

УДК 539.375

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПЕРКОЛЯЦИИ В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ

ЧЕЛИДЗЕ Т. Л.

Для решения актуальной задачи прогноза разрушения твердых тел на различных масштабных уровнях (от лабораторных образцов до блоков земной коры) необходимо: понимание физического механизма элементарного акта разрушения и вызываемых им нестационарных (затухающих) возмущений физических полей — акустической эмиссии, электромагнитного излучения, теплогенерации; понимание физических и статистических аспектов перехода от элементарного акта (микротрещины) к макроразрыву, причем необходимо как теоретическое прогнозирование топологического состояния тела с возрастающей концентрацией трещин (прямая задача), так и восстановление характера процесса разрушения по топологии сформировавшейся сети разрывов и фрактограммам (обратная задача); умение рассчитать физические характеристики нарушенной разрывами среды (прямая задача), а также оценить степень повреждения среды и близость её к предельному состоянию, исходя из измеренных экспериментально физических свойств — здесь имеются в виду стационарные характеристики: изменение скоростей упругих волн, электропроводности, модулей упругости, теплопроводности и других обобщенных проводимостей в связи с появлением в теле трещин (обратная задача).

Решение второй и третьей задач невозможно без применения теорий эффективной среды [1] и теории перколяции или протекания [2]. При малых концентрациях трещин и отсутствии корреляции связность трещин может быть лишь локальной. Поэтому в теории упругости трещиноватых тел хорошо работают приближения эффективной среды. Однако изменение степени связности системы трещин от локальной до глобальной для данного тела — это решающий момент в любых моделях процесса разрушения. Действительно, по определению, разрушение есть не что иное, как топологический переход — либо потеря связности сплошной среды, либо достижение связности в системе трещин в результате силового воздействия.

Теория перколяции и является тем математическим аппаратом, который позволяет количественно характеризовать связность фаз в случайно неоднородном теле, в том числе и связность системы трещин. Совокупность методов, используемых для решения подобного класса задач, можно было бы назвать статистической топологией, поскольку имеющиеся термины — теория перколяции (протекания), топологический фазовый переход, по нашему мнению, не отражают универсальности рассматриваемого подхода.

Ниже предлагается перколяционная модель разрушения твердых тел, в основу которой положены представления теории перколяции (протекания) — универсального статистического аппарата, широко используемого в физике неоднородных сред и критических явлений для анализа связности компонент.

1. Теория перколяции была предложена в 1957 г. в связи с описанием процесса фильтрации [2]. Оказалось, что этот подход универсален и к настоящему времени его используют при построении теорий электропроводности, ферромагнетизма, переходов золь — гель, элементарных частиц, работы сложных электрических цепей, как топологическую основу фазовых переходов второго рода [3—5]. Ниже приводятся необходимые далее определения. Тело аппроксимируется регулярной или случайной решеткой узлов (связей) размерности D .

Обозначим: x — вероятность повреждения любого узла, s — число поврежденных узлов, находящихся один от другого на расстоянии постоянной решетки l и поэтому образующих кластер, n_s — число кластеров разме-

ра s , суммарное число всех кластеров

$$N_{cl} = \left| \sum_s n_s(x) \right|_{\text{sign}} \simeq |x - x_c|^{2-\alpha}$$

где x_c — критическое значение x , при котором образуется непрерывная цепочка поврежденных узлов — так называемый бесконечный кластер, пересекающий всю систему; доля поврежденных узлов, входящих в бесконечный кластер или его плотность (x_∞ или W_x):

$$x_\infty = \left| \sum_s s n_s(x) \right|_{\text{sign}} \simeq |x - x_c|^\beta$$

среднее число узлов в конечных кластерах равно

$$S(x) = \left| \sum_s s^2 n_s(x) \right|_{\text{sign}} \simeq |x - x_c|^{-\gamma}$$

радиус корреляции $L_c(x) \simeq |x - x_c|^{-\nu}$, обобщенная электропроводность $G_e(x) \simeq |x - x_c|^t$, где $\alpha, \beta, \gamma, \nu$ и t — критические индексы, удовлетворяющие гипотезе подобия и не зависящие от типа решетки в отличие от x_c .

Величины N_{cl} , x_∞ и S — соответственно нулевой, первый и второй начальный моменты по s . На фиг. 1 показано изменение W_x (кривая 1), S (кривая 2), L_c (кривая 3) и G_e (кривая 4) и эффективного объема конечных кластеров V (кривая 5) в зависимости от x . Видно, что функции типа S и L_c , расходящиеся при $x \rightarrow x_c$, являются своеобразными предвестниками появления бесконечного кластера.

