1.3) можно получить следующие кватернионные уравнения:

$$\begin{gathered} 2d\mathbf{v}_+{}^\circ/dt = \mathbf{v}_+{}^\circ\circ\boldsymbol{\omega}_Y - \boldsymbol{\Omega}_\xi\circ\mathbf{v}_+{}^\circ + \mathbf{v}\circ\mathbf{w}_Y \\ 2d\mathbf{v}^\circ/dt = \mathbf{v}^\circ\circ\boldsymbol{\omega}_Y - \boldsymbol{\Omega}_\xi\circ\mathbf{v}^\circ + 2\mathbf{v}_+{}^\circ \\ 2d\mathbf{v}/dt = \mathbf{v}\circ\boldsymbol{\omega}_Y - \boldsymbol{\Omega}_\xi\circ\mathbf{v} \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\mathbf{r}_Y = 2\bar{\mathbf{v}}\circ\mathbf{v}^\circ,\quad \mathbf{r}_\xi = 2\mathbf{v}^\circ\circ\bar{\mathbf{v}},\quad \mathbf{v}_Y = 2\bar{\mathbf{v}}\circ\mathbf{v}_+{}^\circ,\quad \mathbf{v}_\xi = 2\mathbf{v}_+{}^\circ\circ\bar{\mathbf{v}} \tag{2.3}$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega}_\xi$, $\mathbf{r}_\xi$, $\mathbf{v}_\xi$ — гиперкомплексные отображения векторов $\boldsymbol{\Omega}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ на базис ξ; $\mathbf{v}^\circ$, $\mathbf{v}_+{}^\circ$ — кватернионы, компонентами которых являются величины $\nu_j{}^\circ$, $\nu_{+j}{}^\circ$, причем $\text{sqal}(\mathbf{v}_+{}^\circ\circ\bar{\mathbf{v}})=0$, $\text{sqal}(\mathbf{v}^\circ\circ\bar{\mathbf{v}})=0$; $\bar{\mathbf{v}}$ — кватернион, сопряженный кватерниону $\mathbf{v}$.

Удобство уравнений (2.2), (2.3) заключается в том, что в них используются проекции векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ на оси систем координат Y и ξ соответственно.

Если навигация объекта должна осуществляться относительно системы координат η, связанной с Землей, и инерциальной системы координат X, то, учитывая равенство (1.7) и равенства $\xi=\eta$, $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\pi}$, $\mathbf{v}=\boldsymbol{\varkappa}$, $\boldsymbol{\vartheta}=\boldsymbol{\varphi}$, $\Omega_\xi=\Omega_\eta=U\mathbf{i}_3$, $\mathbf{v}^\circ=\boldsymbol{\varkappa}^\circ$, $\mathbf{v}_+{}^\circ=\boldsymbol{\varkappa}_+{}^\circ$, из уравнений (2.2), (2.3) и схемы (1.1) находим

$$2d\boldsymbol{\varkappa}_+{}^\circ/dt=\boldsymbol{\varkappa}_+{}^\circ\circ\boldsymbol{\omega}_Y-U\mathbf{i}_3\circ\boldsymbol{\varkappa}_+{}^\circ-2\mu r^{-3}\boldsymbol{\varkappa}^\circ+ \tag{2.4}$$

$$+\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{a}_Y+[\operatorname{grad}_\eta\varepsilon(\eta_i)]\circ\boldsymbol{\varkappa},\quad \operatorname{grad}_\eta\varepsilon(\eta_i)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varepsilon(\eta_i)}{\partial\eta_i}\mathbf{i}_i$$

$$2d\boldsymbol{\varkappa}^\circ/dt=\boldsymbol{\varkappa}^\circ\circ\boldsymbol{\omega}_Y-U\mathbf{i}_3\circ\boldsymbol{\varkappa}^\circ+2\boldsymbol{\varkappa}_+{}^\circ$$

$$2d\boldsymbol{\varkappa}/dt=\boldsymbol{\varkappa}\circ\boldsymbol{\omega}_Y-U\mathbf{i}_3\circ\boldsymbol{\varkappa},\quad r=2\left(\sum_{j=0}^{3}\varkappa_j^{\circ 2}\right)^{1/2}$$

