

УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЗАДАННОЙ МАССЫ ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

РЯБЦЕВ В. А.

На основе уравнений теории пологих оболочек рассматривается задача максимизации параметра Q верхнего критического давления цилиндрической круговой оболочки, нагруженной давлением, изменяющимся по заданному закону вдоль оси оболочки. Масса оболочки считается постоянной, а граничные условия — произвольными. На толщину и первую производную толщины оболочки по продольной координате наложены двусторонние ограничения. При решении задачи оптимизации используется градиент параметра Q , определенный как функция вектора — толщины оболочки. Приводятся некоторые результаты оптимизации шарнирно опертых оболочек, нагруженных равномерным давлением.

1. Исходные уравнения. Пусть L, R, h_0 — длина, радиус и средняя толщина оболочки, E и μ — упругие постоянные материала оболочки, $x \in [0, L]$, $t = \pi x/L$ ($t \in [0, \pi]$) — размерная и безразмерная продольные координаты. Пусть оболочка нагружена давлением $q(t) = q_0 f(t)$, где $f(t)$ — непрерывная функция ($0 \leq f(t) \leq 1$), q_0 — максимальное давление.

При рассматриваемой нагрузке для продольного u и окружного v перемещений, прогиба w и функции Φ усилий в срединной поверхности оболочки допустимы аппроксимации [1]:

$$\begin{aligned} u &= h_0 U(t) \sin \beta y, \quad v = h_0 V(t) \cos \beta y, \quad w = h_0 W(t) \sin \beta y, \\ \Phi &= E h_0^3 F(t) \sin \beta y, \quad \beta = n/R \end{aligned} \quad (1.1)$$

где y — окружная координата, n — число волн вдоль окружности оболочки, U, V, W и F — безразмерные функции.

С учетом (1.1) задача о собственных значениях, описывающая критическое состояние круговой цилиндрической оболочки с переменной толщиной $h = h(t)$, примет вид

$$T_w h^3 - \gamma F_{,tt} - \gamma Q f W = 0 \quad (1.2)$$

$$T_F h^{-1} + d W_{,tt} = 0, \quad Q = q_0 R^2 / E h_0^2 \quad (1.3)$$

$$\Theta_i(U, V, W, F, \alpha) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, 8) \quad T_w = \frac{d^2}{dt^2} (W_{,tt} - \mu a W) + \quad (1.4)$$

$$+ a (a W - \mu W_{,tt}) - 2(1 - \mu) a \frac{d}{dt} W_{,t}, \quad T_F = \frac{d^2}{dt^2} (F_{,tt} + \mu a F) +$$

$$+ a (a F + \mu F_{,tt}) - 2(1 + \mu) a \frac{d}{dt} F_{,t},$$

$$a = (Ln)^2 / (\pi R)^2, \quad d = aR / (h_0 n^2), \quad \gamma = 12(1 - \mu^2) d$$

Здесь T_w, T_F — дифференциальные операторы, действующие на функции, стоящие справа от них и записанные формально как множители; $\alpha = \{\alpha_1^-, \alpha_2^-, \alpha_3^-, \alpha_4^-, \alpha_1^+, \alpha_2^+, \alpha_3^+, \alpha_4^+\}^T$ — вектор, компоненты которого

α_j^- и α_j^+ ($j=1-4$) являются двоичными числами и задают тип граничного условия соответственно при $t=0$ и $t=\pi$ для функций U, V, W, F и их производных.