В комбинации с определенными характеристиками системы величины x_c образуют инварианты, не зависящие от типа решетки. Известны следующие инварианты:

для решеточных задач связей

$$B_{cl} = z x_c = D / (D - 1) \quad (1.1)$$

где z — координационное число решетки связей, B_{cl} — среднее число узлов, связанных с данным узлом при $x = x_c$ (инварианта B_{cl} равна 2 для $2D$ - и 1,5 для $3D$ -систем);

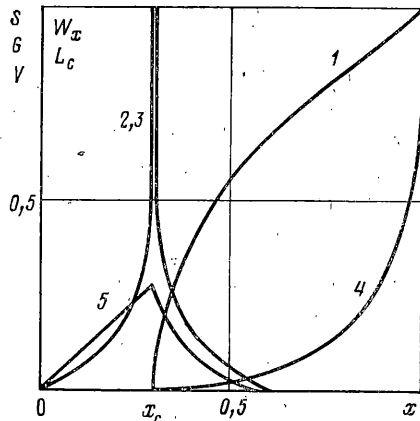
для решеточной задачи узлов — $\theta_c = f x_c$, где f — коэффициент заполнения для данной решетки [5] (инварианта θ_c равна 0,5 для $2D$ - и 0,16 для $3D$ -систем);

для задач случайных узлов — инварианта B_c : $B_c(2D) = \pi N R_c^2$, $B_c(3D) = 4\pi N R_c^3 / 3$, $R_c(2D) = 2,12 r_s$, $R_c(3D) = 1,4 r_s$, где N — концентрация узлов, R_c — критический перколяционный радиус, $r_s = (\pi N)^{-2}$, $r_s = (3\pi N / 4)^{-3}$ — средние расстояния между дефектами для $2D$ и $3D$ соответственно (инварианта B_c равна 4,1 для $2D$ - и 2,7 для $3D$ -систем).

Известно множество различных перколяционных моделей для рассмотрения которых используют методы рядов, ренормгрупп, Монте-Карло, графов, точных неравенств и т. д.

2. Основные физические модели разрушения и соответствующие им задачи в статистической топологии можно представить следующим образом.

1. Дисперсное (длительное) разрушение. Аппроксимируем тело решеткой узлов с постоянной решеткой l . Вначале все узлы целы, что соответ-



Фиг. 1

вует идеальному бездефектному телу. Далее случайным образом портятся узлы решетки, например, так, как это постулируется в кинетической теории множественного разрушения [6], т. е. принимается, что микротрещины возникают в результате гигантских термофлуктуаций.

Положим, что объемная доля (плотность) микротрещин соответствует доле разыгранных узлов x в теории перколяции. Будем считать, что все элементарные трещины одинаковы, их сферы влияния — порядка постоянной решетки l и трещины, расположенные в соседних узлах решетки, образуют кластер, т. е. трещину большого размера.

Если концентрация трещин x непрерывно растет, то в определенный момент перекрывающиеся поля кластеров трещин образуют бесконечный кластер. Это значение $x=x_c$ и принимается за критическую плотность трещин, достаточную для разрушения (см. п. 4).

В описанной модели роль внешней нагрузки сводится к двум моментам: она достаточна для того, чтобы не допустить залечивание разорванных термофлуктуациями связей, приводя, тем самым, к росту x , и обеспечивает разделение на части системы, доведенной до критической плотности трещин x_c . Будем полагать, что x определяется максимальным испытанным системой эффективным напряжением σ_m , или, при постоянном σ_m , временем испытания t . Тогда ввиду необратимости процесса результаты не будут зависеть от истории нагружения. При таком определении зависимости x от σ_m величина x может увеличиваться даже при разгрузке и не растет при повторном нагружении, пока не будет превышена σ_m первого нагружения (ср. эффект Кайзера).

2. Разрушение можно представить себе как распространяющийся из одной точки процесс (прорастание). При этом используют как аппарат теории случайных процессов, например ветвящихся (марковских), так и теорию перколяции.

3. Можно представить, что доля перенапряженного объема тела увеличивается не за счет роста x , как в модели 1, а из-за роста радиуса сферы влияния трещин R при постоянном x в связи с быстрым ростом приложенной нагрузки — это модель «мгновенного» разрушения.

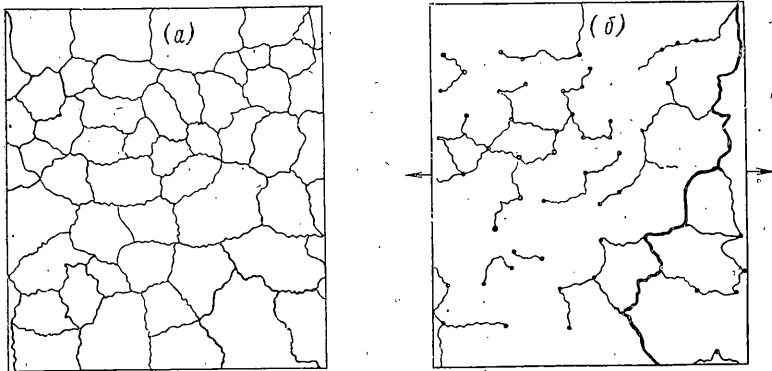
4. Наконец, вводя дополнительные предположения, в основном касающиеся длительности одиночного акта [4], можно сформулировать кинетические перколяционные модели разрушения.