$$\mathbf{r}_Y=2\bar{\boldsymbol{\varkappa}}\circ\boldsymbol{\varkappa}^\circ,\ \mathbf{r}_\eta=2\boldsymbol{\varkappa}^\circ\circ\bar{\boldsymbol{\varkappa}},\ \mathbf{r}_X=\boldsymbol{\pi}\circ\mathbf{r}_\eta\circ\bar{\boldsymbol{\pi}},\ \mathbf{v}_Y=2\bar{\boldsymbol{\varkappa}}\circ\boldsymbol{\varkappa}_+{}^\circ,\ \mathbf{v}_\eta=2\boldsymbol{\varkappa}_+{}^\circ\circ\bar{\boldsymbol{\varkappa}} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{v}_X=\boldsymbol{\pi}\circ\mathbf{v}_\eta\circ\bar{\boldsymbol{\pi}},\ \mathbf{v}_Z=\bar{\mathbf{d}}\circ\mathbf{v}_Y\circ\mathbf{d},\ \boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{d},\ \mathbf{e}=\boldsymbol{\pi}\circ\boldsymbol{\varphi}$$

Уравнения (2.4), (2.5), (1.5), (1.6) представляют собой другой вариант кватернионного алгоритма описанной в п. 1 системы пространственной инерциальной навигации.

Равенства $\boldsymbol{\varkappa}\circ\bar{\boldsymbol{\varkappa}}=1$, $\operatorname{sqal}(\boldsymbol{\varkappa}_+{}^\circ\circ\bar{\boldsymbol{\varkappa}})=0$, $\operatorname{sqal}(\boldsymbol{\varkappa}^\circ\circ\bar{\boldsymbol{\varkappa}})=0$ могут быть использованы для контроля правильности интегрирования уравнений (2.4).

Этот вариант особенно удобно использовать в случае, когда навигация объекта должна осуществляться лишь в системе координат η. В этом случае отпадает необходимость в вычислении кватернионов $\mathbf{r}_X$, $\mathbf{v}_X$, $\boldsymbol{\pi}$, $\mathbf{e}$. Алгоритм образуется уравнениями (1.6), (2.4) и соотношениями: $\mathbf{r}_\eta=2\boldsymbol{\varkappa}^\circ\circ\bar{\boldsymbol{\varkappa}}$, $\mathbf{v}_\eta=2\boldsymbol{\varkappa}_+{}^\circ\circ\bar{\boldsymbol{\varkappa}}$, $\mathbf{v}_Y=2\bar{\boldsymbol{\varkappa}}\circ\boldsymbol{\varkappa}_+{}^\circ$, $\mathbf{v}_Z=\bar{\mathbf{d}}\circ\mathbf{v}_Y\circ\mathbf{d}$, $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{d}$; он значительно проще аналогичного алгоритма, получаемого непосредственно из уравнений (1.3)—(1.6), (1.8), (1.9).

Алгоритм бесплатформенной инерциальной навигационной системы для этого случая еще более упрощается и образуется уравнениями (2.4) и соотношениями: $\mathbf{r}_\eta=2\boldsymbol{\varkappa}^\circ\circ\bar{\boldsymbol{\varkappa}}$, $\mathbf{v}_\eta=2\boldsymbol{\varkappa}_+{}^\circ\circ\bar{\boldsymbol{\varkappa}}$, $\mathbf{v}_Y=\mathbf{v}_Z=2\bar{\boldsymbol{\varkappa}}\circ\boldsymbol{\varkappa}_+{}^\circ$.

3. Положим, что платформа системы пространственной инерциальной навигации вращается относительно инерциального пространства таким образом, что ее ось O_2Y_1 все время остается направленной вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$, причем проекция ω_1 абсолютной угловой скорости вращения платформы на ось O_2Y_1 во все время движения остается равной нулю. Такая система инерциальной навигации называется инерциальной навигационной системой со стабилизированной в азимуте платформой или «свободной в азимуте» системой инерциальной навигации [1—3].