При выводе граничных условий использовались выражения

$$U(t) = -\pi h_0 [dn V_{,t} + 2(1+\mu) a F_{,t} h^{-1}] / (La) \quad (1.5)$$

$$V(t) = -(f_F h^{-1} + dW) / (dn), \quad f_M(t) = h^3 f_W$$

$$f_Q(t) = 2(1-\mu) ah^3 W_{,t} - f_{M,t}$$

$$f_F = F_{,tt} + \mu a F, \quad f_W = W_{,tt} - \mu a W$$

Пусть W и F — некоторые функции из $L_2[0, \pi]$, удовлетворяющие условиям (1.4). Скалярное умножение в $L_2[0, \pi]$ (1.2) на W (1.3) на F и интегрирование по частям с учетом условий (1.4) дает

$$Q = \varphi_\alpha(h, W, \alpha, n) = (\varphi_h + \varphi_g) r_q \quad (1.6)$$

$$g_W = \mu (W_{,tt} - aW), \quad g_F = \mu (F_{,tt} + aF)$$

$$r_q = (\gamma(fW, W))^{-1}, \quad \varphi_h = (h^3, r_W) + \gamma(h^{-1}, r_F) / d$$

$$r_W = g_W^2 + (1+\mu) (W_{,tt}^2 + 2aW_{,t}^2 + a^2W^2)$$

$$r_F = g_F^2 + 2(1+\mu) a^2 F_{,t}^2 + (1-\mu) (F_{,tt}^2 + a^2 F^2)$$

$$r_{TW}^\pm = -\alpha_3^\pm (1-\alpha_3^\pm) W_{,t} f_M - \alpha_4^\pm (1-\alpha_4^\pm) f_Q W$$

$$\varphi_g = r_g^+(\pi) - r_g^-(0), \quad r_g^\pm = r_{TW}^\pm + \gamma(r_{WF}^\pm - r_{FW}^\pm + r_{TF}^\pm)$$

$$r_{FW}^\pm = \alpha_2^\pm (1-\alpha_2^\pm) F W_{,t}, \quad r_{WF}^\pm = \alpha_1^\pm (1-\alpha_1^\pm) W F_{,t}$$

$$r_{TF}^\pm = [a\pi R L^{-1} (1-\alpha_2^\pm) U - (1-\alpha_4^\pm) W] \alpha_2^\pm F + \\ + \alpha_1^\pm F_{,t} [(1-\alpha_4^\pm) W - (1-\alpha_1^\pm) nV]$$

Из числа переменных функционала φ_α функция F исключена потому, что при известных W и α она вполне определяется решением краевой задачи (1.3), (1.4).

2. Свойства функционала φ_α . Для критического состояния оболочки $\|W\| \neq 0$ и $\varphi_h > 0$. Кроме того, для всех видов граничных условий на краях оболочки, принятых в [2], $r_{TW} = r_{TF} = 0$. Поэтому функционал φ_g не зависит от функции $h(t)$.

Пусть $D_G \subset L_2[0, \pi]$ — область функций W , удовлетворяющих некоторым граничным условиям (1.4) при $\alpha = \alpha_G$. Тогда с учетом минимального принципа Релея [2]: $Q = Q(h, \alpha_G) = \min_{n, W \in D_G} \varphi_\alpha(h, W, \alpha_G, n)$, т. е. наименьшее

собственное значение задачи (1.2) — (1.4) является функционалом, зависящим лишь от $h(t)$ и α .

Пусть $D_0 \subset L_2[0, \pi]$ — область функций W , удовлетворяющих граничным условиям свободного опирания ($\alpha = \alpha_0 = 0$), когда на краях оболочки ограничения на U, V и W отсутствуют, а $f_Q = f_M = F_{,t} = F = 0$. При этом $\varphi_g = 0$ и $Q = Q_M = \min_{n, W \in D_0} \varphi_0(h, W, \alpha_0, n) = \varphi_M(h) > 0$.

При наличии соотношений (1.5) наложение ограничений на краях оболочки на $U, V, f_Q, f_M, F_{,t}$ и F равносильно наложению ограничений на W . Тогда для фиксированной $h(t)$ в силу [2] $D_G \subset D_0$ и $Q > Q_M > 0$, что равносильно положительной определенности функционала φ_α .

