

УДК 539.3:534.1

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ В ПЛАНЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

ГРИГОРЕНКО Я. М., ГУЛЯЕВ В. И., ДЕХТЯРЮК Е. С.,
ЧЕМЛАЕВ В. В.

Особенность задачи о нелинейных вынужденных колебаниях цилиндрической панели заключается в перестройке формы ее движения с увеличением интенсивности нагрузки. С другой стороны, учет нелинейных факторов позволяет получить качественно новые результаты, связанные с потерей устойчивости периодического процесса. При решении задачи эти отличия в ряде случаев исключают возможность применения методов, ориентированных на представление расчетной модели оболочек как системы с одной степенью свободы, и приводят к необходимости выбора многомерных моделей.

В публикуемой работе на основе такого подхода исследуются установившиеся колебания продольно сжатых цилиндрических оболочек, подверженных действию равномерно распределенной поверхностной нагрузки, изменяющейся во времени по гармоническому закону. Применением метода Бубнова-Галеркина задача сводится к построению периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для построения кривых стационарных решений используется метод продолжения решения по параметру в сочетании с методом Ньютона-Канторовича [1]. Анализ особых точек на этих кривых и их связи с переходом от устойчивых режимов колебания к неустойчивым осуществляется на основе методов теории устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений [2].

1. Рассматриваются установившиеся колебания тонких пологих прямоугольных в плане цилиндрических панелей, сжатых вдоль образующей равномерными усилиями. Для описания движения оболочек приняты нелинейные уравнения оболочек типа Кармана [3]:

$$\frac{1}{12} \left[\frac{\partial^4 w}{\lambda^2 \partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] = L(w, \Phi) + k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Q \cos \omega t \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\lambda^2 \partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right] = -\frac{1}{2} L(w, w) - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

$$L(w, w) = 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \quad (x, y \in [0, 1])$$

$$w^0 = hw, \quad x^0 = ax, \quad y^0 = by, \quad t^0 = \xi t, \quad \lambda = a/b, \quad \varepsilon^0 = \varepsilon/\xi$$

$$\xi = \frac{ab}{h} \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\gamma}{gE}}, \quad Q^0 = \frac{Eh^4}{(1-\nu^2)a^2b^2} Q$$

$$\Phi^\circ = \frac{Eh^2}{(1-\nu^2)} \Phi, \quad p_x^\circ = \frac{Eh^2}{b^2(1-\nu^2)} p_x,$$

$$k_y^\circ = \frac{h}{b^2} k_y, \quad \omega^\circ = \frac{\omega}{\xi}$$

Здесь h — толщина панели, Φ — функция напряжений, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, p_x — интенсивность внешних усилий, приложенных к круговой кромке панели, ε — коэффициент демпфирования, k_y — кривизна, Q — амплитуда внешней гармонической нагрузки, ω — частота; градус относится к размерным величинам.

Считается, что оболочка шарнирно оперта по контуру. Граничные условия для w приняты в форме $w = \partial^2 w / \partial n^2 = 0$. Функция Φ выбирается из условия отсутствия искривления кромок. С учетом этих условий функции w , Φ ищутся в виде [4]:

$$w(x, y, t) = \sum_{n_1=1}^N \sum_{m_1=1}^M A_{n_1 m_1}(t) \sin(\pi n_1 x) \sin(\pi m_1 y)$$

$$\Phi = \sum_{n_2, n_3=1}^N \sum_{m_2, m_3=1}^M \left\{ \sum_{i, j=1}^2 B_{n_2 m_2 n_3 m_3}^{i, j}(t) \cos[\pi x (n_2 + (-1)^i n_3)] \times \right.$$

$$\left. \times \cos[\pi y (m_2 + (-1)^j m_3)] \right\} + \sum_{n_2=1}^N \sum_{m_2=1}^M F_{n_2 m_2}(t) \sin(\pi n_2 x) \sin(\pi m_2 y) + p_x \frac{y^2}{2}$$
(1.3)

где $A(t)$, $B(t)$, $F(t)$ — неизвестные $2\pi/\omega$ -периодические вектор-функции времени.

