

УДК 539.3

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ
НА ИЗМЕНЯЕМОСТЬ ТОЛЩИН**

БАНИЧУК Н. В., КАРТВЕЛИШВИЛИ В. М.

Рассмотрены новые задачи проектирования сплошных пластин переменной толщины. Предполагается, что пластина деформируется силами, лежащими в ее плоскости. В качестве искомой управляющей функции, определяемой из условия минимума функционала веса (объема), принимается распределение толщин пластины. Ограничения накладываются на жесткость (максимальные смещения) пластины и на допустимые значения градиентов толщин. Выведены условия оптимальности и уравнения для сопряженных переменных. Методом последовательной оптимизации получены численные решения и выявлены особенности оптимальных распределений толщин.

Ранее двумерные задачи оптимального проектирования пластин переменной толщины (удельной жесткости) рассматривались в основном для случая изгиба пластин поперечными нагрузками, а также при оптимизации устойчивости и частот колебаний (см., например, [1-8]).

1. Пусть срединная поверхность пластины переменной толщины расположена в плоскости x, y и занимает область Ω . Граница Γ области Ω состоит из двух частей: Γ_1 и Γ_2 ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$). На части границы Γ_1 пластины заданы перемещения, а на части Γ_2 к ней приложены внешние нагрузки $q = (q_x, q_y)$, действующие в плоскости xy . Кроме того, в плоскости пластинки xy действуют силы $g = (g_x, g_y)$. Предполагается, что пластина находится в условиях плоского напряженного состояния и в процессе деформирования не происходит выпучивания из плоскости xy .

Обозначим через $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ смещения точек срединной поверхности пластины в направлении осей x, y , а через $h = h(x, y)$ — распределение толщин пластины, которое предполагается симметричным относительно срединной поверхности. Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений равновесия и граничных условий:

$$\begin{aligned} L_1(h, u, v) + g_x &= 0, \quad L_2(h, u, v) + g_y = 0 \\ L_1(h, u, v) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ [h(u_x + \nu v_y)]_x + \frac{1-\nu}{2} [h(u_y + v_x)]_y \right\} \\ L_2(h, u, v) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ [h(\nu u_x + v_y)]_y + \frac{1-\nu}{2} [h(u_y + v_x)]_x \right\}, \\ u = v &= 0 \quad (x, y) \in \Gamma_1 \quad (1.1) \\ N_1(h, u, v) - q_x &= 0, \quad N_2(h, u, v) - q_y = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_2 \\ N_1(h, u, v) &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[(u_x + \nu v_y) \cos(n, x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} (u_y + v_x) \cos(n, y) \right] \end{aligned}$$

$$N_2(h, u, v) \equiv \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[(\nu u_x + v_y) \cos(n, y) + \frac{1-\nu}{2} (u_y + v_x) \cos(n, x) \right]$$

Здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, n — внешняя нормаль к границе области Ω ; нижними индексами x, y в выражениях для дифференциальных операторов L_1, L_2, N_1, N_2 обозначены частные производные.

Рассматриваемая задача оптимального проектирования заключается в отыскании распределения толщин $h(x, y) \geq h_{\min}$ ($h_{\min} > 0$ — заданная константа), доставляющих минимум функционалу объема материала пластины

$$J = \int_{\Omega} h(x, y) d\Omega \rightarrow \min_h \quad (1.2)$$

при условии, наложенном на допустимые значения градиента толщин

$$J_1 \equiv \max_{x, y} (h_x^2 + h_y^2) = \alpha \quad (1.3)$$

и такого, что выполняется ограничение по жесткости

$$J_2 \equiv \max_{xy} (u^2 + v^2) = \beta \quad (1.4)$$

где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ — заданные постоянные, а $(x, y) \in \Omega$. Условие (1.4) означает, что максимальное смещение не должно превышать величины $\beta^{1/2}$, а условие (1.3) ограничивает скорость изменения функции $h(x, y)$.

