

УДК 532.516

О ПОСТАНОВКЕ И ИССЛЕДОВАНИИ ПЛОСКОЙ
КОНТАКТНО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ПЛАСТИЧНОЙ СМАЗКИ

КУДИШ И. И., СЕМИН В. Н.

Дана постановка плоской изотермической контактно-гидродинамической задачи для шероховатых упругих тел, разделенных тонким слоем пластичной смазки. В качестве модели пластичной смазки выбрана несжимаемая среда Бингама — Шведова [1].

Поставленная задача сведена к системе нелинейных интегродифференциальных уравнений и неравенств и относится к классу задач со многими заранее неизвестными границами, между которыми реализуются различные заранее неизвестные типы течений. В частности, при ряде типов течений между контактирующими поверхностями образуются слои жидкости (ядра), в которых отсутствует сдвиг.

Проанализирована корректность поставленной задачи. Рассмотрен ряд качественных свойств течения смазки. Подробно исследованы безъядерные режимы течения для случаев тяжело нагруженных упругих тел и абсолютно жестких тел. Показано, что в этих случаях толщина слоя смазки, сила трения качения, давление и зазор между телами вычисляются согласно зависимостям, полученным ранее для ньютоновской жидкости в [2, 3], а сила трения скольжения отличается от вычисленной по формулам для ньютоновской жидкости на аддитивную постоянную. Приведены некоторые численные данные.

1. Постановка задачи. Исследуем плоскую изотермическую контактно-гидродинамическую задачу о течении пластичной смазки через узкий зазор между упругими шероховатыми цилиндрами. Предположим, что толщина слоя мала по сравнению с его протяженностью и инерционными силами можно пренебречь [4]. Тогда после введения декартовой системы координат с осью x , направленной вдоль качения, и осью z — по направлению центров кривизн контактирующих тел (см. фиг. 1), уравнения движения смазки можно записать в виде [4]:

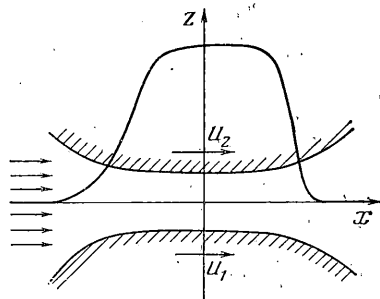
$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{dp}{dx}, \quad \frac{d}{dx} \int_{-h/2}^{h/2} u(x, z) dz = 0 \quad (1.1)$$

Здесь $\tau = \tau(x, z)$ — касательное напряжение, $p = p(x)$ — давление, $h = h(x)$ — функция зазора между контактирующими телами¹, $u(x, z)$ — скорость смазки в направлении оси x .

Рассмотрим простейшую несжимаемую пластичную жидкость, описываемую моделью Бингама — Шведова. Тогда в указанных предположениях реологические соотношения для смазки запишутся в виде [1]:

$$\tau = \tau_0 \operatorname{sign} \tau + \mu du/dz, \quad |\tau| > \tau_0 \quad (1.2)$$

$$\partial u / \partial z = 0, \quad |\tau| \leq \tau_0 \quad (1.3)$$



Фиг. 1

¹ Здесь и ниже предполагается, что $dh/dx \sim h_0/b_H \ll 1$, где h_0 — характерная толщина слоя смазки, а b_H — полуширина герцевской области контакта.

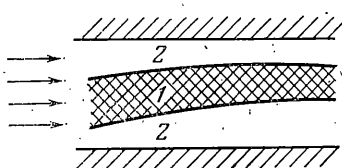
где $\tau_0 = \tau_0(p)$ — пороговое касательное напряжение, $\mu = \mu(p)$ — вязкость смазки.

Принтегрировав первое уравнение в (1.1), найдем

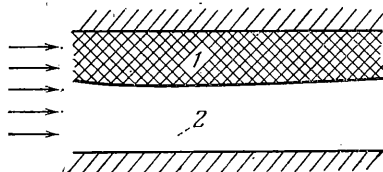
$$\tau = f + z dp/dx \quad (1.4)$$

где $f = f(x)$ — заранее неизвестная функция касательного напряжения скольжения.