Подстановка выражений (1.3) в уравнение (1.2) позволяет получить представления для B и F через A :

$$B_{n_2 m_2 n_3 m_3}^{i, j}(t) = (-1)^{i+j-1} \varphi_{ij}(n_2, m_2, n_3, m_3) A_{n_2 m_2}(t) A_{n_3 m_3}(t)$$

$$F_{n_2 m_2}(t) = \lambda^2 (1-\nu^2) k_y n_2^2 / \pi^2 [n_2^2 + (\lambda m_2)^2] A_{n_2 m_2}(t)$$
(1.4)

Выражения для φ_{ij} ($i, j=1, 2$) приведены в [5]. Функции w и Φ в форме (1.3) с учетом (1.4) тождественно удовлетворяют уравнению совместности деформаций (1.2). Учитывая (1.3) и (1.4), с помощью метода Бубнова — Галеркина из уравнения (1.1) получаем систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 A_{nm}(t)}{dt^2} + \varepsilon \frac{dA_{nm}(t)}{dt} + f_1(n, m) A_{nm}(t) -$$

$$- \sum_{n_1, n_2=1}^N \sum_{m_1, m_2=1}^M f_2(n, n_1, n_2, m, m_1, m_2) A_{n_1 m_1}(t) A_{n_2 m_2}(t) -$$

$$- \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^N \sum_{m_1, m_2, m_3=1}^M f_3(n, n_1, n_2, n_3, m, m_1, m_2, m_3) A_{n_1 m_1}(t) A_{n_2 m_2}(t) A_{n_3 m_3}(t) -$$

$$- f_4(n, m) Q \cos \omega t = 0$$
(1.5)

где f_1 — f_4 — функции целочисленных аргументов [5].

Система дифференциальных уравнений (1.5) позволяет находить формы колебаний панели и исследовать их устойчивость. Ее $2\pi/\omega$ -периодическое решение представляется в виде [6]:

$$A_{nm}(t) = \sum_{l=0}^L C_{nml} \cos(\omega t) + \sum_{l=1}^L S_{nml} \sin(\omega t) \quad (1.6)$$

Система из $N \times M \times (2 \times L + 1)$ нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных компонент векторов $C = \{C_{nml}\}$ и $S = \{S_{nml}\}$ строится путем подстановки (1.6) в (1.5) и проецирования (1.5) на систему функций $\cos(\omega t)$ ($l=0, 1, \dots, L$) и $\sin(\omega t)$ ($l=1, 2, \dots, L$):

$$\begin{aligned} & [f_1 - (\omega)^2] r_1^i(l) C_{nml}^i + \varepsilon \omega l r_2^i(l) C_{nml}^{i-1} - \\ & - \sum_{n_1, n_2=1}^N \sum_{m_1, m_2=1}^M \left\{ \sum_{l_1, l_2=i}^L r_3^i(f_2, l, l_1, l_2) C_{n_1 m_1 l_1} C_{n_2 m_2 l_2}^i + \right. \\ & \left. + \sum_{l_1=1, l_2=1-i}^L r_4^i(f_2, l, l_1, l_2) S_{n_1 m_1 l_1} S_{n_2 m_2 l_2}^i \right\} - \\ & - \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^N \sum_{m_1, m_2, m_3}^M \left\{ \sum_{l_1, l_2=0; l_3=i}^L r_5^i(f_3, l, l_1, l_2, l_3) C_{n_1 m_1 l_1} C_{n_2 m_2 l_2} C_{n_3 m_3 l_3}^i + \right. \\ & + \sum_{l_1=0, l_2=1, l_3=1-i}^L r_6^i(f_3, l, l_1, l_2, l_3) C_{n_1 m_1 l_1} S_{n_2 m_2 l_2} S_{n_3 m_3 l_3}^i + \\ & + \sum_{l_1, l_3=1-i, l_2=1}^L r_7^i(f_3, l, l_1, l_2, l_3) S_{n_1 m_1 l_1} C_{n_2 m_2 l_2}^i S_{n_3 m_3 l_3}^i + \\ & + \sum_{l_1, l_2=1, l_3=i}^L r_8^i(f_3, l, l_1, l_2, l_3) S_{n_1 m_1 l_1} S_{n_2 m_2 l_2} C_{n_3 m_3 l_3}^i - \\ & \left. - f_4(n, m) r_9^i(l) Q = 0 \quad (i=0, 1; n=1, 2, \dots, N; m=1, 2, \dots, M) \right. \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $S^i = S$, $C^i = C$, $l=0, 1, \dots, L$ при $i=0$; $C^i = S$, $S^i = C$, $l=1, 2, \dots, L$ при $i=1$.

