

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЕРФОРИРОВАННЫХ ПЛАСТИН

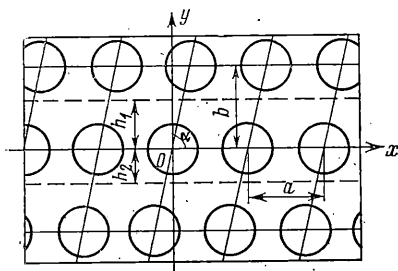
ГОЛОВЧАН В. Т., НИКИТЮК Н. И.

При решении плоских задач теории упругости для бесконечных пластин с двоякопериодическим расположением отверстий применялись различные методы. В некоторых работах построение бигармонической функции напряжений осуществляется при помощи специальных систем гармонических функций. Так, например, в [1] рассматриваются правильные решетки и функция напряжений записывается в виде тригонометрических рядов.

Многие работы используют методы теории функций комплексного переменного, позволяющие сводить бигармонические задачи к краевым задачам теории аналитических функций. Комплексные потенциалы при этом записываются или в виде представлений Аппеля, как это сделано в [2], или задаются своими лорановскими разложениями [3]. Широко распространено использование комплексных потенциалов в виде рядов по функциям Вейерштрасса и специальным мероморфным функциям [4-7], представляющим собой двойные ряды.

В [8] двоякопериодические функции представляются интегралами типа Коши с ядром вида дзета-функции Вейерштрасса и задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Отметим также работу [5], содержащую обзор и анализ различных методов, статью [9], авторы которой применяют метод конечных элементов.

В публикуемой работе предлагается новый метод решения задач для перфорированной пластины. В основе метода — использование точного решения уравнений



Фиг. 1

Лапе в пределах полосы, содержащей один ряд отверстий. При этом применяются лишь одинарные, хорошо сходящиеся ряды. Такой подход позволяет рассматривать пластины с двоякопериодическим расположением отверстий без предположения о наличии какой-либо симметрии задачи относительно осей x и y .

1. Рассматривается тонкая изотропная пластинка с двоякопериодической системой круглых вырезов радиусом R . Расположение вырезов задается тремя параметрами a , b и α , показанными на фиг. 1. Предположим, что пластинка находится в условиях обобщенного

плоского напряженного состояния, т. е. перемещения ее точек в направлении осей x и y равны: $U=U(x, y)$, $V=V(x, y)$. Представим эти перемещения в виде

$$U=Ax+By+U_1(x, y), \quad V=Bx+Cy+V_1(x, y). \quad (1.1)$$

где A , B и C — некоторые фиксированные вещественные постоянные, а U_1 и V_1 подчиняются следующим условиям периодичности:

$$\begin{aligned} U_1(x+a, y) &= U_1(x, y), & V_1(x+a, y) &= V_1(x, y) \\ U_1(x, y) &= U_1(x-b \operatorname{ctg} \alpha, y-b) + \Gamma_1 \\ V_1(x, y) &= V_1(x-b \operatorname{ctg} \alpha, y-b) + \Gamma_2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\sigma_y^{(1)}(x, y) = \sigma_y^{(1)}(x-b \operatorname{ctg} \alpha, y-b), \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, y) = \tau_{xy}^{(1)}(x-b \operatorname{ctg} \alpha, y-b)$$

где Γ_1, Γ_2 — некоторые постоянные, а напряжения $\sigma_y^{(1)}$ и $\tau_{xy}^{(1)}$ соответствуют перемещениям U_1 и V_1 .

Предполагая контуры вырезов свободными от внешних нагрузок, представим с учетом (1.1), (1.2) граничные условия задачи в виде $\sigma_\rho(R, \varphi) = 0$, $\tau_{\rho\varphi}(R, \varphi) = 0$, где ρ, φ — полярные координаты, соответствующие декартовой системе Oxy , показанной на фиг. 1.

Таким образом, задача состоит в построении такого решения $U_1 + iV_1$ уравнений Ламе плоской теории упругости, которое удовлетворяет условиям периодичности (1.2) и содержит достаточно произвола для выполнения краевых условий.