При формулировке моделей среда принималась бесконечной. Интересные последствия конечности системы будут рассмотрены особо. Итак, топологические критерии разрушения в перколяционной модели разрушения формулируются совершенно естественным образом через фундаментальные характеристики теории протекания — x_c и R_c .

3. Рассмотрим простейшую двумерную модельную систему — тонкую усохшую пленку глины. На фиг. 2, а изображена полностью развившаяся сеть трещин после завершения процесса усыхания пленки бентонитовой глины «Гумбрин». Среднее число связей, исходящих из одного узла (координационное число решетки), равно $\sim 3,2$. Если рассматривать сетку трещин аналогично решеточной задаче связей, то, подставляя в (1.1) $V_{cl}=2$ (система двумерна) и $z=3,2$, получим для экспериментальной сетки на фиг. 2, а $x_c(b)=0,62$, что близко к порогу x_c для гексагональной решетки, равному 0,65.

Примем теперь, что изображенные на фиг. 2, а связи целы. Далее пронумеруем все связи и разорвем лишь часть из них, а именно 0,62 от полного числа возможных разрывов, руководствуясь таблицей случайных чисел. Конфигурация такой «разреженной» сетки при $x_c(b)=0,62$ приводится на фиг. 2, б. Стрелки указывают направление, в котором возможно расщепление по бесконечному кластеру (жирная линия). При этом значении $x=x_c$ согласно теории должен образовываться бесконечный кластер трещин, что действительно имеет место (см. фиг. 2, б).

Достижение концентрации x_c обуславливает переход количества (числа разрывов) в качество (тип связности). Например, «внутренние» силы (контракция, внутренние напряжения) при $x < x_c$ действуют на всю систему, а при $x > x_c$ их действие ограничено связными частями системы; лишь при $x > x_c$ разделенные бесконечным кластером нарушенной части системы могут перемещаться независимо друг от друга под действием внешних сил. Следовательно, x_c — особая точка и в механическом отношении.



Фиг. 2

4. В предыдущем разделе рассматривалась фактически задача расщепления двумерного тела вдоль нарушений сплошности. Следует отметить, что расщепление — разделение системы вдоль бесконечного кластера — возможно в том случае, если последний не содержит «замков» — топологических особенностей, препятствующих расщеплению. Согласно численным экспериментам, концентрация замков в двумерных конечных системах невелика и значение x , соответствующее возможности расщепления в $2D$ -системах, $x_u(2D)$ мало отличается от x_c : $x_u(2D) \approx x_c$. Величину x_u можно определить как порог расщепления бесконечного кластера.

Однако в трехмерных системах одновременно с существованием бесконечного кластера разрывов при $x = x_c$ имеется прорастающий его бесконечный кластер сплошной среды. Следовательно, расщепление возможно лишь при концентрации трещин, большей x_c . Если характер связности рассматриваемых решеток не зависит от «способа приготовления», т. е. от того, доводим ли мы систему до некоторой минимальной расщепляющейся концентрации x_u путем повышения числа разрывов x или, наоборот, последовательным залечиванием трещин в полностью раздробленной среде (см., например, фиг. 2, а), то очевидно, что лишь при концентрации $x' = 1 - x_c$, которую можно назвать порогом связности, исчезнет бесконечный кластер сплошной среды и становится возможным разъединение. Если концентрация замков мала, то $x_u(3D) \approx x_c'$. Поскольку $x_c(b)$ для $3D$ -решеток варьирует в пределах 0,1–0,4, то, очевидно, что величина $x_u(3D)$ заметно превышает x_c .

Однако разрушение не всегда может быть сведено к расщепляемости — свойству чисто геометрическому. Разрушение обычно предполагает наличие внешнего усилия, приводящего к сильному перенапряжению удаленных связей. Можно принять, что оно происходит при достижении критической объемной доли x_c для перенапряженных областей, соответствующей критическому предразрывному состоянию тела, т. е. при перекрытии полей трещин, отвечающих порогу перколяции x_c по определенному уровню напряжений.

Это положение, на котором строится перколяционная модель разрушения, подтверждается тем, что в момент макроразрыва трещины (исключая, естественно, сам магистральный разрыв) достаточно удалены друг от друга: предразрывное состояние достигается именно в результате взаимодействия полей трещин.

Имеется очевидное сходство между экспериментальным соотношением $N^{-1/3} \approx k_c a$, где a — длина трещин, $N^{-1/3}$ — среднее расстояние между трещинами, $k_c \approx 2,5-7$ — концентрационный критерий [8], и выражением для инварианты B_c задачи случайных узлов (см. п. 1).