Пусть d_h — множество h , являющееся областью определения φ_α по переменной h , а d_n — множество h , при которых возможна как местная, так и общая потеря устойчивости оболочки при одинаковой критической нагрузке: в точках d_n достигаются локальные максимумы φ_α . Тогда если

$d_c = d_n/d_n$, то характер потери устойчивости оболочки с $h \in d_c$ в окружном и продольном направлениях не изменяется, т. е. малым вариациям h соответствуют малые вариации W .

Структура множества d_c может оказаться весьма сложной. Существование d_n можно предположить анализируя зависимость $Q(L)$ при фиксированных R и h_0 из [4], имеющую локальную выпуклость всюду в области определения L , за исключением точек, в которых происходит смена числа волн n .

Функционал φ_α имеет по крайней мере производные Гато первого и второго порядка по h при $h = h_* \in d_c$ и соответствующих толщине h_* , прогибе W_* и числе волн n_* . При фиксированном α_G и n_* можно определить функционал $\varphi(h, W_*)$. Согласно формуле Тейлора [3]:

$$\varphi(h, W_*) = \varphi(h_*, W_*) + (\varphi_1(h_*, W), \lambda) + 0,5(\lambda \varphi_2(h_* + \theta \lambda, W_*), \lambda) \quad (0 \leq \theta \leq 1) \quad (2.1)$$

$$\varphi_1(h_*, W_*) = (3(h_*^2, r_{w_*}) - d^{-1} \gamma(h_*^{-2}, r_{F_*})) r_G$$

$$\varphi_2(h_*, W) = (6(h_*, r_{w_*}) + 2d \gamma(h_*^{-3}, r_{F_*})) r_G$$

где $\lambda = h - h_*$ — приращение толщины, φ_1 и φ_2 — первая и вторая производные Гато функционала $\varphi(h, W_*)$, F_* — функция, соответствующая W_* , $r_{w_*} = r_w(W_*)$, $r_{F_*} = r_F(F_*)$.

В силу того что $\varphi_2(h_*, W_*) > 0$, последний член в (2.1) положителен и $\varphi(h, W_*) - \varphi(h_*, W_*) \geq (\varphi_1(h_*, W_*), h - h_*)$. Согласно [3], функционал $\varphi(h, W_*)$ имеет в d_c по крайней мере локальную выпуклость.

3. Разностная аппроксимация и устойчивость разностной схемы. Для удобства разностной аппроксимации задачи (1.2)–(1.4) вводитися вектор-функция $\Psi(t) = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}^T = \{F_{,tt}, F, W_{,tt}, W\}^T$; тогда задача приводится к виду

$$L_\Psi \Psi - QT \Psi = 0 \quad (3.1)$$

$$Y^-(0) \Psi_{,t}(0) + Z^-(0) \Psi(0) = 0, \quad Y^+(\pi) \Psi_{,t}(\pi) + Z^+(\pi) \Psi(\pi) = 0 \quad (3.2)$$

$$L_\Psi = P(t) d^2/dt^2 + 2B(t) d/dt + C(t)$$

где L_Ψ — дифференциальный оператор, определенный на функциях $\Psi(t)$, причем $\psi_j(t) \in L_2[0, \pi]$ ($j=1-4$), Y^\pm, Z^\pm, P, B, C и T — матрицы порядка 4×4 , структура которых не приводится вследствие ее громоздкости.

Пусть ω_τ — равномерная сетка на $[0, \pi]$ с числом узлов m и шагом $\tau = \pi/(m-1)$. Пусть S_τ [4] — оператор, действующий из $L_2[0, \pi]$ в пространство R_τ сеточных функций ξ_τ с нормой $\|\xi_\tau\|_\tau$, или евклидово пространство R_m векторов \mathbf{r} с нормой $\|\mathbf{r}\|_R$. Пусть нормы в R_τ и R_m связаны условием согласования [4]:

$$\|\xi\| = \lim_{\tau \rightarrow 0} \|\xi_\tau\|_\tau = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^m \xi_{\tau i}^2 \tau \right)^{0,5} = \lim_{\tau \rightarrow 0} (\sqrt{\tau} \|\mathbf{r}\|_R)$$