2. Для записи искомого решения $U_1 + iV_1$ воспользуемся двумя системами периодических по x решений уравнений Ламе. Первая система затухает при $|y| \rightarrow \infty$, а суперпозиция ее элементов дает следующее решение:

$$U_{1,1} + iV_{1,1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n + \frac{2\psi_n}{\kappa^*} B_n y \right) e^{i\psi_n \bar{z}} + \bar{B}_n e^{-i\psi_n z} \right] \quad (y < 0) \quad (2.1)$$

$$U_{1,1} + iV_{1,1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(C_n - \frac{2\psi_n}{\kappa^*} D_n y \right) e^{-i\psi_n \bar{z}} + \bar{D}_n e^{i\psi_n z} \right] \quad (y > 0)$$

$$\psi_n = 2\pi n/a, \quad z = x + iy, \quad \kappa^* = (3 - \nu)/(1 + \nu)$$

где ν — коэффициент Пуассона материала пластинки.

Для получения второй системы решений примем во внимание, что (2.1) содержит три различных типа функций:

$$w_{n,1} = \begin{cases} -e^{i\psi_n \bar{z}} & (y < 0) \\ e^{-i\psi_n \bar{z}} & (y > 0) \end{cases}, \quad w_{n,2} = \begin{cases} -\frac{2\psi_n}{\kappa^*} y e^{i\psi_n \bar{z}} - e^{-i\psi_n z} & (y < 0) \\ -\frac{2\psi_n}{\kappa^*} y e^{-i\psi_n \bar{z}} + e^{i\psi_n z} & (y > 0) \end{cases} \quad (2.2)$$

$$w_{n,3} = \begin{cases} -\frac{2\psi_n}{\kappa^*} y e^{i\psi_n \bar{z}} + e^{-i\psi_n z} & (y < 0) \\ -\frac{2\psi_n}{\kappa^*} y e^{-i\psi_n \bar{z}} - e^{i\psi_n z} & (y > 0) \end{cases}$$

Для этих функций имеют место равенства $\overline{w_{n,j}^+(x, -y)} = -w_{n,j}^-(x, y)$, причем $w_{n,j}^+ = w_{n,j}$ при $y > 0$ и $w_{n,j}^- = w_{n,j}$ при $y < 0$ ($j = 1, 2, 3$). Кроме того, уравнениям Ламе удовлетворяют выражения

$$\frac{d^p}{d\bar{z}^p} w_{n,1}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^p w_{n,2}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^p w_{n,3} \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

Введем следующие периодические по x решения:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi(x - ka, y) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m w_{m,1}^+, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_1'(x - ka, y) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m w_{m,2}^+, \quad (2.4)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_2'(x - ka, y) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m w_{m,3}^+ \quad (y > 0)$$

Для постоянных A_m , B_m и C_m имеют место такие интегральные представления:

$$\begin{aligned}
 aA_me^{-\psi_m y} &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t, y) e^{i\psi_m t} dt, \\
 -aB_m \frac{2\psi_m}{\kappa^*} y e^{-\psi_m y} &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1'(t, y) e^{i\psi_m t} dt \\
 aB_m e^{-\psi_m y} &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1'(t, y) e^{-i\psi_m t} dt, \\
 -aC_m \frac{2\psi_m}{\kappa^*} y e^{-\psi_m y} &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi_2'(t, y) e^{i\psi_m t} dt, \\
 -aC_m e^{-\psi_m y} &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi_2'(t, y) e^{-i\psi_m t} dt
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Используя таблицы экспоненциального преобразования Фурье [10], находим

$$\begin{aligned}
 2\pi e^{-\psi_m y} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it\psi_m}}{y-it} dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\psi_m}}{y-it} dt = 0 \quad (\psi_m > 0) \\
 -2\pi\psi_m y e^{-\psi_m y} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{it}{(y+it)^2} - \frac{1}{y+it} \right] e^{it\psi_m} dt \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\psi_m t}}{(y+it)^2} dt &= 0 \quad (\psi_m > 0)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Сравнение (2.5) и (2.6) приводит к следующим равенствам:

$$\begin{aligned}
 aA_m &= 2\pi, \quad \xi(t, y) = 1/(y+it), \quad aB_m = 2\pi \\
 \xi_1' &= \frac{1}{y-it} + \frac{2}{\kappa^*} \left[\frac{it}{(y+it)^2} - \frac{1}{y+it} \right], \quad aC_m = -2\pi \\
 \xi_2' &= \frac{1}{y-it} - \frac{2}{\kappa^*} \left[\frac{it}{(y+it)^2} - \frac{1}{y+it} \right] \quad (m > 0)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Кроме того, имеем из (2.5) с учетом (2.7) $aA_0 = aB_0 = -aC_0 = \pi$.

Таким образом, разложения (2.4) приобрели полную определенность, так как известны функции ξ , ξ_1' , ξ_2' и постоянные A_m , B_m , C_m . Для $y < 0$ достаточно заменить в правых частях равенств (2.4) $w_{m,j}^+$ на $w_{m,j}^-$, что следует из соотношений

$$\xi(t, -y) = \overline{\xi(t, y)}, \quad \xi_1'(t, -y) = \overline{-\xi_1'(t, y)}, \quad \xi_2'(t, -y) = \overline{-\xi_2'(t, y)}$$

Левые части (2.4) имеют смысл и удовлетворяют уравнениям Ламе и на оси x , за исключением точек $x = ka$, в которых они обращаются в бесконечность. Благодаря этому периодические по x решения (2.4) могут

быть названы внешними. Представим их в виде

$$\xi_1' = -i \sum_k \frac{1}{\bar{z}_k} = -i \xi_1, \quad \xi_1' = i \left[\bar{\xi}_1 - \frac{1}{\kappa^*} (\xi_1 - \xi_1) \right] \quad (2.8)$$

$$\xi_2' = i \left[\bar{\xi}_1 + \frac{1}{\kappa^*} (\xi_1 - \xi_1) \right], \quad \xi_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z_k}{\bar{z}_k^2}$$

Исходя из (2.8) получаем с учетом (2.3) и (2.4) следующую систему периодических по x решений:

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{dz^p} \xi_1' &= -i(-1)^p p! \sum_k \frac{1}{\bar{z}_k^{p+1}} = -i(-1)^p p! \xi_{p+1} \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^p \xi_1' &= i(-1)^p p! \left[\bar{\xi}_{p+1} - \frac{p+1}{\kappa^*} (\xi_{p+1} - \xi_{p+1}) \right] \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^p \xi_2' &= i(-1)^p p! \left[\bar{\xi}_{p+1} + \frac{p+1}{\kappa^*} (\xi_{p+1} - \xi_{p+1}) \right] \quad (p=0,1,\dots) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\xi_p = \sum_k \frac{1}{\bar{z}_k^p} = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_{pm} e^{-i\psi_m \bar{z}}, \quad (y > 0), \quad (2.10)$$

$$\xi_p = \sum_k \frac{1}{\bar{z}_k^p} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\xi}_{pm} e^{i\psi_m \bar{z}} \quad (y < 0)$$

$$\xi_{pm} = \frac{2\pi}{a} \varepsilon_m \psi_m^{p-1} i^p \frac{1}{(p-1)!}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_m = 1 \quad (m > 0)$$

$$\xi_p = \sum_k \frac{z_k}{\bar{z}_k^{p+1}} = (z - \bar{z}) \xi_{p+1} + \xi_p \quad (p=1,2,\dots)$$

Система (2.9) позволяет записать общее внешнее решение, если в соответствии с (2.1) и (2.2) просуммировать по p выражение

$$E_p' \frac{d^p}{dz^p} \xi_1' + f_p^{(1)} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^p \xi_1' + i f_p^{(2)} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^p \xi_2'$$

в котором E_p' — комплексная, а $f_p^{(1)}$ и $f_p^{(2)}$ — действительные постоянные. В результате имеем

$$U_{1,2} + iV_{1,2} = \sum_{p=1}^{\infty} \left(E_p \xi_p + \frac{p}{\kappa^*} \bar{F}_p \xi_p + F_p \bar{\xi}_p \right) \quad (2.11)$$

где E_p и F_p — произвольные комплексные постоянные.