Положим, что вплоть до x_c размер дефекта a связан со средним удалением дефектов r_s соотношением $2r_s = k_1 a$. Тогда, используя выражение $R_c(3D) = 1,4r_s$, можно записать $R_c = 1,4r_s = 1,4k_1 a$.

Отсюда видно, что при протекании должны выполняться определенные соотношения между тремя характеристиками: a , R_c и r_s и экспериментальный критерий k_c можно рассматривать как произведение двух факторов — чисто перколяционного (1,4) и «физического» (k_1). Первый из них обеспечивает глобальную связность, а второй — характеризует взаимодействие поля дефектов и определяется физическими условиями и свойствами среды.

Итак, критерии дисперсного разрушения могут быть сформулированы на языке теории протекания, иногда даже с учетом характера воздействия, как будет показано ниже.

С этой точки зрения интересный результат получается при использовании известного в теории протекания условия образования «плечного» бесконечного кластера [5] для получения «сдвигового» критерия. Если при растяжении бесконечный кластер, а следовательно, и поверхность разрушения могут иметь сложную форму, то для осуществления сдвига эта поверхность должна быть почти плоской (или линейной для $2D$).

Критическая объемная концентрация нарушений, необходимая для образования в трехмерном теле пленочного бесконечного кластера толщиной h (обозначим ее $x_{cf}(3D)$), превышает пороговое значение для обычного «объемного» бесконечного кластера $x_c(3D)$ и согласно [5] для модели случайных узлов равна

$$x_{cf}(3D) \approx x_c(3D) [1 + d(r_s/h)^{1/\nu_s}] \quad (4.1)$$

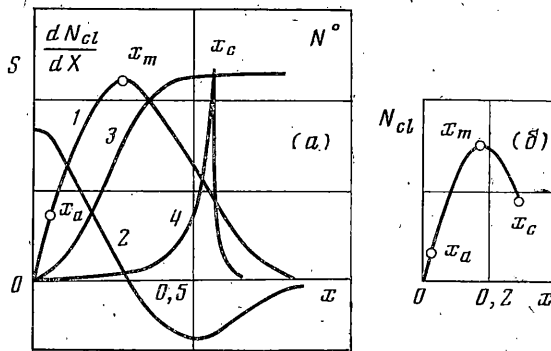
где d – константа, $\nu_s=0,9$ – критический индекс радиуса корреляции. Если принять $r_s \approx h$, т. е. задаться «пороховатостью» пленочного бесконечного кластера порядка среднего удаления нарушений, то $x_{cf}(3D) = x_c(3D) [1 + d]$.

5. Рассмотрим, как при развитии протекания между противоположными сторонами решетки изменяются структурно-чувствительные физические характеристики среды (обобщенные проводимости), на измерении которых основаны многие методы прогноза разрушения.

Ход кластеризации ясно прослеживается на фиг. 3, а, где приводятся зависимости от x полного текущего числа кластеров N_{cl} , включая единичные (кривая 1),

«темпа» роста N_{cl} , или величины dN_{cl}/dx (кривая 2); интеграла $\int_0^x N_{cl} dx$ (кривая 3) и величины $S(x)$ (кривая 4) для $D=2$. На фиг. 3, б показана зависимость N_{cl} от x для $D=3$. Результаты получены для квадратной и кубической решеток.

Анализ этих данных позволяет выделить несколько характерных точек (интервалов): концентрация x_a (порог агрегации), при которой зависимость N_{cl} отклони-