Разностная аппроксимация задачи (3.1), (3.2) и отбрасывание погрешностей аппроксимации приводит к алгебраической задаче о собственных значениях

$$L^* \mathbf{X} - Q^* T^* \mathbf{X} = 0, \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}_\tau = S_\tau \Psi \quad (3.3)$$

где \mathbf{X} — блочный вектор общей размерности $4m$, элементами-блоками которого являются векторы $\mathbf{X}_j = \{\psi_{1i}, \psi_{2i}, \psi_{3i}, \psi_{4i}\}^T$; L^* и T^* — блочные матрицы общего порядка $4m \times 4m$.

Здесь символ $(\dots)_i$ показывает, что величина (\dots) вычислена при $t = (i-1)\tau$.

По определению [4]: $S_\tau(L_\Psi - QT)\Psi - (L^* - Q^*T^*)X = \Delta^{(1)}\tau + \Delta^{(2)}\tau^2$, где $\Delta^{(1)}$ и $\Delta^{(2)}$ — блочные векторы погрешностей аппроксимации той же структуры, что и X .

Если компоненты вектора Ψ имеют непрерывные производные по t до четвертого, а толщина оболочки — до второго порядка включительно, то величины $\nabla_i^{(1)}$ и $\nabla_i^{(2)}$ конечны и

$$\|S_\tau(L_\Psi - QT)\Psi - (L^* - Q^*T^*)X\|_\tau = \|\Delta^{(1)}\tau + \Delta^{(2)}\tau^2\|_\tau \leq \tau^{1,5}(\sqrt{2}\Delta_N^{(1)} + \tau\sqrt{m}\Delta_N^{(2)}) \leq \tau^{1,5}M \leq \tau^{1,5}M_* \quad (3.4)$$

$$M_{*j} = \sup_{\Omega} M_j, \quad \Delta_{N_j}^{(k)} = \sup_i \Delta_{ji}^{(k)} \quad (k=1, 2; j=1-4; i=1, 2, \dots, m)$$

где M — четырехмерный вектор с компонентами, зависящими от выбора сетки ω_τ , Ω — множество всех равномерных сеток ω_τ на $[0, \pi]$.

Величины M_j и M_{*j} конечны при любой сетке. Согласно [4], независимость от τ и конечность M_{*j} , а также линейность и однородность операторов L^* и T^* по X означает, что при $Q^* = Q$ задача (3.3) аппроксимирует на сетке ω_τ задачу (3.1), (3.2) с порядком точности $3/2$. Аналогично доказывается аппроксимация вектора Ψ вектором X . Следовательно, при $Q^* = Q$ решение X задачи (3.3) сходится к решению Ψ задачи (3.1), (3.2) при $\tau \rightarrow 0$ с порядком точности $O(\tau^{3/2})$.

Сравнение системы $(L^* - QT^*)X = \Delta^{(1)}\tau + \Delta^{(2)}\tau^2$ с (3.3) дает $|Q^* - Q| \gamma D = \Delta^0 \tau^2$, где Δ^0 и D — m -мерные векторы, такие, что $\Delta_i^0 = \Delta_{ii}^{(2)}$, $D_i = f_i X_{4i}$.

Отсюда следует

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} |Q^* - Q| \leq \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \sqrt{\frac{\pi m}{m-1}} \frac{\Delta_0}{\gamma \|fW\|} = O(\tau^2) \quad (3.5)$$

$$\Delta_0 = \sup_{i, \Omega} \Delta_i^0, \quad \|fW\| = \lim_{\tau \rightarrow 0} \|D_\tau\|_\tau$$

Таким образом, Q является пределом Q^* , получаемого в результате решения разностной задачи (3.3). При получении оценок (3.4) и (3.5) не учитывались погрешности представления чисел в памяти ЭВМ, которые существенны при достаточно больших m .