Для замыкания уравнений (1.1), (1.2), (1.4) и определения функций $\tau(x, z)$, $u(x, z)$ и $f(x)$ к ним следует добавить граничные условия на контактирующих поверхностях и условия непрерывности скорости на границе



Фиг. 2



Фиг. 3

ядра и вязкого течения. Исходя из того, что при $|\tau| > \tau_0$ первое уравнение (1.1) и уравнение (1.2) эквивалентны дифференциальному уравнению для $u(x, z)$ второго порядка, можно сделать вывод, что в любом сечении потока не может быть более одного ядра. Поэтому в любом сечении $x = \text{const}$ возможно одно из течений, указанных на фиг. 2—4, которые назовем течениями первого, второго² и третьего типов.

Теперь для каждого из типов течений можно выписать соответствующие граничные условия и условия непрерывности скорости. Тогда для течения первого типа будем иметь (ядро 1 расположено в центре потока, область 2 соответствует вязкому течению со сдвигом)

$$u(x, -h/2) = u_1, u(x, h/2) = u_2, u(x, z_1) = u(x, z_2) \quad (-h/2 < z_1 < z_2 < h/2) \quad (1.5)$$

для течений типа 2-A и 2-B соответственно (ядро 1 примыкает к верхнему телу, область 2 — вязкое течение со сдвигом)

$$\begin{aligned} u(x, -h/2) = u_1, u(x, z_1) = u_2 \quad (-h/2 < z_1 < h/2 \leq z_2) \\ u(x, z_2) = u_1, u(x, h/2) = u_2 \quad (z_1 \leq -h/2 < z_2 < h/2) \end{aligned} \quad (1.6)$$

для течения третьего типа (1 — вязкое течение со сдвигом, ядра в потоке нет)

$$\begin{aligned} u(x, -h/2) = u_1, u(x, h/2) = u_2 \\ (z_1 \leq z_2 \leq -h/2 \text{ либо } -h/2 < z_1 = z_2 < h/2 \text{ либо } h/2 \leq z_1 \leq z_2) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь u_1 и u_2 — линейные скорости движения точек поверхностей контактирующих тел как жестких, $z_1 = z_1(x)$ и $z_2 = z_2(x)$ — нижняя и верхняя границы ядра в данном сечении, которые определяются из уравнений

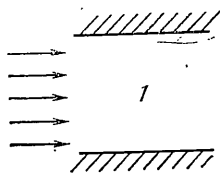
$$\partial u(x, z_i) / \partial z = 0 \quad (i=1, 2) \quad (1.8)$$

Исходя из уравнений (1.4)–(1.8) перейдем к определению функций $f(x)$, $z_1(x)$, $z_2(x)$ и выводу уравнений типа Рейнольдса. В произвольно выбранном сечении $x = \text{const}$ рассмотрим по порядку все возможные типы течений и условия, при которых они реализуются. При этом удобно считать, что

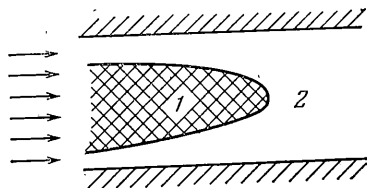
² Ко второму типу течения относится также случай, в котором ядро примыкает к нижнему телу. Данная конфигурация течения исследуется аналогично указанной на фиг. 3.

течение создается расположенными в бесконечности (т. е. при $z = \pm\infty$) поверхностями и занимает все пространство (x, z), а область $-h/2 \leq z \leq h/2$ является лишь фрагментом течения.

Не ограничивая общности, предположим, что $u_2 - u_1 \geq 0$. Предположим, что в рассматриваемом сечении реализуется течение первого типа. Видно, что по разные стороны от ядра производная du/dz имеет различные знаки



Фиг. 4



Фиг. 5

в зависимости от знака dp/dx . Тогда из (1.2), (1.4) и (1.8) найдем выражения для z_1 и z_2 :

$$z_1 = - \left(\tau_0 \operatorname{sign} \frac{dp}{dx} + f \right) / \frac{dp}{dx}, \quad z_2 = \left(\tau_0 \operatorname{sign} \frac{dp}{dx} - f \right) / \frac{dp}{dx} \quad (1.9)$$

Далее из (1.5) и (1.9) можно найти выражения для $u(x, z)$ и затем функцию $f(x)$:

$$f = \frac{\mu(u_2 - u_1)}{h} \left(1 - \frac{2\tau_0}{h|dp/dx|} \right)^{-1} \quad (1.10)$$