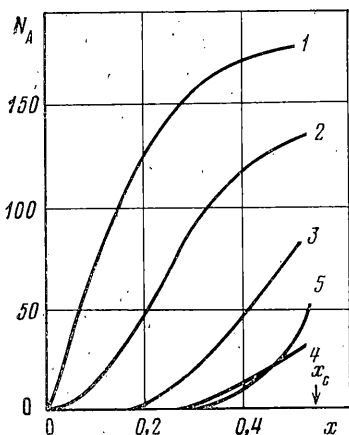
Фиг. 3

няется от прямой, что означает начало агрегации нарушений. В интервале $0 < x < x_a$ физические свойства вещества, содержащего нарушения сплошности, достаточно строго могут быть описаны теорией эффективной среды [1, 7]; концентрацию x_m , при которой N_{cl} переходит через максимум и слияние кластеров начинает доминировать над их появлением, — назовем ее критической концентрацией агрегации. Если при $x_a < x < x_m$ растет как число, так и размеры кластеров, то в интервале $x_c > x > x_m$ происходит в основном увеличение их размеров. Во всей этой области кластеры остаются конечными (изолированными), поэтому обобщенные проводимости снова можно описать теорией эффективной среды с учетом влияния агрегации. Поскольку при $0 < x < x_m$ трещины и их скопления представляют собой включения в непрерывной среде, то упругие свойства среды близки к свойствам континуума; порог протекания x_c . В двумерных телах сетка нарушений становится связанной, а ненарушенные области представляют собой «поры» бесконечного кластера; концентрации $x_{cf}(2D)$ и $x_{cf}(3D)$, при которых в бесконечном кластере можно выделить части, близкие по конфигурации к линейной (для $2D$) или к плоской (для $3D$) и также обладающие свойствами бесконечного кластера. Естественно, $x_{cf} > x_c$ (см. п. 4); в трехмерных телах, как уже отмечалось, при $x = x_c$ сосуществуют как связанная сеть нарушений, так и непрерывная система ненарушенных областей — «целиков» и нужна концентрация $x' = 1 - x_c$, чтобы исчез бесконечный кластер целиков; концентрация x_c' — порог расщепления трехмерных тел.

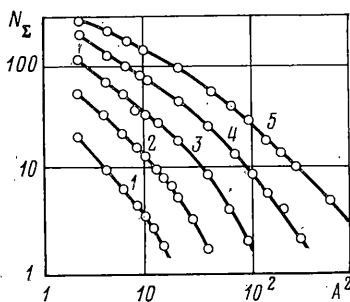
Как показал численный эксперимент, для $D=3$ (кубические решетки) значения особых точек таковы: $x_a=0,05$; $x_m=0,18$; $x_c=0,33$; $x_{cf}=0,6$; $x_c'=0,7$; причем x_a и x_{cf} — «плавающие» точки, ибо их местоположение испытывает дрейф в зависимости от заданной степени отклонения от прямой и толщины h соответственно, а остальные — это «неподвижные» точки.

6. Известны многочисленные данные по амплитудным характеристикам акустической эмиссии и сейсмической активности, например статистическая связь между частотой и магнитудой (график повторяемости) и

т. д. Положим, что появление одного и того же «стандартного» элементарного нарушения может вызвать упругий импульс различной амплитуды в зависимости от того, какой прирост в размере образующегося кластера нарушений оно вызывает. Например, при $x \rightarrow 0$ элементарные нарушения изолированы и каждому из них можно приписать «элементарную» амплитуду A_0 . Однако с концентрацией нарушений амплитуды импульсов должны расти, ибо при больших x появление даже одного нарушения может вызвать объединение больших кластеров, что физически соответствует



Фиг. 4



Фиг. 5

резкому изменению либо раскрытия объединяемых микротрещин, либо, в случае перекрытия сфер влияния трещин, напряженно-деформированного состояния сливающихся кластеров.

В обоих случаях следует ожидать высвобождения упругой энергии деформации в большом объеме, т. е. большого акустического либо сейсмического импульса. Поставим в соответствие амплитуде этих импульсов безразмерную величину A — условную амплитуду, получаемую в результате анализа кластеров из вычислительного эксперимента

$$A = A_0 \left\{ 1 + \left[\left(\sum_i n_i \right)^2 - \sum_i n_i^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (6.1)$$

где A_0 — условная амплитуда, соответствующая появлению изолированного нарушения (аналога микротрещин), n_i — число нарушений в i -м объединяющемся кластере (аналоге макротрещины), а суммирование проводится по всем кластерам, участвующим в акте образования новой объединенной макротрещины, включающей в себя $\sum n_i$ элементарных разрывов (или i -кластеров).

На фиг. 4 приводятся кривые накопления импульсов (т. е. числа актов объединения кластеров N_A) в зависимости от x для различных интервалов значений A (в единицах A_0). Кривая 1 соответствует $A = A_0$, кривые 2–5 характеризуют соответственно интервалы: $A_0 < A \leq 10 A_0$; $10 A_0 < A < 50 A_0$; $50 A_0 < A \leq 100 A_0$; $A > 100 A_0$. Зависимости для малых «амплитуд» (кривые 1, 2) резко отличаются от таковых для больших амплитуд (кривые 3, 4). Из фиг. 4 ясно, что метод, позволяющий следить за «слабыми» импульсами, не позволяет прогнозировать приближение к x_c .

Аналог одной из основных зависимостей, характеризующих акустическую и сейсмическую активность, а именно частота — амплитуда (графика повторяемости), при различных концентрациях нарушений построен на фиг. 5. По оси абсцисс отложены значения квадратов условных ампли-

туд A ; ордината — количество актов объединения трещин N_2 с амплитудами, большими и равными соответствующим значениям A .

Качественное сходство модельных амплитудных зависимостей (фиг. 4 и 5) с экспериментальными данными по акустической и сейсмической активности очевидна.

7. Практический интерес представляет формулировка на языке теории протекания таких понятий, как прочность или критическая, максимальная нагрузка (деформация) при которой тело разрушается «мгновенно» (модель 3).