Полученная система решается методом продолжения решения по параметру. В качестве начальных состояний принимаются нулевые значения векторов C и S , соответствующие нулевому значению параметра Q . Затем последующим приращением параметра Q и определением соответствующих приращений $\Delta C = \{\Delta C_{nml}\}$ и $\Delta S = \{\Delta S_{nml}\}$ векторов C и S линеаризованной системы строится приближенное $2\pi/\omega$ -периодическое решение системы (1.5) во всем диапазоне изменения параметра нагрузки Q .

Для исследования устойчивости полученных форм колебаний составляется уравнение в вариациях относительно системы (1.5)

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \Delta A_{nm}(t)}{dt^2} + \varepsilon \frac{d \Delta A_{nm}(t)}{dt} + f_1(n, m) \Delta A_{nm}(t) - \sum_{n_1=1}^N \sum_{m_1=1}^M \left\{ \sum_{n_2=1}^N \sum_{m_2=1}^M f_2^\circ A_{n_2 m_2}(t) + \right. \\ & \left. + \sum_{n_2, n_3=1}^N \sum_{m_2, m_3=1}^M f_3^\circ A_{n_2 m_2}(t) A_{n_3 m_3}(t) \right\} \Delta A_{n_1 m_1}(t) = 0 \quad (n=1, 2, \dots, N; m=1, 2, \dots, M) \end{aligned} \quad (1.8)$$

где f_2° и f_3° получаются как суммы функций f_2 и f_3 с циклической перестановкой индексов $n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3$.

Устойчивость решения $A(t)$ определяется характеристическими показателями системы (1.8). Пусть λ — некоторый ее характеристический показатель. Тогда, согласно теории Флоке [2], эта система имеет решение

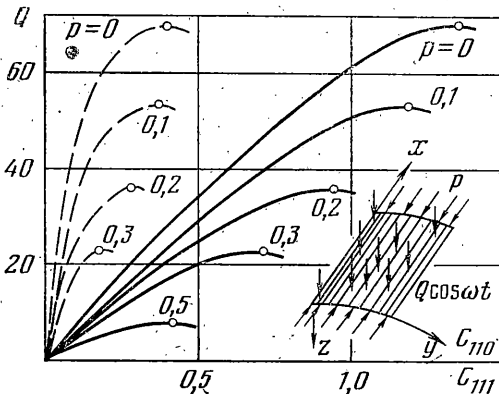
$$\Delta A_{nm}(t) = e^{\lambda t} \left[\sum_{l=0}^L \Delta C_{nm l} \cos(l\omega t) + \sum_{l=1}^L \Delta S_{nm l} \sin(l\omega t) \right] \quad (1.9)$$

Подставляя (1.6) и (1.9) в уравнение (1.8) и проектируя его на систему функций $\cos(l\omega t)$ ($l=0, 1, \dots, L$) и $\sin(l\omega t)$ ($l=1, 2, \dots, L$), получим однородную линейную систему $N \times M \times (2L+1)$ алгебраических уравнений с неизвестными компонентами векторов ΔC и ΔS :

$$\begin{aligned} & [\lambda^2 + \varepsilon\lambda - (l\omega)^2] d_1^i(l) \Delta C_{nm l} - (2\lambda + \varepsilon) d_2^i(l) \Delta S_{nm l} + \\ & + \left\{ \sum_{n_1, n_2=1}^N \sum_{m_1, m_2=1}^M \sum_{l_1, l_2=0}^L d_3^i(f_2^\circ, l, l_1, l_2, C, S) + \right. \\ & + \left. \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^N \sum_{m_1, m_2, m_3=1}^M \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^L d_4^i(f_3^\circ, l, l_1, l_2, l_3, C, S) \right\} \Delta S_{n_1 m_1 l_1} + \\ & + \left\{ \sum_{n_1, n_2=1}^N \sum_{m_1, m_2=1}^M \sum_{l_1, l_2=0}^L d_5^i(f_2^\circ, l, l_1, l_2, C, S) + \right. \\ & + \left. \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^N \sum_{m_1, m_2, m_3=1}^M \sum_{l_1, l_2, l_3=0}^L d_6^i(f_3^\circ, l, l_1, l_2, l_3, C, S) \right\} \Delta S_{n_1 m_1 l_1} = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

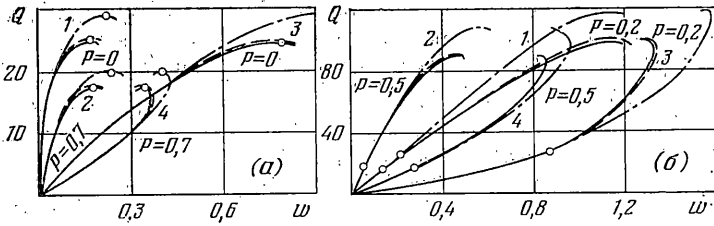
где $l=0, 1, \dots, L$ при $i=0$; $l=1, 2, \dots, L$ при $i=1$.