Для удобства решения сформулированной задачи локальные ограничения (1.3), (1.4) приближенно заменим интегральными ограничениями

$$I_1 \equiv \left[\frac{1}{S} \iint_{\Omega} (h_x^2 + h_y^2)^t d\Omega \right]^{1/t} = \alpha \quad (1.5)$$

$$I_2 \equiv \left[\frac{1}{S} \iint_{\Omega} (u^2 + v^2)^p d\Omega \right]^{1/p} = \beta \quad (1.6)$$

где S — площадь области Ω , p и t — целые положительные числа.

Замена ограничений (1.3), (1.4) ограничениями (1.5), (1.6) основана на свойстве близости норм в пространстве непрерывных функций и пространствах функций, интегрируемых с p -й (t -й) степенью для достаточно больших значений p и t . Вопросы применения данного приема в задачах оптимизации обсуждаются в [9].

2. Для редуцированной задачи оптимизации (1.1), (1.2), (1.5), (1.6) выведем условия оптимальности. Выпишем выражения для первых вариаций функционалов J, I_1, I_2 . Выражение для вариации минимизируемого функционала имеет вид

$$\delta J = \iint_{\Omega} \delta h d\Omega \quad (2.1)$$

Формула для вариации функционала (1.5) может быть записана так:

$$\delta I_1 = - \iint_{\Omega} Q \delta h d\Omega + \frac{2I_1^{t-1}}{S} \int \{ (h_x^2 + h_y^2)^{t-1} [h_x \cos(n, x) + h_y \cos(n, y)] \} \delta h d\Gamma \quad (2.2)$$

$$Q \equiv \{ [(h_x^2 + h_y^2)^{t-1} h_x]_x + [(h_x^2 + h_y^2)^{t-1} h_y]_y \} \frac{2I_1^{t-1}}{S}$$

В дальнейшем будем предполагать функцию h заданной на Γ . В этом случае контурный интеграл в приведенной формуле для δI_1 обращается в нуль, так как $(\delta h)_\Gamma = 0$. Будем иметь

$$\delta I_1 = - \iint_{\Omega} Q \delta h d\Omega \quad (2.3)$$

Для первой вариации функционала (1.6) используем следующее представление:

$$\delta I_2 = \iint_{\Omega} \Phi (u \delta u + v \delta v) d\Omega, \quad (2.4)$$

$$\Phi = \frac{2I_2^{1-p}}{S} (u^2 + v^2)^{p-1}$$

Фигурирующие в выражении для δI_2 вариации перемещений δu , δv выразим через вариацию δh управляющей функции. Для этого введем в рассмотрение сопряженные переменные $\varphi = \varphi(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$. Про-варьируем уравнения и граничные условия (1.1)

$$\begin{aligned} \delta L_1 &= L(\delta h, u, v) + L_1(h, \delta u, \delta v) = 0 \\ \delta L_2 &= L_2(\delta h, u, v) + L_2(h, \delta u, \delta v) = 0 \\ \delta u &= \delta v = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_1 \\ \delta N_1 &= N_1(\delta h, u, v) + N_1(h, \delta u, \delta v) = 0 \\ \delta N_2 &= N_2(\delta h, u, v) + N_2(h, \delta u, \delta v) = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Полученные выражения для δL_1 и δL_2 домножим соответственно на φ и ψ и составим сумму $\varphi \delta L_1 + \psi \delta L_2$. Выписывая далее интеграл от указанной суммы по области Ω и выполняя интегрирование по частям с учетом граничных условий для u и v , получим

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\Omega} M \delta h d\Omega - \iint_{\Omega} [L_1(h, \varphi, \psi) \delta u + L_2(h, \varphi, \psi) \delta v] d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma_1} [\varphi \delta N_1(h, u, v) + \psi \delta N_2(h, u, v)] d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_2} [N_1(h, \varphi, \psi) \delta u + N_2(h, \varphi, \psi) \delta v] d\Gamma \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$M = \frac{E}{1-\nu^2} [u_x \varphi_x + v_y \psi_y + \nu (u_x \psi_y + v_y \varphi_x) + \frac{1-\nu}{2} (u_y + v_x) (\varphi_y + \psi_x)] \quad (2.7)$$

где через M обозначена квадратичная форма от переменных $u_x, u_y, v_x, v_y, \varphi_x, \varphi_y, \psi_x, \psi_y$.