В этом случае

$$\mathbf{r}_Y=2\bar{\boldsymbol{\lambda}}\circ\boldsymbol{\lambda}^\circ=r\mathbf{i}_1,\ r=|\mathbf{r}|,\ \boldsymbol{\lambda}^\circ={}^1/{}_2r\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{i}_1,\ \boldsymbol{\lambda}=-2r^{-1}\boldsymbol{\lambda}^\circ\circ\mathbf{i}_1 \tag{3.1}$$

Проведем следующие преобразования уравнений (1.3), (1.8). Введем вместо переменных λ_j и $\lambda_j{}^\circ$, связанных между собой в рассматриваемом случае равенствами (3.1), регулярные переменные Кустаанхеймо — Штифеля u_j [4] по формулам [5]: $\boldsymbol{\lambda}=r^{-1/2}\bar{\mathbf{u}}$, $\boldsymbol{\lambda}^\circ={}^1/{}_2r^{1/2}\mathbf{u}\circ\mathbf{i}_1$, $\mathbf{u}=r^{1/2}\bar{\boldsymbol{\lambda}}=2r^{-1/2}\mathbf{i}_1\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}^\circ$, $r=u_0{}^2+u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2$, где $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^\circ$ — кватернионы, сопряженные кватернионам $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\lambda}^\circ$.

Вместо времени t в качестве новой независимой переменной введем переменную t^* по формулам [4]:

$$dt = r\,dt^*,\quad \frac{d}{dt} = r^{-1}\frac{d}{dt^*},\quad \frac{d^2}{dt^2} = r^{-3}\left[r\frac{d^2}{dt^{*2}} - \frac{dr}{dt^*}\frac{d}{dt^*}\right]$$

а также введем новую переменную — кеплеровскую энергию $-h$, определяемую уравнением энергии

$$h = \mu r^{-1} - {}^1/_2 v^2;\quad v = |\mathbf{v}| \tag{3.2}$$

и меняющуюся в соответствии с законом $dh/dt = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}$, $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \operatorname{grad}\varepsilon(\eta_i)$. Учтем также эквивалентное условию [5] ($\omega_1 = 0$) билинейное соотношение [4]:

$$u_0\frac{du_1}{dt} - u_1\frac{du_0}{dt} - u_3\frac{du_2}{dt} + u_2\frac{du_3}{dt} = 0$$

В результате этих преобразований уравнения (1.3), (1.8) приводятся к виду

$$\alpha'' + {}^1/_2 h\alpha = {}^1/_2 r\mathbf{q},\qquad h' = -2\mathbf{u}'\cdot\mathbf{q},\qquad t' = r \tag{3.3}$$

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{u}}\circ\mathbf{p}_Y = \bar{\mathbf{u}}\circ\mathbf{a}_Y + [\operatorname{grad}_X \varepsilon(\eta_i)]\circ\bar{\mathbf{u}},\qquad \alpha = \bar{\mathbf{u}}\circ\mathbf{i}_1 \tag{3.4}$$

$$\mathbf{r}_X = \alpha\circ\mathbf{u},\qquad \mathbf{v}_X = -r^{-1}(\alpha\circ\mathbf{u})' = -r^{-1}(\alpha'\circ\mathbf{u} + \alpha\circ\mathbf{u}') \tag{3.5}$$

$$\mathbf{r}_Y = r\mathbf{i}_1,\qquad \mathbf{v}_Y = r^{-1}(\mathbf{u}\circ\alpha' - \bar{\alpha}'\circ\bar{\mathbf{u}}),\qquad \lambda = r^{-1/2}\bar{\mathbf{u}}$$

$$r = \mathbf{u}\circ\bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

где штрих означает дифференцирование по новой независимой переменной t^*, а $\bar{\alpha}$ — кватернион, сопряженный кватерниону α.

Уравнения (3.3)—(3.5), дополненные соотношениями (1.4)—(1.6), (1.9), представляют собой кватернионный алгоритм системы пространственной инерциальной навигации со стабилизированной в азимуте платформой. В зависимости от конкретно решаемой задачи он может упрощаться или дополняться другими соотношениями, например соотношениями для нахождения долготы и широты местонахождения объекта и т. д. Для сферического поля тяготения Земли принимается $\operatorname{grad}\varepsilon(\eta_i) = 0$, поэтому выражение для кватерниона $\mathbf{q}$ упрощается, а соотношение (1.9) выпадает из алгоритма.