Из неравенств в (1.5) с помощью неравенств $\tau_0 \geq 0$ и $u_2 \geq u_1$ установим условие, при котором реализуется течение первого типа

$$\left| \frac{dp}{dx} \right| > \frac{2\tau_0}{h} + \frac{\mu(u_2 - u_1)}{h^2} + \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\mu(u_2 - u_1)}{h} \left[\frac{\mu(u_2 - u_1)}{h} + 4\tau_0 \right]} \quad (1.11)$$

Проинтегрировав упомянутые выше выражения для скорости $u(x, z)$ (1.1), найдем аналог уравнения Рейнольдса для течения первого типа

$$\frac{d}{dx} \left\{ \left[-\frac{2}{3\mu} \frac{(\tau_0^{-1/2} h |dp/dx|)^2 (2\tau_0 + 1/2 h |dp/dx|)}{(dp/dx)^2} + \frac{\mu(u_2 - u_1)^2 \tau_0}{2(\tau_0^{-1/2} h |dp/dx|)^2} \right] \operatorname{sign} \frac{dp}{dx} - \frac{u_1 + u_2}{2} h \right\} = 0 \quad (1.12)$$

Предположим, что в рассматриваемом сечении реализуется течение второго типа. При этом можно показать, что для z_1 и z_2 сохраняются формулы (1.9), а для функции f справедливо равенство

$$f = \tau_0^{-1/2} h |dp/dx| + \sqrt{2\mu(u_2 - u_1) |dp/dx|} \quad (1.13)$$

При этом использованы неравенства из (1.6) (см. соответствующее примечание). Из этих же неравенств следует условие, при котором реализуется рассматриваемое течение

$$\frac{2\mu(u_2 - u_1)}{h^2} < \left| \frac{dp}{dx} \right| \leq \frac{2\tau_0}{h} + \frac{\mu(u_2 - u_1)}{h^2} + \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\mu(u_2 - u_1)}{h} \left[\frac{\mu(u_2 - u_1)}{h} + 4\tau_0 \right]} \quad (1.14)$$

При этом аналог уравнения Рейнольдса принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{u_2 - u_1}{3} \sqrt{2\mu(u_2 - u_1)} / \left| \frac{dp}{dx} \right| + \left[\frac{u_1 + u_2}{2} \operatorname{sign} \frac{dp}{dx} + \frac{u_1 - u_2}{2} \right] h \right\} = 0 \quad (1.15)$$

Предположим, что в рассматриваемом сечении реализуется третий тип течения. Тогда из (1.1)–(1.4), (1.7) и (1.8) нетрудно получить

$$f = \tau_0 + \mu(u_2 - u_1) / h \quad (1.16)$$

$$|dp/dx| \leq 2\mu(u_2 - u_1) / h^2 \quad (1.17)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} - \frac{u_1 + u_2}{2} h \right\} = 0. \quad (1.18)$$

Заметим, что касательное напряжение τ в любой точке потока вычисляется с помощью (1.4) и одной из формул (1.10), (1.13) и (1.16).

К системе уравнений и неравенств (1.12), (1.11), (1.15), (1.14), (1.18) и (1.17) следует добавить в точках входа x_i и выхода x_e граничные условия [2, 4]:

$$p(x_i) = p(x_e) = dp(x_e) / dx = 0 \quad (1.19)$$

Однако указанная выше система уравнений и неравенств совместно с условиями (1.19) является незамкнутой. Для ее замыкания в каждой точке смены типа течения x_e необходимо добавить два условия сопряжения для функции давления $p(x)$. Очевидно, ими являются условия

$$p(x_e - 0) = p(x_e + 0), \quad dp(x_e - 0) / dx = dp(x_e + 0) / dx \quad (1.20)$$

Отметим, что выполнение условий (1.20) влечет за собой постоянство расхода жидкости в любом сечении, а также непрерывность касательного напряжения скольжения $f(x)$ и границ ядра $z_1(x)$ и $z_2(x)$.

Для определения функции $h(x)$ к полученной системе необходимо добавить уравнения [2–5]:

$$h(x) = h_e + k p^{\alpha^0} + \frac{x^2 - x_e^2}{R'} + \frac{4}{\pi E'} \int_{x_i}^{x_e} p(t) \ln \frac{x_e - t}{|x - t|} dt \quad (0 < \alpha^0 < 1) \quad (1.21)$$

$$\int_{x_i}^{x_e} p(t) dt = P \quad (1.22)$$

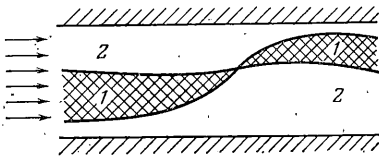
первое из которых получено с учетом нормальных упругих перемещений точек поверхностей контактирующих тел (в предположениях теории Герца) и перемещений микронеровностей. Здесь $h_e = h(x_e)$ — толщина слоя смазки в точке выхода из области контакта, k и α^0 — параметры шероховатости контактирующих поверхностей, R' и E' — приведенные радиус и модуль упругости материалов тел, P — приложенная к телам сила.