Вопрос об устойчивости решения на каждом шаге решается в соответствии с теоремой Ляпунова [2]. Если определитель матрицы системы (1.10) обращается в нуль только при тех λ , у которых действительная часть меньше нуля, то исследуемое решение $A(t)$ системы (1.10) асимптотически устойчиво. Если по крайней мере у одного λ действительная часть положительна, решение неустойчиво. Случай, когда действительные части некоторых корней отрицательны, а некоторые равны нулю, требует дополнительного исследования.



Фиг. 1

2. На основе предложенного подхода решена задача о колебаниях цилиндрической панели (фиг. 1) с параметрами: $a^\circ =$



Фиг. 2

$=b^{\circ}=0,3$ м; $E^{\circ}=7,2 \cdot 10^{10}$ Па; $\gamma^{\circ}=2,79 \cdot 10^4$ Н/м³; $h^{\circ}=1,5 \cdot 10^{-3}$ м; $\nu=0,31$; $k_y=0,4$ 1/м; $\varepsilon=0,1$. Усилия p_x° изменяются в диапазоне от 0 до p_x° .

В соответствии с (1.6) прогиб панели w представляется в виде

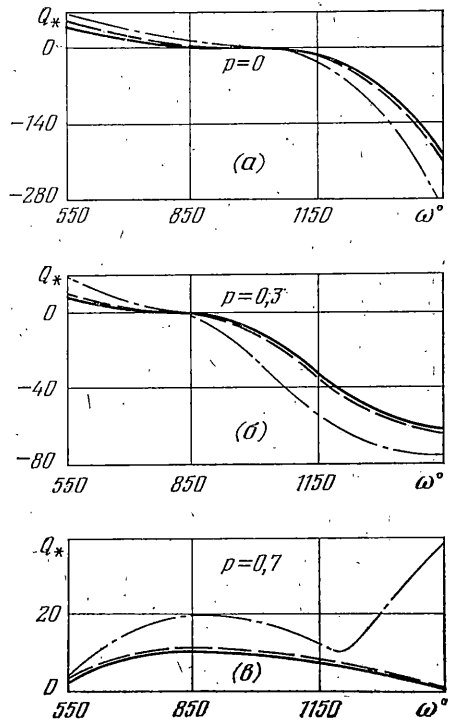
$$w = w_0 + w_1, \quad w_0 = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M C_{nmo} \sin(\pi n x) \sin(\pi m y)$$

$$w_1 = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L [C_{nml} \cos(l\omega t) + S_{nml} \sin(l\omega t)] \sin(\pi n x) \sin(\pi m y) \quad (2.1)$$

В соотношениях (2.1) ненулевое значение статической составляющей прогиба w_0 обусловлено наличием в системе (1.5) слагаемых, имеющих квадратичную нелинейность. Это обстоятельство существенно сказывается на критических значениях амплитуд.

Результаты численного анализа процесса колебаний нелинейной цилиндрической панели представлены на фиг. 1–4. Зависимости амплитуд C_{110} (штриховые кривые) и C_{111} (сплошные кривые) от амплитуды гармонической нагрузки Q при частоте $\omega^{\circ}=580$ 1/сек и различных значений параметра p , равного отношению интенсивности продольного сжимающего усилия p_x° к критическому значению