Из условия мгновенности разрушения можно заключить, что оно происходит при практически неизменном числе «биографических» дефектов N_s с характерным размером a за счет перекрытия их «сфер влияния» радиусом R . Положим, что радиус сферы влияния определяется приложенным (положительным) напряжением σ . Тогда при любой фиксированной концентрации N_s приложением достаточно большой нагрузки можно добиться выполнения условия протекания (критического предразрывного состояния).

В теории протекания имеются соответствующие модели — это задачи на случайных узлах с перекрывающимися (фиг. 6, а, сферы с $R=r$) либо охватывающими (фиг. 6, б, сферы с $R=2r$) фигурами — окружностями, сферами и т. д.

Применим условие связности таких сфер влияния двух каких-либо дефектов (узлов) i и j [9]:

$$B_{ij} = H[R - F(d_{ij})] = 1 \quad (7.1)$$

где $F(d_{ij})$ — некоторая функция расстояния d_{ij} между i и j , H — функция Хевисайда: $H(x) = 0$ при $x < 0$; $H(x) = 1$ при $x \geq 0$. Численные эксперименты [9] показывают, что в простейшем случае, когда $F(d_{ij}) = d_{ij}$, для $D=2$ протекание достигается при выполнении условия $R_c(2D) = 2,12 r_s$ (фиг. 6, а, б). Положим, что напряжение близ дефекта с радиусом a на расстоянии r от его центра равно $\Delta\sigma$, а приложенное напряжение (однородное двумерное растяжение) равно σ . Тогда, используя известное соотношение

$$\Delta\sigma / \sigma = (a/r)^{1/2} \quad (7.2)$$

и полагая, что выполнение (7.1) и (7.2) означает, что в формуле (7.1) $d_{ij} = r = R_c$, получим

$$\Delta\sigma_c / \sigma_c = (a/R_c)^{1/2} \quad (7.3)$$

где $\Delta\sigma_c$ и σ_c — значения $\Delta\sigma$ и σ при $r = R_c$, или, подставляя в (7.3) значение $R_c = 2,12 r_s$, получим

$$\sigma_c = \Delta\sigma_c \sqrt{2,12} / (a^2 \pi N_s)^{1/4} \quad (7.4)$$

Аналогично для $D=3$, где следует использовать условие $R_c(3D) = 1,4 r_s$, получим:

$$\sigma_c = \Delta\sigma_c \sqrt{1,4} / [(3/4) a^3 \pi N_s]^{1/6} \quad (7.5)$$

Величину $\Delta\sigma_c$, или то значение поля дефекта на расстоянии R_c от его центра, которое является разрушающим для данного материала, можно записать используя критерий Гриффитса (охватывающие сферы):

$$\Delta\sigma_c = \Delta\sigma|_{r_0} = \sqrt{EG / \pi a} \quad (7.6)$$

где E — модуль упругости, G — трещиновдвижущая сила (гриффитсовская поверхностная энергия), R_0 — радиус охватывающей сферы по [9]. Модуль упругости среды в (7.6) следует рассчитывать по формулам для микроге-

терогенных сред [7]. Для несколько иной модели — сети из цепочек с экспоненциальным распределением прочностей звеньев — получена формула

$$\sigma_c = \Delta \sigma_c \exp[-2,26(2r_s/a)] \quad (7.7)$$

Экспоненциальный характер зависимости σ_c от среднего расстояния между дефектами означает, что очень малое изменение r_s приводит к огромному изменению прочности цепочки. В итоге прочность образца будет определяться несколькими наиболее прочными цепочками (барьерами).

Известны теоретические [10] и эмпирические [11] формулы типа (7.5) и (7.7), а также экспериментальные данные, подтверждающие существование обоих типов зависимости σ_c от N_s [10, 11].

8. Интересные особенности перколяционной модели разрушения проявляются при рассмотрении конечных систем, более соответствующих реальным ситуациям.

1. Используемые здесь пороговые значения x_c и R_c , а также инварианты B_c , B_{c1} , θ_c являются точными лишь для бесконечных систем ($L \rightarrow \infty$). При $L \neq \infty$ в каждом отдельном эксперименте следует ожидать отклонения этих параметров от точного значения $x_c = x_c(\infty)$. Отклонение будет тем больше, чем меньше приведенный размер системы $L' = L/l$. Оно обусловлено «конфигурационным» фактором: протекание в конечной системе может произойти как при $R < R_c$ так и при $R > R_c$, — в зависимости от характера расположения разыгранных узлов, даже если N_s постоянно (модель случайных узлов).

Поэтому изложенный подход, естественно, является статистическим. Оценку разброса значений x_c для $D=2$ и 3 при различных значениях L' можно найти в [12].