Итак, рассматриваемая задача свелась к замкнутой системе уравнений и неравенств (1.12), (1.11), (1.15), (1.14), (1.18), (1.17), (1.19)–(1.22), из которой при заданных постоянных x_i , u_1 , u_2 , k , α^0 , R' , E' , P и функциях $\mu(p)$ и $\tau_0(p)$ определяются постоянные x_e , h_e и функции $p(x)$ и $h(x)$. Кроме того, при наличии точек смены типов течений определяются их координаты x_e , а также функции $f(x)$ и $\tau(x, z)$.

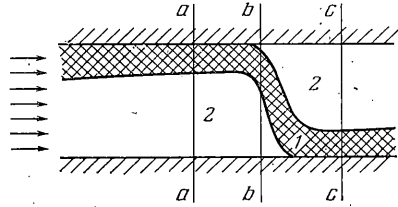
Поставленная задача относится к классу сложных нелинейных задач со многими заранее неизвестными границами, в областях между которыми реализуются различные заранее неизвестные типы течений.

2. Некоторые свойства уравнений и неравенств задачи. Качественное поведение решения. В п. 1 плоская изотермическая контактно-гидродинамическая задача для пластичной смазки была сведена к системе нелинейных интегродифференциальных уравнений и неравенств с заранее неизвестными границами.

При $\tau_0=0$ уравнения и неравенства поставленной задачи сводятся к уравнениям контактно-гидродинамической теории ньютоновской жидкости [4]. Аналогично если во всей области контакта справедливо неравенство (1.17), то решения задач для пластичной и ньютоновской смазок совпадают (см. уравнения (1.18), (1.19), (1.21), (1.22)); отличаются лишь касательные напряжения скольжения $f(x)$ на аддитивную функцию $\tau_0(p)$ (см. формулу (1.16) и [4]). В то же время, если в какой-либо



Фиг. 6



Фиг. 7

зоне области контакта неравенство (1.17) нарушается, то в этой зоне смазка проявляет пластические свойства. При этом в области малых dp/dx при $u_1 \neq u_2$ смазка продолжает вести себя подобно ньютоновской жидкости (см. неравенство (1.17) и уравнение (1.18)).

При $u_1=u_2=0$, $h(x)=h_0=\text{const}$ и $\tau_0>0$ видно, что условия существования отличного от нуля расхода жидкости через сечение $[-h_0/2, h_0/2]$ в виде $|dp/dx| > 2\tau_0/h$ (см. (1.11)) совпадают с приведенными в [6]. Условия существования отличного от нуля расхода смазки в случае $u_1=u_2>0$ и $\tau_0>0$ тождественны условиям, отмеченным выше.

Таким образом, при $u_1=u_2$ и $\tau_0>0$ решение поставленной задачи не существует. Этот факт вызван дефектами принятой модели смазки Бингама — Шведова, представляющей собой жесткопластическую среду.

Следуя [2–5], будем считать, что вклад касательных напряжений в нормальное перемещение и линейные скорости точек поверхностей пренебрежимо мал.

Рассмотрим вопрос о возможных конфигурациях течения. Учитывая непрерывность границ ядра, можно показать, что случай, когда течение третьего типа сменяет течение первого типа, невозможен. Действительно, единственной возможностью реализации данной ситуации, очевидно, является конфигурация, показанная на фиг. 5 (1 — ядро течения, 2 — вязкое течение со сдвигом) и характеризуемая равенством $z_1=z_2$. Из этого равенства и соотношений (1.9) следует, что $\tau_0=0$. Приходим к противоречию. Очевидно, что приведенное рассуждение показывает также нереализуемость течений, в которых хотя бы в одной точке ядро течения первого типа вырождается в точку (см., например, фиг. 6; обозначения прежние).