Равенство (2.6) позволяет представить выражение для δI_2 в виде

$$\begin{aligned} \delta I_2 &= \iint_{\Omega} M \delta h d\Omega + \iint_{\Omega} \{ [u \Phi - L_1(h, \varphi, \psi)] \delta u + [v \Phi - L_2(h, \varphi, \psi)] \delta v \} d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma_1} [\varphi \delta N_1(h, u, v) + \psi \delta N_2(h, u, v)] d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_2} [N_1(h, \varphi, \psi) \delta u + N_2(h, \varphi, \psi) \delta v] d\Gamma \end{aligned}$$

Подчиним теперь сопряженные переменные φ и ψ следующим уравнениям и граничным условиям:

$$\begin{aligned} L_1(h, \varphi, \psi) &= u\Phi, L_2(h, \varphi, \psi) = v\Phi, \varphi = \psi = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_1 \\ N_1(h, \varphi, \psi) &= 0, N_2(h, \varphi, \psi) = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отметим, что в отличие от линейных уравнений в (1.1) уравнения в (2.8) являются нелинейными из-за нелинейной зависимости правых частей от переменных u, v . Для функций φ и ψ , определенных согласно (2.8), все интегралы в выражении для δI_2 , кроме первого, обращаются в нуль. В результате приходим к искомому выражению для первой вариации функционала I_2 через вариацию управляющей функции

$$\delta I_2 = \iint M \delta h \, d\Omega \quad (2.9)$$

Составим расширенный функционал Лагранжа L и приравняем к нулю его первую вариацию $\delta L = \delta J + \lambda_1 \delta I_1 - \lambda_2 \delta I_2 = 0$. В результате получим необходимое условие оптимальности

$$(\lambda_1 Q + \lambda_2 M - 1) \chi = 0 \quad (2.10)$$

Здесь λ_1, λ_2 — множители Лагранжа, χ — вспомогательная управляющая функция, связанная с h соотношением $h = \frac{1}{2} \chi^2 + h_{\min}$ и обеспечивающая «автоматический» учет ограничения $h \geq h_{\min}$ (см., например, [3, 9]). Введение вспомогательных управляющих функций по существу не единственно, и это обстоятельство используется при построении эффективных вычислительных схем.

При заданных p и t задача оптимизации свелась к решению связанных систем уравнений (1.1) и (2.8) для перемещений u, v и сопряженных переменных φ, ψ . Управляющая функция h находится из условия оптимальности (2.10), а неизвестные постоянные λ_1 и λ_2 определяются при помощи изопериметрических условий (1.5), (1.6). Таким образом, для отыскания оптимального распределения толщин пластинки имеем замкнутую краевую задачу, которая является нелинейной из-за нелинейности соотношений в (2.8), (2.10).

3. Перейдем к описанию метода оптимизации и результатов численного решения задачи. Предварительно с использованием результатов п. 2 получим выражение для улучшающей вариации управляющей функции. Требуется, чтобы δh уменьшала значение оптимизируемого функционала и сохраняла значение функционалов I_1 и I_2 , т. е.

$$\delta J < 0, \delta I_1 = 0, \delta I_2 = 0 \quad (3.1)$$

Общее выражение для δh , удовлетворяющее этим требованиям, указано в [3]. Используя найденные в п. 2 представления (2.1), (2.3), (2.9) для $\delta J, \delta I_1, \delta I_2$, приходим к следующему выражению для улучшающей вариации ($\delta h = \chi \delta \chi$):