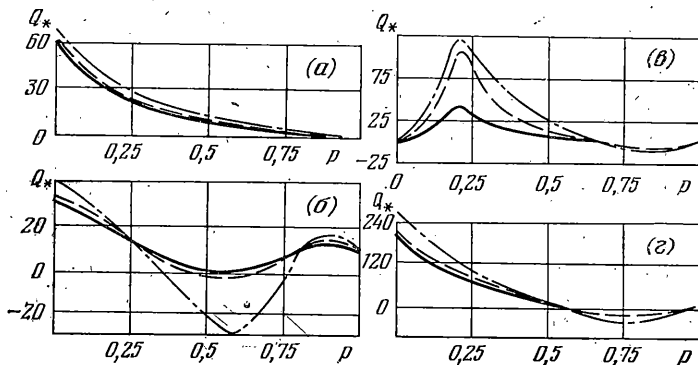
В соответствии с принятой методикой построения кривой в пространстве состояний начинается с точки $Q=0, w=0$ и продолжается пошагово путем последовательных приращений параметра Q гармонической нагрузки. На каждом шаге проверяется устойчивость решения. На начальном участке кривой $\text{Re}(\lambda_j) < 0$ ($j=1, 2, \dots, k$), что соответствует устойчивым решениям. Значение параметра Q , при котором по крайней мере для одного j действительная часть λ_j становится положительной, является критическим. Оно соответствует переходу кривой решений в область неустойчивых колебаний. На кривых $C_{110}(Q)$ и $C_{111}(Q)$ точки потери устойчивости (светлые точки) совпадают с экстремальными точками. Можно заметить, что при данной частоте ω увеличение p приводит к уменьшению критического значения Q . Зависимости величин статической w_0 (кривые 1, 2) и динамической w_1 (кривые 3, 4) составляющих прогиба в центре панели от интенсивности гармонической нагрузки Q при различных p для фиксированных значений $\omega^{\circ}=850$ 1/сек и $\omega^{\circ}=1130$ 1/сек показаны на фиг. 2, а, б, как и на фиг. 3, 4, где сплошные кривые соответствуют представлению искомым решений в формулах (1.3), (1.6) при $N=M=5, L=1$, штриховые кривые – при $N=M=3, L=1$ и штрихпунктирные кривые – при $N=M=L=1$.



Фиг. 3

Вычисления показывают, что при $N=M=3$, $L=1$ отличия значений по Q при одних и тех же ω_0 и ω_1 составляют до 20% по отношению к случаю $N=M=L=1$. При сравнении решений, полученных для $N=M=5$, $L=1$ и $N=M=3$, $L=1$, отличие составляет не более чем 0,03% (на фиг. 2 сплошные и штриховые кривые совпадают). Если частоты внешней периодической нагрузки меньше первой собственной частоты ($\omega^\circ=1126$ 1/сек), то критическая точка является предельной (фиг. 2, а); если частота нагрузки превышает первую собственную частоту, потеря устойчивости происходит в точке бифуркации (фиг. 2, б).

На фиг. 3, а-в показаны кривые зависимости критических значений Q_* параметра нагрузки от ее частоты ω° при трех значениях безразмерного параметра $p=$



Фиг. 4

$=0; 0,3; 0,7$ для спектра частот, расположенного в окрестности первой собственной частоты. Как следует из приведенных результатов, величина критической динамической нагрузки уменьшается с увеличением частоты вынужденных колебаний и при приближении частоты к нижней собственной частоте предварительно напряженной панели Q_* стремится к нулю. При переходе частоты через собственную, фаза колебаний меняется на противоположную.

Графики зависимости величины критической динамической нагрузки Q_* от величины безразмерного параметра p продольной сжимающей нагрузки представлены на фиг. 4, а-г ($\omega^\circ=580, 850, 1130, 1410$ 1/сек). Монотонное убывание величин Q_* на фиг. 4, а обусловлено тем, что в области рассмотренных значений p частота $\omega^\circ=580$ 1/сек лежит левее спектра собственных частот сжатой панели. Другие значения рассмотренных частот располагаются в пределах спектра собственных частот сжатой панели, поэтому построенные кривые на фиг. 4, б-г имеют немонотонный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ортега Д. М., Рейнболдт В. С. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 558 с.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
4. Григоренко Я. М. К решению задачи о деформации гибкой длинной цилиндрической оболочки с переменными параметрами. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 5, с. 417-421.
5. Борисенко В. Г., Чемлаев В. В. Применение рядов Фурье для исследования установившихся нелинейных колебаний панелей, прямоугольных в плане. — Сопротивление материалов и теория сооружений: Сб. статей. Киев: Будівельник, 1981, вып. 38, с. 16-21.
6. Борисенко В. Г., Гуляев В. И., Дехтярюк Е. С. К исследованию нелинейных колебаний механических систем. — Прикл. механика, 1981, т. 17, № 10, с. 93-99.

Киев

Поступила в редакцию
24.XII.1981