4. Постановка задачи оптимизации. При фиксированном $\alpha = \alpha_G$ можно определить функционал $Q = \varphi_G(h, W, n)$ и рассмотреть непрерывную задачу оптимизации

$$Q = \min_{n, W \in D_G} \varphi_G(h, W, n) \Rightarrow \max \quad (4.1)$$

$$g_1(t) \leq h(t) \leq g_2(t), \quad |h_{,i}| \leq b, \quad \int_0^\pi h(t) dt = \pi$$

где g_1 и g_2 — заданные функции — ограничения на толщину $h(t)$, b — заданное число.

Пусть $H = S_\tau h$, $G_1 = S_\tau g_1$, $G_2 = S_\tau g_2$ — сеточные функции, а $\varphi^* = \varphi^*(H, X, n)$ — разностный аналог функционала φ_G , получаемый заменой h и W на H и X в выражении для Q , и использованием разностных аналогов скалярных произведений в $L_2[0, \pi]$. Действием оператора S_τ множествам d_c, d_h, d_n ставятся в соответствии аналогичные множества D_c, D_h, D_n в R_m . Функционал φ^* локально выпукл и дифференцируем в смысле Гато всюду в D_c . Тогда задаче (4.1) может быть поставлена в соответствие задача

$$Q^* \Rightarrow \max, \quad Q^* = \min_{n, X} \varphi^*(H, X, n) \quad (4.2)$$

$$H - G_1 \geq 0, G_2 - H \geq 0$$

$$C^*H + b_1I \geq 0, b_1I - C^*H \geq 0, \alpha^*IH = m - 1 \quad (4.3)$$

$$b_1 = 2\tau b, \alpha^* \in R_m, \alpha_i^* = 1 \quad (i=2, 3, \dots, m-1), \alpha_1^* = \alpha_m^* = 0,5$$

где C^* — матрица порядка $m \times m$, являющаяся разностным аналогом оператора d/dt ; I — единичная матрица.

Решение задач (4.1) и (4.2), (4.3), содержащих среди неизвестных функции h и W , или H и X и число n , сложно и трудоемко, так как даже при фиксированном n требует в лучшем случае поочередной экстремизации φ_G или φ^* . Для устранения минимизации φ^* по X и значительного сокращения объема вычислений при определении Q^* при заданном H второе условие в (4.2) заменяется условием

$$DET(L^* - (\min Q^*)T^*) = 0 \quad (4.4)$$

В тех случаях, когда переход от функционала (1.6) к задаче (1.2) — (1.4) невозможен (например, для кусочно-линейных или кусочно-постоянных толщин), подобная замена невозможна. В этих случаях для решения задач (4.1) или (4.2), (4.3) необходимо использовать метод локальных вариаций [5].

В силу линейности ограничений (4.3) область D_h допустимых векторов H выпукла. Пусть $D_{h'} \supset D_h$ — область R_m , заданная ограничениями (4.3), $H^{(k)} \in D_h$ и известна первая производная Гато $\varphi_1^*(H^{(k)}, X^{(k)}, n_k)$ функционала φ^* , где $X^{(k)}$ и n_k определены для оболочки с толщиной $H^{(k)}$, методом последовательных приближений можно определить величину g и лежащий в соответствующей гиперплоскости из (4.3) вектор $\kappa = E_\kappa(\Phi_1^* - g)$, где E_κ — матрица $m \times m$, такая, что: $e_{ij} = 0$ при $i \neq j$; $e_{ii} = 0$, если изменение $H^{(k)}$ в направлении $\Phi_{1i}^* - g$ выводит из области $D_{h'}$; $e_{ii} = 1$ в противном случае $\Phi_{1i}^* = \varphi_{1i}^* / (\max \varphi_{1i}^*)$.

Тогда для достаточно малых ε вектор κ задает возможное направление в точке $H^{(k)} \in D_h$ и вектор

$$H^{(k+1)} = H^{(k)} + \varepsilon \kappa \in D_{h'} \quad (4.5)$$

Корректировкой этого вектора методом последовательных приближений можно добиться выполнения всех ограничений задачи (4.3) с достаточно высокой точностью.