Покажем невозможность конфигурации течения, приведенной на фиг. 7. Конфигурации, о которых идет речь, характеризуются наличием двух сечений $x=x_0$ и $x=x_1$, таких, что при $x_0 < x < x_1$ имеет место течение первого типа, а в левой и правой малых окрестностях соответственно точек x_0 и x_1 имеют место течения типов 2-А и 2-Б (или наоборот). Рассмотрим три сечения течения. В сечении aa (см. неравенства (1.14)) $dp/dx < 0$, а в сечении cc имеем соответственно $dp/dx > 0$. Предполагая, что $p(x)$ непрерывно дифференцируемая функция, что согласуется с (1.20), получим, что между точками $x=x_0$ и $x=x_1$ существует сечение bb , в котором $dp/dx=0$ и реализуется безъядерное течение. Однако по условию в любом сечении x , таком, что $x_0 < x < x_1$, имеет место течение первого типа, т. е. имеется ядро; пришли к противоречию.

Очевидно, что в области контакта не может быть реализовано ни одно течение, которое включает в себя рассмотренные выше конфигурации и им аналогичные.

3. Некоторые типы решений, схожих с решениями для случая ньютоновской жидкости. В уравнениях и неравенствах задачи, согласно [2], введем безразмерные переменные, соответствующие случаю тяжело нагруженного контакта [2, 3], приняв, кроме того, $\tau_0 = \tau'_0 2P / (\pi R')$, где τ'_0 — безразмерная величина. При этом в определяющие соотношения задачи войдут безразмерные параметры

$$sl = \frac{2(u_2 - u_1)}{u_2 + u_1}, \quad V = \frac{3(u_1 + u_2)\mu_0 E'^3}{4R' p_H^4}, \quad \lambda = \frac{kR' p_H^{\alpha_0}}{b_H^2}, \quad H_0 = \frac{h_e R'}{b_H^2}$$

Для краткости далее не будем выписывать соотношения задачи в безразмерном виде, а будем ссылаться на соответствующие размерные аналоги.

Ниже исследуются случаи безъядерных течений. Рассмотрим режим тяжело нагруженного контакта. При этом, очевидно, в уравнениях и неравенствах задачи фигурирует малый параметр ω (например, $\omega = V$; подробнее см. в [2, 5]), обеспечивающий режим тяжелого нагружения, и применимы асимптотические методы, развитые в [2, 5] для нелинейно-вязких жидкостей (и, в частности, для ньютоновской жидкости). По аналогии с [2, 5] введем функцию $v(x) = 1/2 H_0 h (f - \tau_0)^{-1} dp/dx$. При этом неравенство (1.17) может быть переписано в виде $|v(x)| \leq 1$. В силу этого в случаях, когда в зоне входа в область контакта $v \ll 1$ и $v \sim 1$, $|v| \leq 1$ при $\omega \ll 1$ полностью справедлив асимптотический анализ, проведенный в [2, 5], а также результаты, полученные с его помощью. В частности, в случае, когда в зоне входа $v \ll 1$ или $v \sim 1$ и $|v| \leq 1$ при $\omega \ll 1$, справедлива формула для толщины слоя смазки H_0 , совпадающая с формулой для случая ньютоновской жидкости (2.13) из [2] при $\alpha = 1$:

$$H_0 = A (V \varepsilon_q^2)^{1/2}, \quad A = A(\alpha_1, \lambda_0, \alpha^0) \quad (3.1)$$

$$\text{при } \varepsilon_q \ll V^{2/5} \text{ или } \varepsilon_q \sim V^{2/5} \text{ и } \mu(\varepsilon_q^{1/2}) \sim 1$$

($\varepsilon_q = \varepsilon_q(\omega)$ — характерный размер зоны входа, a — безразмерная координата входа в область контакта, $\alpha_1 = (a+1)/\varepsilon_q$, $\lambda_0 = \lambda \varepsilon_q^{(\alpha^0 - 3)/2}$).

Заметим, что ранее³, минуя вывод полной системы уравнений и неравенств задачи, приближенным методом Грубина был рассмотрен лишь один безъядерный режим смазывания и получена формула для H_0 , совпадающая с формулой [2, с. 86], при $m=1$, $\alpha=1$ и частном значении характерного размера зоны входа $\varepsilon_q = (VQ)^{1/2}$.