В скалярной записи уравнения (3.3)—(3.5) имеют вид

$$u_j'' + {}^1/_2 h u_j = {}^1/_2 r q_j \quad {\scriptstyle (j=0,1,2,3)}\qquad h' = -2\sum_{j=0}^{3} q_j u_j',\quad t' = r,\quad r = \sum_{j=0}^{3} u_j^2 \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered} q_0 = a_1u_0 + a_2u_3 - a_3u_2,\quad q_1 = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 \\ q_2 = a_1u_2 - a_2u_1 + a_3u_0,\quad q_3 = a_1u_3 - a_2u_0 - a_3u_1 \\ x_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2,\quad x_2 = 2(u_1u_2 - u_0u_3) \\ x_3 = 2(u_0u_2 + u_1u_3),\quad y_1 = r,\quad y_2 = y_3 = 0 \\ v_1^* = 2r^{-1}(u_0u_0' + u_1u_1' - u_2u_2' - u_3u_3'),\quad v_2^* = 2r^{-1}(-u_3u_0' + u_2u_1' + u_1u_2' - u_0u_3'), \\ v_3^* = 2r^{-1}(u_2u_0' + u_3u_1' + u_0u_2' + u_1u_3') \end{gathered} \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered} v_1 = 2r^{-1}(u_0u_0' + u_1u_1' + u_2u_2' + u_3u_3'), \\ v_2 = 2r^{-1}(u_3u_0' + u_2u_1' - u_1u_2' - u_0u_3'),\quad v_3 = 2r^{-1}(-u_2u_0' + u_3u_1' + u_0u_2' - u_1u_3') \\ \lambda_0 = r^{-1/2}u_0,\quad \lambda_i = -r^{-1/2}u_i \quad {\scriptstyle (i=1,2,3)} \end{gathered} \tag{3.8}$$

$$\omega_1 = 0,\qquad \omega_2 = -r^{-1}v_3,\qquad \omega_3 = r^{-1}v_2 \tag{3.9}$$

Уравнения (3.6), (3.7) служат для нахождения переменных u_j, их производных u_j', модуля r радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс платформы, времени t, кеплеровской энергии $-h$ в функции от новой независимой переменной t^* (выражения (3.7) для q_j записаны для случая сферического поля тяготения Земли). Соотношения (3.8), (3.9) позволяют определять по вычисленным u_j, u_j', r следующие величины: координаты x_i центра масс платформы в инерциальной системе координат X; проекции y_i вектора $\mathbf{r}$ на оси системы координат Y, связанной с платформой; проекции v_i^*, v_i вектора $\mathbf{v}$ абсолютной скорости центра масс платформы на оси систем координат X и Y; параметры Родрига — Гамильтона λ_j, определяющие ориентацию платформы в системе координат X; проекции ω_i вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости вращения платформы на связанные с ней оси.

Начальные условия u_{j0}, u_{j0}', h_0 интегрирования уравнений (3.6) находятся по заданным начальным условиям y_{i0}, v_{i0}, λ_{j0} (или x_{i0}, v_{i0}^*, λ_{j0}) из соотношений (3.2), (3.5) (начальные значения переменных t и t^* можно положить равными нулю).

Для контроля правильности интегрирования уравнений (3.6) может быть использовано равенство для кеплеровской энергии $h=r^{-1}[\mu-2(u_1'^2+u_2'^2+u_3'^2+u_0'^2)]$ и билинейное соотношение $u_0u_1'-u_3u_2'+u_2u_3'-u_1u_0'=0$.

4. Учтем равенство

$$\mathbf{q}=\overline{\mathbf{u}}\circ\mathbf{p}_Y=\mathbf{p}_X\circ\overline{\mathbf{u}}=[\mathbf{a}_X+\mathrm{grad}_X\,\varepsilon(\eta_i)]\circ\overline{\mathbf{u}} \qquad (4.1)$$

где $\mathbf{a}_X$ — гиперкомплексное отображение вектора $\mathbf{a}$ кажущегося ускорения на инерциальный базис X.