В связи с полученным периодическим по x решением (2.11) уравнений плоской теории упругости заметим следующее. В работе Г. Н. Савина [11, с. 37] приведено периодическое представление Колосова — Мусхелишвили в виде

$$\begin{aligned} 2\mu(U - iV) &= \kappa^* \varphi_0(z) - (z - \bar{z}) \overline{\varphi_0'(z)} - \bar{\psi}_0(\bar{z}) \\ \varphi_0(z+a) &= \varphi_0(z), \quad \psi_0(z+a) = \psi_0(z) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Легко видеть, что это представление следует из (2.1). Если теперь подставить в (2.12) выражения Аппеля для аналитических функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ [5] и незначи-

тельно перестроить результат, то придем к (2.11). Таким образом, приведенный выше способ получения решения (2.11) является по существу доказательством результата, подобного представлению Апелля для аналитических функций: ограниченное в плоскости с исключенной бесконечной системой на оси x полюсов и периодическое по x решение уравнений Ламе плоской теории упругости получается при помощи суперпозиции локальных решений, связанных с каждым из полюсов и затухающих при $|y| \rightarrow \infty$.

3. Переходя к решению сформулированной в п. 1 задачи, представим перемещения в полосе $-h_2 \leq y \leq h_1$ ($h_1 + h_2 = b$; $h_1, h_2 > 0$) в виде

$$\begin{aligned} U_1 + iV_1 = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n + \frac{2\psi_n}{\kappa^*} B_n y_1 \right) e^{i\psi_n \bar{z}_1} + \bar{B}_n e^{-i\psi_n z_1} \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(C_n - \frac{2\psi_n}{\kappa^*} D_n y_2 \right) e^{-i\psi_n \bar{z}_2} + \bar{D}_n e^{i\psi_n z_2} \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \xi_n + \frac{n}{\kappa^*} \bar{F}_n \xi_n + F_n \bar{\xi}_n \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $z_1 = z - ih_1$, $z_2 = z + ih_2$, а функция $U_1 + iV_1$ является периодической по x с периодом a .

Принимая во внимание разложение (2.10), а также используя выражение для напряжений через перемещения

$$\sigma_y^{(1)} + i\tau_{xy}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\kappa^* - 1} (U_1 + iV_1) - (U_1 - iV_1) \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{1}{\kappa^* - 1} (U_1 - iV_1) \quad (3.2)$$

выполним вторую группу условий (1.2), считая точку (x, y) находящейся на границе полосы $y = h_1$, а точку $(x - b \operatorname{ctg} \alpha, y - b)$ — на границе $y = -h_2$. В итоге получим соотношения, связывающие постоянные A_n, B_n, C_n, D_n и Γ_1, Γ_2 с E_n, F_n ($n = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} A_n = & -\frac{\Delta_n}{\kappa^*} [2\psi_n (h_2 + b\Delta_n) a_n^{(1)} - a_n^{(2)} - \kappa^* a_n^{(3)}] e^{\psi_n h_1}, \\ C_n = & -\frac{\Delta_n}{\kappa^*} [2\psi_n (h_1 + b\Delta_n) b_n^{(1)} - b_n^{(2)} - \kappa^* b_n^{(3)}] e^{\psi_n h_2}, \\ B_n = & \Delta_n a_n^{(1)} e^{\psi_n h_1}, \quad D_n = \Delta_n b_n^{(1)} e^{\psi_n h_2}, \quad \Delta_n = [e^{\psi_n b(1+i \operatorname{ctg} \alpha)} - 1]^{-1}, \\ \Gamma_1 + i\Gamma_2 = & -2 \frac{i\tau}{a} \left(F_1 - \frac{1}{\kappa^*} \bar{F}_1 - E_1 \right) \\ a_n^{(1)} = & \sum_{m=1}^{\infty} \bar{F}_m \bar{\xi}_{mn}, \quad a_n^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} m \bar{F}_m \bar{\xi}_{mn}, \quad a_n^{(3)} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \bar{\xi}_{mn}, \\ b_n^{(1)} = & \sum_{m=1}^{\infty} \bar{F}_m \xi_{mn}, \quad b_n^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} m \bar{F}_m \xi_{mn}, \quad b_n^{(3)} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \xi_{mn} \end{aligned}$$