Предположим, что дисперсия значений прочности $\delta^2(\sigma_c)$ соответствует таковой для порогов протекания (критических концентраций трещин) $\delta^2(N)$, тогда по формуле

$$\delta(N) = c / N^{1/\nu D}, \quad c \approx 0,54 \quad (8.1)$$

где $\nu=1,3$ для $2D$ и $\nu=0,9$ для $3D$, можно попытаться оценить N_m — число «значащих» нарушений, или, если известно N_m , оценить их размер L_m по формуле $N_m \sim (L_m/R_c)^D$.

Можно сказать заранее, что если подставить в (8.1) предразрывное число микротрещин, то получим очень малый разброс в прочностях, что не соответствует реальности. Отсюда следует, что прочность определяется не непосредственно микротрещинами, а их скоплениями (макротрещинами), доминирующие предразрывные размеры которых, можно оценить по (8.1); если известна дисперсия прочности и критический радиус R_c .

2. В бесконечных системах значение фундаментальной характеристики — порога перколяции — не меняется при введении анизотропии. Вместе с тем, как показали вычислительные эксперименты, в конечных системах порог протекания заметно снижается в направлении повышенной вероятности трещинообразования [13].

Отметим, что в рамках анизотропно-коррелированных моделей можно получить переход от множественного разрушения (хаотические некоррелированные системы) к гриффитсовскому (анизотропные сильно коррелированные системы).

3. Накладывая некоторые дополнительные условия на процесс перколяции, можно получить и кинетические модели.

Например, в п. 7 искалось напряжение σ_c , при котором тело мгновенно разрушается при данном числе дефектов N_s . Если $\sigma = \text{const}$ недостаточно велико для мгновенного разрушения при начальном значении $N = N_i$ и некотором фиксированном значении радиуса сферы влияния R_c , но со временем t число дефектов увеличивается (полагается, что при этом $R_c = \text{const}$), то через некоторое время τ_m условие связности сфер влияния выполнится за счет роста N (получим эффект долговечности).

Постулируя, что

$$N_s = N_i + N_s \ln(\tau_m / \tau_{0m}) \quad (8.2)$$

где N_s и τ_{0m} — константы, ($N_s = 3B_c / 4\pi R_c^3$ для $3D$), приходим к экспоненциальной формуле

$$\tau_m \sim \tau_{0m} \exp(N_s - N_i) / N_s \quad (8.3)$$

связывающей долговечность τ_m с разностью ($N_s - N_i$), которую можно назвать дефицитом трещин, ибо она представляет собой разность между имеющимся (N_i) и необходимым для разрыва (N_s) числом трещин при $R_c = \text{const}$. Предположим, что в вероятность повреждения данного узла дают свой вклад как температура T , так и напряжение σ . В [14] показано, что если вклады T и σ в вероятность повреждения составляют соответственно W_T и W_σ и для приведенного напряжения $\sigma' = \gamma\sigma/u_0$ и температуры $T' = T/u_0$ выполняются соотношения $\sigma' = (2W_\sigma - 1)/W_\sigma$, $T' = W_T/(1 - W_T)$, $(N_i - N_s)/N_s = [(1 - W_\sigma)/W_\sigma][(1 - W_T)/W_T]$, то соответствие между кинетической формулой Журкова и выражением (8.3) становится полным.

Более общий подход — это рассмотрение протекания как задачи о первом достижении границ. Если последовательности связей решетки $\{l_i\}_{i=1}^\infty$ поставить в соответствие последовательность независимых (положительных) случайных величин $\{u_i\}_{i=1}^\infty$, то можно положить, что u_i — это время, необходимое для разрыва связи l_i . Тогда образование различных непрерывных цепочек трещин, соединяющих два любых узла решетки x_i и x_j , будет осуществляться за различные интервалы времени (времена прорастания). Путь с кратчайшим временем прорастания t_{ij} дает время первого достижения между x_i и x_j . Скорее всего t_{ij} и будет определять кинетику процесса. При конкретизации вида распределения $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ представляется перспективным применение фундаментальных распределений теории надежности (ординарные либо двойные распределения Вейбулла). Действительно, временной ход функции интенсивности отказов для двойного распределения Вейбулла вполне объясняет форму кривой крипа и накопленной акустической эмиссии, где выделяются три основных участка: замедляющийся, стационарный и ускоряющийся, а также последовательность активность — затишье — активность — разрыв (для интенсивности акустической эмиссии). Происходит это из-за того, что при наложении постоянной нагрузки вначале «выжигаются» слабые места, после чего нагрузка перераспределяется на уцелевшие связи, образующие прочный каркас, время жизни которого определяется уже наиболее прочным звеном, поэтому образец стабилизируется, наступает затишье, которое можно интерпретировать как время ожидания «сверхгигантской» термофлуктуации, необходимой для разрыва этого прочнейшего звена каркаса. Естественно, после его разрыва остальные звенья рвутся в ускоряющемся темпе, вызывая повторный рост акустической эмиссии и ускорение крипа.