Уравнения (3.3), (3.5), (4.1), (1.9), дополненные соотношениями $\boldsymbol{\alpha}=\overline{\mathbf{u}}\circ\mathbf{i}_1$, $\boldsymbol{\varphi}=\overline{\boldsymbol{\pi}}\circ\mathbf{e}$, $\mathbf{d}=\overline{\boldsymbol{\lambda}}\circ\mathbf{e}$, $\mathbf{r}_\eta=\overline{\boldsymbol{\pi}}\circ\mathbf{r}_X\circ\boldsymbol{\pi}$, $\mathbf{v}_\eta=\overline{\boldsymbol{\pi}}\circ\mathbf{v}_X\circ\boldsymbol{\pi}$, $\mathbf{v}_Z=\overline{\mathbf{e}}\circ\mathbf{v}_X\circ\mathbf{e}$ образуют кватернионный алгоритм системы пространственной инерциальной навигации с гиростабилизированной платформой, неизменно ориентированной в инерциальном пространстве.

Платформа инерциальной системы в этом случае моделирует инерциальный трехгранник X. Поэтому кватернион $\mathbf{e}$ может быть вычислен по показаниям датчиков углов гиростабилизированной платформы с помощью соотношений, аналогичных (1.6). Кватернион $\boldsymbol{\lambda}$ в этом случае определяет собой ориентацию азимутально свободного трехгранника Y относительно инерциального X, а кватернион $\mathbf{d}$ — ориентацию объекта относительно азимутально свободного трехгранника Y. Смысл остальных обозначений, использованных в указанном алгоритме, пояснен ранее.

5. Дифференциальные уравнения (3.6), (3.3), лежащие в основе кватернионных алгоритмов, приведенных в пп. 3, 4, с точностью до обозначений совпадают с регулярными уравнениями Кустаанхеймо — Штифеля пространственной задачи двух тел [4, 5]. Следовательно, между регулярными уравнениями пространственной задачи двух тел и кватернионными уравнениями идеальной работы систем пространственной инерциальной навигации со стабилизированной в азимуте платформой и с гиростабилизированной платформой, сохраняющей свою ориентацию в инерциальном пространстве неизменной, существует динамическая аналогия.

Уравнения (3.6) эквивалентны уравнениям возмущенного осциллятора. Они являются линейными в случае кеплеровских движений объекта (когда $q_j=0$), а для движений, близких к кеплеровским, они близки к линейным. Обычные же уравнения идеальной работы систем пространственной инерциальной навигации [3] и в том и в другом случае существенно нелинейны. Указанное обстоятельство позволяет применять для интегрирования уравнений (3.6) модифицированные численные методы [4], превосходящие классические методы по точности и быстродействию. Установлено [4], что регулярные уравнения пространственной задачи двух тел в случае эллиптического кеплеровского движения устойчивы по Ляпунову (при условии точного задания интеграла энергии), в то время как соответствующие обычные (ньютоновские) уравнения неустойчивы. Там же показано, что численное интегрирование регулярных уравнений пространственной задачи двух тел приводит к значительно меньшим накапливающимся ошибкам, чем численное интегрирование обычных уравнений, т. е. регулярные уравнения пространственной задачи двух тел обладают в сравнении с обычными уравнениями лучшей численной устойчивостью. В силу существующей динамической аналогии между регулярными уравнениями пространственной задачи двух тел и кватернионными уравнениями идеальной работы рассмотренных в пп. 3 и 4 систем пространственной инерциальной навигации последние уравнения будут обладать для достаточно широкого класса движений объекта всеми указанными преимуществами первых в сравнении с обычными уравнениями идеальной работы этих навигационных систем.

Указанная стабилизация достигается за счет использования кватернионного способа описания движения, а также за счет введения в уравнения в качестве новых переменных величин h и t^*. Переменная h обращается в константу для кеплеровских движений объекта и близка к константе для движений, близких к кеплеровским. Таким образом, в кватернионные уравнения (3.6) заложена дополнительная информация о движении объекта, которую ньютоновские уравнения не учитывают. Использование этой дополнительной информации и является одним из факторов, улучшающих численную устойчивость кватернионных уравнений идеальной работы навигационных систем.