Воспользовавшись этими соотношениями, преобразуем (3.1) к виду

$$U_1 + iV_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_n \bar{\xi}_n + \frac{n}{\kappa^*} \bar{F}_n \xi_n + E_n \xi_n \right) + \frac{1}{\kappa^*} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n \{ -\psi_n [2b(1 + \Delta_n) +$$

(3.3)

$$+i(\bar{z}-z)]b_n^{(1)}+b_n^{(2)}+\kappa^*b_n^{(3)}\}e^{-i\psi_n\bar{z}}+\frac{1}{\kappa^*}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_n\{\psi_n[-2b(1+\Delta_n)+$$

$$+i(\bar{z}-z)]a_n^{(1)}+a_n^{(2)}+\kappa^*a_n^{(3)}\}e^{i\psi_n\bar{z}}+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\Delta}_n\bar{b}_n^{(1)}e^{i\psi_n z}+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\Delta}_na_n^{(1)}e^{-i\psi_n z}$$

Заметим, прежде всего, что выражение (3.3) не содержит величин h_1 и h_2 и имеет смысл в любой полосе шириной b . Так как оно удовлетворяет условиям периодичности (1.2) и содержит две бесконечные последовательности неопределенных постоянных E_n и F_n , то перемещения (3.3) могут быть использованы в качестве решения задачи, сформулированной в п. 1. Линейные слагаемые в (1.1) рассматриваются как возмущающий фактор задачи. Их разложение на контуре отверстия $\rho=R$ содержит только первую гармонику, поэтому решение (3.3) должно выражаться лишь через нечетные гармоники Фурье, т. е. $F_{2n}=E_{2n}=0$ ($n=1, 2, \dots$).

4. Неопределенные постоянные E_n, F_n определим удовлетворив граничным условиям $\sigma_p(R, \varphi)=0, \tau_{\varphi p}(R, \varphi)=0$. Необходимые для этого выражения находим используя соотношение

$$\sigma_p+i\tau_{\varphi p}=e^{-2i\varphi}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(U+iV)+\frac{1}{\kappa^*-1}\left[\frac{\partial}{\partial z}(U+iV)+\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(U-iV)\right]$$

и осуществив переход к полярной системе координат. В итоге получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений¹ относительно неопределенных постоянных E_n, F_n ($n=1, 3, \dots$):

$$-F_n-\sum_{j=1,3,\dots}^{\infty}\bar{F}_j\delta_{jn}+\kappa^*\sum_{j=1,3,\dots}^{\infty}E_j\bar{\gamma}_{jn}=-\delta_n^1\kappa^*\left[\frac{1}{2}(A-C)+iB\right] \quad (4.1)$$

$$-\varepsilon_n^{(1)}(n-2)\bar{F}_{n-2}-\kappa^*E_n+\sum_{j=1,3,\dots}^{\infty}F_j\gamma_{jn}+\delta_n^1\sum_{j=1,3,\dots}^{\infty}\bar{F}_j\bar{\gamma}_{ji}=-\delta_n^1\frac{\kappa^*}{\kappa^*-1}(A+C)$$

$$\gamma_{jn}=\theta_{jn}+\sum_{p=1}^{\infty}\bar{\Delta}_p\eta_{jpn}, \quad \delta_{jn}=-(n+2)\gamma_{j,n+2}+n\gamma_{jn}-\omega_{jn}$$