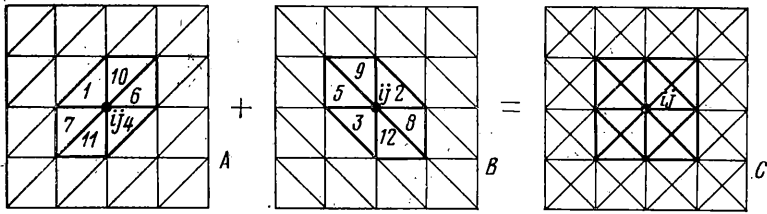
$$\delta h = (-1 + \lambda_1 Q + \lambda_2 M) \chi \tau \quad (3.2)$$

$$\lambda_1 = \frac{(\chi, Q\chi)(M\chi, M\chi) - (\chi, M\chi)(Q\chi, M\chi)}{(Q\chi, Q\chi)(M\chi, M\chi) - (Q\chi, M\chi)^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{(\chi, M\chi)(Q\chi, Q\chi) - (\chi, Q\chi)(Q\chi, M\chi)}{(Q\chi, Q\chi)(M\chi, M\chi) - (Q\chi, M\chi)^2}$$

Круглыми скобками в формулах (3.2) для множителей λ_1, λ_2 обозначены скалярные произведения соответствующих функций; τ — заданная положительная константа.

Следует заметить, что при проведении оптимизационных расчетов из-за неизбежных погрешностей вычислений могут возникать рассогласования в условиях (1.5), (1.6), т. е. $\alpha - I_1 = \Delta_1 \neq 0$ и $\beta - I_2 = \Delta_2 \neq 0$. В связи с этим применялся следующий корректировочный прием. Второе и третье из соотношений (3.1) заменялись равенствами $\delta I_1 = \Delta_1$, $\delta I_2 = \Delta_2$, и с их



Фиг. 1

учетом вычислялись множители λ_1 , λ_2 , входящие в формулу (3.2) для вариации толщин δh .

Для каждого текущего распределения управляющей функции $h(x, y)$ прямым вариационно-разностным методом разыскивались поля перемещений $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в деформированной пластине. Для этого минимизируемый функционал прямой задачи

$$\pi(u, v) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \iint_{\Omega} U(u, v) d\Omega - \iint_{\Omega} U_g(u, v) d\Omega - \int_{\Gamma_2} U_q(u, v) d\Gamma \rightarrow \min_{u, v} \quad (3.3)$$

$$U(u, v) = h[u_x^2 + 2\nu u_x v_y + v_y^2 + 1/2(1-\nu)(u_y + v_x)^2]$$

$$U_g(u, v) = g_x u + g_y v, \quad U_q(u, v) = q_x u + q_y v$$

аппроксимируется конечно-разностным аналогом на сетке, показанной на фиг. 1. Конечно-разностный аналог функционала (3.3) имеет вид

$$\pi \approx \Pi = \sum_{ij} \Pi_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\Pi_{ij}^1 + \Pi_{ij}^2) - R_{ij} \quad (3.4)$$

$$\Pi_{ij}^1 = S_{ij}^1 + S_{ij}^4 + S_{ij}^6 + S_{ij}^7 + S_{ij}^{10} + S_{ij}^{11}$$

$$\Pi_{ij}^2 = S_{ij}^2 + S_{ij}^3 + S_{ij}^5 + S_{ij}^8 + S_{ij}^9 + S_{ij}^{12}$$

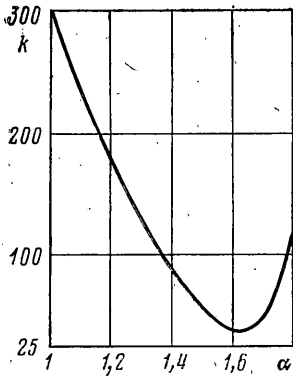
где S_{ij}^k ($k=1, \dots, 12$) — конечно-разностные аппроксимации первого и второго слагаемого в (3.3), выписанные для соответствующих треугольников, а R_{ij} аппроксимирует интеграл по границе в (3.3).