Описанный алгоритм выбора возможного направления не сводится к алгоритму проектирования градиента функционала φ^* на область D_h , так как требует корректировки вектора H . Этот алгоритм реализует направленный поиск и способен дать только локально оптимальное решение.

Поскольку границы D_h и D_n могут и не иметь общих точек, условия Куна — Таккера в общем случае (применительно к данной задаче) могут и не выполняться даже для локально оптимальных толщин. Поэтому величину Q^* следует минимизировать в достаточно широком диапазоне изменения числа n .

5. Результаты вычислений. Вычисления по определению оптимальных толщин оболочек по описанному алгоритму проводились по программе на языке ФОРТРАН для ЭВМ Минск-32 с использованием ленточной трехдиагональной структуры матрицы L^* и метода немонотонной матричной прогонки [4]. При использовании только оперативной памяти ЭВМ число узлов может достигать 400. Расчеты для оболочек малой и средней длины с $h(t) = \text{const}$, $f(t) = \text{const}$ и $m = 100$ показали, что величины Q^* , определенные из (4.4), отличаются от точных значений менее чем на 0,01%.

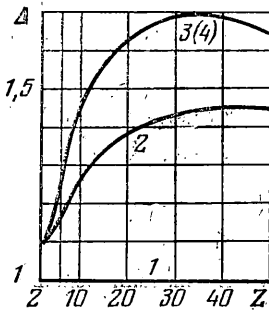
Вычисления при фиксированных L/R и R/h_0 и постоянном давлении показали, что оптимальные толщины (векторы H) получались в среднем за 6–20 шагов в направлении (4.5) при $\varepsilon = 0,25$ и начальной постоянной толщине.

Оптимальность оболочек оценивалась величиной $\Delta = Q^*/Q_0^*$, где Q_0^* — критическое безразмерное давление оболочки с $h(t) = h_0$.

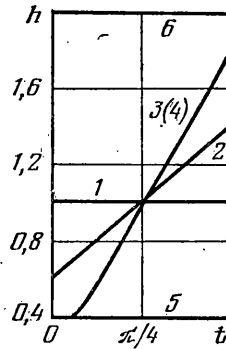
Расчеты показали, что величина Δ существенно зависит от параметра оболочки $z = (1 - \mu^2)^{1/2} L(Rh_0)^{-1/2}$.

На фиг. 1 показаны графики $\Delta(z)$ при $R/h_0=400$. Кривые 1-4 получены при $b=0; 1,25; 2,50; 3,75$ для шарнирно опертых оболочек. Из фиг. 1 видно, что оптимизация коротких оболочек неэффективна.

Графики толщины $h(t)$ шарнирно опертых по краям оболочек с $R/h_0=400$, $z=50$, полученные при $m=100$, показаны на фиг. 2. Кривые 1-4 построены для



Фиг. 1



Фиг. 2

значений b , указанных выше, а кривые 5 и 6 соответствуют ограничениям $g_1(t)$ и $g_2(t)$. Кривые 3 и 4, как и на фиг. 1, оказались весьма близкими. Как видно из фиг. 2, при выбранных исходных параметрах оптимизации некоторые компоненты вектора \mathbf{H} могут оказаться на границе области D_h .

Вычисления показали, что оптимальная толщина оболочки практически не зависит от выбора начальной толщины, что, вероятно, вызвано слабой искривленностью поверхности $\varphi^*(\mathbf{H}, X, n)$ т.е. малостью второй вариации φ^* .

Процесс вычисления оптимальной толщины заканчивался обычно (особенно при больших b) в одной из точек D_n , так как дальнейшее движение в направлении (4.5) приводило к уменьшению Q^* и изменению критического числа волн n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Григolloк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
3. Зангвилл У. Нелинейное программирование. Единый подход. М.: Сов. радио, 1973. 311 с.
4. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
5. Черноусько Ф. Л., Баличук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 238 с.

Воронеж

Поступила в редакцию
25.V.1982