Отметим, что время t в уравнениях (3.6) рассматривается как неизвестная величина, подлежащая вычислению для каждого фиксированного значения независимой переменной t^*. Замена времени t переменной t^* в соответствии с дифференциальным уравнением $dt = r\,dt^*$ эквивалентна, как указывается в [4], аналитическому регулированию длины шага интегрирования дифференциальных уравнений (3.6). Поэтому интегрирование уравнений (3.6) производится в отношении времени t с переменным шагом.

В уравнениях (3.6), (3.8) идеальной работы навигационной системы можно перейти от новой независимой переменной t^* ко времени t. Записывая уравнения (3.6) в форме Коши, получаем

$$u_j^{\cdot} = r^{-1}\chi_j, \qquad \chi_j^{\cdot} = -{}^1/_2 h r^{-1} u_j + {}^1/_2 q_j \quad (j=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$
$$h^{\cdot} = -2r^{-1}(q_1\chi_1 + q_2\chi_2 + q_3\chi_3 + q_0\chi_0) \tag{5.1}$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени t. Соответственно в правых частях кинематических уравнений (3.8) следует положить $u_j' = \chi_j$. Остальные уравнения идеальной работы при этом не изменяются.

Видно, что переход к переменной t (времени) в уравнениях идеальной работы приводит к потере их регулярности, теряются и некоторые другие положительные свойства этих уравнений. Так, для кеплеровских движений объекта уравнения (5.1) уже не будут линейными. Тем не менее исследование указанных уравнений идеальной работы представляет определенный интерес, поскольку в них не входит переменная t^*.

Особый интерес представляет использование уравнений (3.3). (3.5) для решения важного класса навигационных задач, в которых расстояние r от объекта до центра Земли известно как функция времени t. В этом случае время t уже не выступает в этих уравнениях как неизвестная величина. Последнее уравнение системы (3.3) не зависит от других и может быть записано в виде

$$t^* = t_0^* + \int_{t_0} r^{-1}(t)\,dt$$

Эта формула позволяет вычислять шаг интегрирования системы (3.3) по независимой переменной t^* через задаваемое время t.

Отметим, что для кеплеровских движений объекта (эллиптического, гиперболического, параболического) кватернионные уравнения (3.3), (3.6) идеальной работы систем пространственной инерциальной навигации имеют вид

$$u_j''+{}^1/_2 h u_j=0 \quad {}_{(j=0,\,1,\,2,\,3)}, \qquad t'=r, \qquad h=\mathrm{const} \tag{5.2}$$

Эти уравнения легко интегрируются, причем, как можно показать, вектор ω абсолютной угловой скорости системы координат Y для кеплеровских движений объекта постоянен по направлению в этой системе координат.

Для эллиптического кеплеровского движения объекта (когда $h>0$) уравнения (5.2) эквивалентны уравнениям гармонического осциллятора. Частота колебаний эквивалентного осциллятора (во «времени» t^*) $k^*=({}^1/_2 h)^{1/2}={}^1/_2(2\mu r^{-1}-v^2)^{1/2}$, $v^2<2\mu r^{-1}$, а период колебаний $T^*=2\pi k^{*-1}=4\pi(2\mu r^{-1}-v^2)^{-1/2}$. Для движения объекта по круговой орбите $r=\mathrm{const}$, $v^2=\mu r^{-1}$, поэтому период колебаний эквивалентного осциллятора в реальном времени t:

$$T=rT^*=4\pi[r/(2g-v^2/r)]^{1/2}=4\pi(r/g)^{1/2}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю.* Об уравнениях задачи определения местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений.– ПММ, 1957, т. 21, вып. 6, с. 725–740.
2. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
3. *Андреев В. Д.* Теория инерциальной навигации. Автономные системы. М.: Наука, 1966. 579 с.
4. *Stiefel E. L., Scheifele G.* Linear and regular celestial mechanics. B.– Heidelberg – N. Y.: Springer, 1971. 301 p.– Рус. перев.: М.: Наука, 1975. 303 с.
5. *Челноков Ю. Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел.– Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 6, с. 12–21.
6. *Челноков Ю. Н.* Об одной форме уравнений инерциальной навигации.– Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 5, с. 20–28.
7. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

Саратов

Поступила в редакцию
16.II.1982