Слагаемые Π_{ij}^1 вычисляются по ячейкам вспомогательной сетки A , слагаемые Π_{ij}^2 — вспомогательной сетки B . Таким образом, величины Π_{ij} можно считать вычисленными на суммарной сетке C (фиг. 1). При аппроксимации производных в каждой ячейке вспомогательной сетки используются значения сеточных функций в двух точках (например, u_x в ячейке S_{ij}^1 аппроксимируется в виде $u_x = (u_{ij} - u_{i-1, j}) / \Delta$, где Δ — шаг сетки). Для величин R_{ij} используется аппроксимация вида $[(q_x)_{ij} u_{ij} + (q_y)_{ij} v_{ij}] \Delta$.

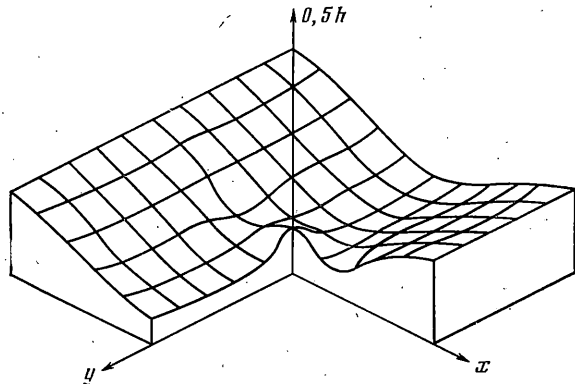
Предложенная схема имеет второй порядок точности, является строго выпуклой, т. е. сопоставляет строго выпуклому интегральному функционалу (3.3) строго выпуклую функцию (3.4) от аргументов u_{ij} , v_{ij} . Этим обеспечивается единственность решения прямой задачи минимизации и

отыскания величин u_{ij} , v_{ij} . Вопросы построения выпуклых вариационно-разностных схем обсуждались в [10]: В отличие от выпуклых схем, приведенных в [10], предложенная в (3.4) обладает большей симметрией ячеек и формул, используемых для подсчета энергии по ячейкам.

Отыскание величин u_{ij} , v_{ij} , доставляющих минимум Π при соответствующих граничных условиях для сеточных функций, проводилось вариационно-разностным методом верхней релаксации (см., например, [11]).



Фиг. 2



Фиг. 3

Применялась эффективная схема метода, в которой одновременно попарно варьировались величины (u_{ij}, v_{ij}) : $u_{ij}^{k+1} = u_{ij}^k + \alpha (r_u^k)_{ij}$, $v_{ij}^{k+1} = v_{ij}^k + \alpha (r_v^k)_{ij}$, где α — параметр релаксации, $(r_u^k)_{ij}$, $(r_v^k)_{ij}$ — величины, определяемые из условия максимизации убывания разностного функционала.

Решение сопряженной краевой задачи отыскания величин φ и ψ (2.8) также осуществлялось вариационно-разностным методом с использованием экстремального принципа $\pi(\varphi, \psi) \rightarrow \min_{\varphi, \psi}$; причем в формуле (3.3) $U_g = (u\varphi + v\psi)\Phi$, $U_q = 0$. Для удобства расчетов и сокращения вычислений использовались одинаковые вариационно-разностные схемы отыскания пар (u_{ij}, v_{ij}) и $(\varphi_{ij}, \psi_{ij})$.

Приведем данные, относящиеся к решению конкретной задачи оптимизации распределения толщин $h(x, y)$ ($0 < x < 1$, $0 < y < 1$) квадратной пластины ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$), жестко заделанной на контуре и подверженной действию двух сосредоточенных сил $g_1 = (-1, 0)$ и $g_2 = (1, 0)$, приложенных в точках $(x_1, y_1) = (0,3; 0,5)$ и $(x_2, y_2) = (0,7; 0,5)$. В этой задаче $q = (0, 0)$, $U_q = 0$, а граничные условия $u = v = 0$, $(x, y) \in \Gamma$. На границе Γ распределение $h(x, y)$ задано в виде $h(0, y) = h(1, y) = 3$, $h(x, 1) = h(x, 0) = \cos(2\pi x) + 2$ и не менялось при решении задачи. Параметры α и β полагались соответственно равными 2π и $0,07$.