Так же как теория протекания допускает вероятностный прогноз приближения к порогу протекания, перколяционная модель разрушения дает возможность оценить степень близости к критическому состоянию: с приближением к порогу изменяется (растет) концентрация и средний размер скоплений трещин, растет число сильных импульсов, увеличивается разброс (дисперсия) их амплитуд, растет «средняя» амплитуда, определяемая как средняя от амплитуд импульсов, наблюдаемых в определенном интервале x или t .

Далее, теория протекания позволяет судить и о характере изменения структурно-чувствительных физических свойств разрушающейся среды (ее обобщенных проводимостей для различных потоков) в процессе приближения к пороговому состоянию. Интересные особенности в поведении обобщенных проводимостей наблюдаются в области пороговой концентрации трещин при малом изменении напряженного состояния, когда имеет место не разрушение, а лишь незначительная деформация — «деформационная перколяция». Оказывается, некоторые свойства, например электропроводность, обнаруживают настолько высокую «тензочувствительность», что ее возможно объяснить лишь в рамках теории перколяции [15]. Анализ сингулярного поведения упругих обобщенных проводимостей модельных систем (коллоидных кристаллов [16]) в зависимости от объемной доли частиц и радиуса их сферы влияния приводит к выводу о возможности построения новой перколяционной модели разрушения, основанной на критическом поведении модуля сдвига G_{el} при приближении к порогу, где критерием разрушения является обращение G_{el} в нуль.

В заключение отметим: если в статистических теориях разрушения типа Вейбулла исключаются возможные слияния дефектов, не учитывается их взаимодействие, а также эффект «памяти» (возникновение нарушений сплошности в среде —

процесс необратимый, а сами нарушения фиксированы в пространстве), не уточняется количественно понятие критической концентрации трещин и влияние топологических факторов, анизотропии и корреляции в системе трещин, предлагаемая модель открывает пути к построению теории, учитывающей все названные факторы. Перколяционная модель разрушения в разных ее вариантах позволяет описать как мгновенное, так и длительное дисперсное разрушение, а также прорастание одной трещины. Теория перколяции может быть полезной и при интерпретации явлений пластичности и ползучести: например, предел текучести можно рассматривать как порог перколяции, достигаемый при критической концентрации площадок скольжения. Теория перколяции дает первичный топологический базис для анализа необратимого статистического процесса разрушения: инварианты типа θ_c , V_c , V_{cl} , перколяционные функции S , L_c , N_{cl} , G . Вводя некоторые дополнительные предположения, на этом базисе можно строить различные физические надстройки — деформационную, прочностную, кинетическую, энергетическую и т. д.

Все это позволяет надеяться, что методы теории перколяции займут достойное место в статистической механике разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hill R. A self-consistent mechanics of composite media.— J. Mech. Phys. Solids, 1965, v. 13, p. 213—223.
2. Hammersley J. M., Broadbent J. R. Percolation processes.— Proc. Cambridge Phys. Soc. 1957, v. 53, p. 629—641; 1957, v. 53, p. 642—651.
3. Schante V. K., Kirkpatrick S. An introduction to percolation theory.— Advances Phys. 1971, v. 20, p. 325—357.
4. Hammersley J. M., Welsh D. J. Percolation theory and its ramifications.— Contemporary Physics. 1980, v. 21, p. 593—605.
5. Шкловский Б. И., Эфрос А. Л. Электронные свойства легированных полупроводников. М.: Наука, 1979. 416 с.
6. Регель В. Р., Слуцкер А. И., Томашевский Э. С. Кинетическая природа прочности твердых тел. М.: Наука, 1974. 560 с.
7. Салганик Р. Л. Механика тел с большим числом трещин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 4, с. 149—158.
8. Тамуж В. П., Куксенко В. С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1978. 294 с.
9. Pike G. E., Seager C. H. Percolation and conductivity.— Phys. Rev., 1974, v. 10, p. 1421—1446.
10. Брокс Д. Основы механики разрушения. М: Высшая школа, 1980. 368 с.
11. Кингери У. Д. Введение в керамику. М: Стройиздат. 1967. 500 с.
12. Левинштейн М. Е. и др. О связи между критическими индексами теории протекания.— ЖЭТФ, 1975, т. 69, с. 386—392.
13. Chelidze T. L. Percolation and Fracture.— Phys. Earth Planetary Interiors, 1982, v. 28, p. 93—101.
14. Chelidze T. L., Kolesnikov Yu. M. Percolationsmodell des Bruchprozesses.— Gerlands Beitr. Geophys., 1982, v. 91, p. 35—44.
15. Челидзе Т. Л. Об электрических и электрохимических предвестниках землетрясений.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1981, № 3, с. 55—59.
16. Benzing D. W., Russel W. B. The viscoelastic properties of ordered lattices.— J. Coll. Interface Sci., 1981, p. 178—190.

Тбилиси

Поступила в редакцию
3.III.1983