Рассмотрим режим легко нагруженного контакта. При этом, согласно [3], удобно ввести безразмерные переменные, соответствующие этому режиму, и присоединить к ним соотношения

$$\tau_0 = \frac{h_e P \theta^2}{\pi R'^2} \tau_0', \quad h_e = R' \frac{\gamma}{\theta^2}, \quad \theta^2 = \frac{P}{3\pi \mu_0 (u_1 + u_2)}$$

При этом в соотношения задачи войдут большой параметр $V \gg 1$ и параметр шероховатости $\lambda_0 = k(\theta^2/R') [2\theta P / (\pi R')]^{\alpha^0}$, который примем соизмеримым с V^{-1} .

Тогда при выполнении неравенства (1.17) и $V \gg 1$ задача может быть исследована асимптотическими методами из [3].

Изучим более подробно предельный случай задачи для жестких тел. Тогда из (1.17) — (1.19) получим условие $sl \geq sl_0 = 6(a^2 - c^2) / (\gamma + a^2 - c^2)$ показывающее, что во всей области контакта смазка ведет себя подобно ньютоновской жидкости. Здесь a , c и γ — компоненты решения контактно-гидродинамической задачи для жестких тел, смазываемых ньютоновской жидкостью. Численные значения sl_0 , вычисленные с помощью результатов из [3], в зависимости от величины a приведены ниже

a	-0,031	-0,164	-0,554	-0,954	-5	-10
sl_0	0,96	2,64	4,56	5,28	5,96	5,99

Таким образом, в рассмотренных случаях вне зависимости от величины τ_0 значения толщины слоя смазки, функций давления и зазора совпадают со значениями соответствующих параметров для ньютоновской смазки. Силы трения скольжения F_S и качения F_R определяются по формулам

³ Дроздов Ю. Н., Ширококов В. В. Толщина пленки пластичной смазки в упруго-гидродинамическом контакте цилиндров. — В кн.: Тез. Всес. научно-техн. конф. «Трибоника и антифрикционное материаловедение». Новочеркасск: Изд-е Новочеркасск. политехн. ин-та, 1980, с. 25–26.

(в размерных переменных)

$$F_s = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx, \quad F_R = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} h(x) \frac{dp}{dx} dx$$

Отсюда вытекает, что сила трения качения F_R также совпадает с силой трения качения для ньютоновской жидкости, а сила трения скольжения F_S отличается от F_S , вычисленной для ньютоновской жидкости, на аддитивную постоянную (см. формулу (1.16)).

Следует также заметить, что для рассмотренных в данном пункте случаев справедливы все качественные и количественные выводы о поведении решения, полученные в соответствующих условиях в [2, 3].

Если же в некоторой зоне области контакта неравенство (1.17) нарушается, то в этой зоне давление уже не следует закономерностям, которым подчиняются ньютоновские жидкости, и здесь проявляются пластические свойства смазки. В частности, для случая жестких тел в аналитическом виде могут быть получены решения задачи при наличии зон с пристеночными ядрами (см., например, [7]).

Отметим, что приведенная постановка задачи и результаты исследования могут быть обобщены на случай плоской контактно-гидродинамической задачи для пластичной среды, подчиняющейся реологическим соотношениям $\tau = \tau_0 \text{sign } \tau + \Phi(\mu du / dz)$, $|\tau| > \tau_0$, $du / dz = 0$, $|\tau| \leq \tau_0$, где Φ — произвольная достаточно гладкая нечетная монотонно возрастающая функция.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рейнер М. Реология. М.: Наука, 1965. 223 с.
2. Александров В. М., Кудиш И. И. Задача контактно-гидродинамической теории смазки для вязкой жидкости со сложной реологией. — Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4, с. 78–91.
3. Кудиш И. И. Некоторые задачи упругогидродинамической теории смазки легко нагруженного контакта. — Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 3, с. 81–95.
4. Коднир Д. С. Контактная гидродинамика смазки деталей машин. М.: Машиностроение, 1976. 303 с.
5. Кудиш И. И. Упругогидродинамические задачи для шероховатых тел с неньютоновской смазкой. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 11, с. 915–920.
6. Воларович М. П., Гуткин А. М. Течение пластично-вязкого тела между двумя параллельными плоскими стенками и в кольцевом пространстве между двумя коаксиальными трубками. — Ж. техн. физики, 1946, т. 16, вып. 3, с. 321–328.
7. Кудиш И. И., Семин В. Н. Определение толщины слоя пластичной смазки в роликовых подшипниках. — Тр. Всес. н.-и. конструкт.-технол. ин-та подшип. пром-сти, М., 1981, № 2(108), с. 43–57.

Москва

Поступила в редакцию
16.XII.1982