При применении описанной выше методики считалось $t = p = 40$, а размеры ячеек были равны $\Delta x = \Delta y = \Delta = 1/N = 1/20$. Для сокращения объема вычислений использовалась симметрия задачи относительно середины пластинки $x = 0,5$, $y = 0,5$ и все расчеты проводились для области $0 \leq x \leq 0,5$, $0 \leq y \leq 0,5$. В приведенных расчетах методика оказалась высоко экономичной. Число итераций, необходимое для получения решений прямых и сопряженных задач, было невелико. На фиг. 2 показана зависимость числа итераций от величины параметра релаксации. Так, при оптимальном выборе параметра релаксации α число проводимых итераций не превышало 30.

Полученное в результате расчетов улучшенное распределение толщин показано на фиг. 3. Силовой материал пластинки концентрируется в центре и зонах, примыкающих к точкам приложения сил. В остальных областях использование материала оказывается менее эффективным. Области с максимальным значением градиента толщин примыкают к краям пластины.

Важно отметить, что учет при постановке задачи ограничения (1.3) привел к малым перепадам в распределении толщин и позволил получить оптимальное решение в широком диапазоне изменения параметров. Тем самым исследован характер влияния на оптимальное решение указанного ограничения и ограничения по жесткости. Независимо от авторов ограничение на изменяемость толщин учитывалось в [12] при исследовании одномерной задачи оптимального проектирования

ния круглой пластинки, находящейся в состоянии изгиба. Дополнительно следует заметить, что введение ограничения (1.3) является естественным. Допущение же значительных (неконтролируемых) градиентов толщин с целью получить более значительные эффекты от оптимизации (снижения веса) требует корректировки самой модели. Именно, для получения надежных результатов требуется введение и обоснование дополнительных гипотез в описании поведения пластинок, характеризующихся резким изменением жесткостных свойств.

Изложенная в работе методика оптимального проектирования может быть непосредственно распространена на более сложные задачи оптимизации с большим числом ограничений вида (1.3), (1.4).

Аналогичный подход может быть также применен и при проектировании изгибаемых систем, в частности при оптимизации пластинок, нагруженных поперечными силами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арман Ж. Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. М.: Мир, 1977. 142 с.
2. Haug E. J., Arora J. S. Applied optimal design mechanical and structural systems. N. Y.: Wiley, 1979. 506 p.
3. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
4. ОльшOFF Н. Оптимальное проектирование конструкций. М.: Мир, 1981. 277 с.
5. Малков В. П., Угодчиков А. Г. Оптимизация упругих систем. М.: Наука, 1981. 288 с.
6. Троицкий В. А., Пегухов Л. В. Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1982. 432 с.
7. Литвинов В. Г. Задача оптимального управления собственной частотой пластины переменной толщины.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 19, № 4, с. 866—877.
8. Брагусь А. С., Каргвелишвили В. М. Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 6, с. 119—139.
9. Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М., Миронов А. А. Об одном численном методе решения двумерных задач оптимизации в теории упругости.— В кн.: Материалы V Всес. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. Ч. 2. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механ. СО АН СССР, 1978, с. 3—14.
10. Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М., Черноусько Ф. Л. О разностно-квadrатурных аппроксимациях выпуклых интегральных функционалов.— Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 2, с. 269—272.
11. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 535 с.
12. Niordson F. Optimal design of elastic plates with a constraint on the slope of the thickness function.— Internat. J. Solids Struct., 1983, v. 19, No. 2, p. 141—151.

Москва

Поступила в редакцию
10.XI.1982