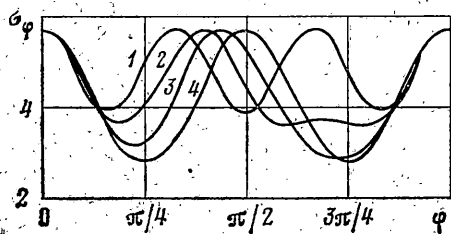
$$\omega_{jn}=-j\theta_{jn}+\sum_{p=1}^{\infty}\bar{\Delta}_p[2b\psi_p(1+\bar{\Delta}_p)-j]\eta_{jpn}, \quad \eta_{jpn}=\xi_{jp}\beta_{pn}+\xi_{jp}\bar{\beta}_{pn}$$

$$\beta_{pn}=\frac{\psi_p^n i^n}{n!}, \quad \theta_{jn}=-\frac{2(n+j-1)!}{n!(j-1)!a^{n+j}}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{k^{n+j}}, \quad \varepsilon_n^{(1)}=1-\delta_n^1$$

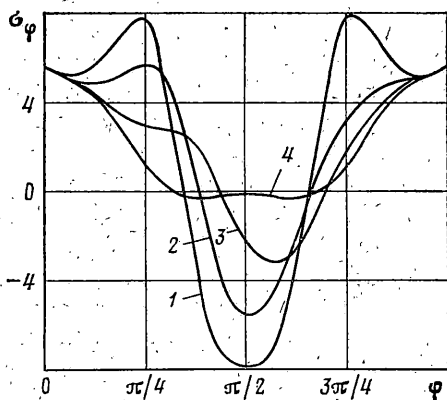
Так как двойные ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\gamma_{jn}|$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\delta_{jn}|$ сходятся при $a, b>2$

(выполнение этих неравенств обусловлено постановкой задачи), полученная бесконечная система является нормальной и для заданных A, B, C имеет единственное ограниченное решение, которое может быть получено с требуемой точностью методом редукции.

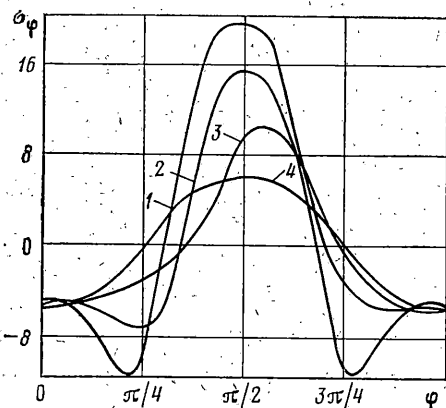
¹ Для удобства здесь и в дальнейшем единицей измерения расстояний выбран радиус R .



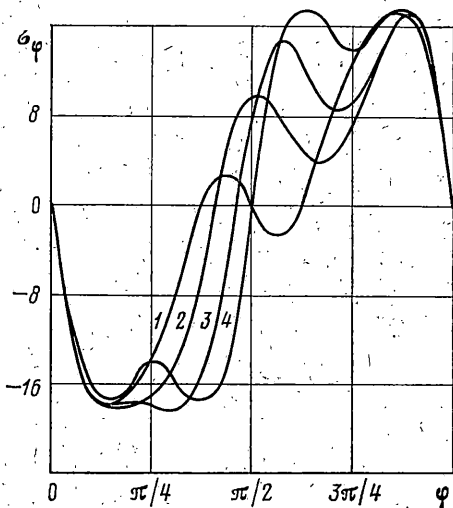
Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3



Фиг. 5

В дальнейшем вместо постоянных A, B, C будем задавать средние напряжения $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$. Для этого, определив средние напряжения равенствами

$$\bar{\sigma}_x = F^{-1} \iint_F \sigma_x dF, \quad \bar{\sigma}_y = F^{-1} \iint_F \sigma_y dF, \quad \bar{\tau}_{xy} = F^{-1} \iint_F \tau_{xy} dF$$

(F — площадь элементарной ячейки) и подставив в эти равенства выражения для напряжений в рассматриваемой пластине, запишем соотношения, связывающие постоянные A, B, C со средними напряжениями:

$$A = \frac{1}{8\mu} [(\kappa^* + 1)\bar{\sigma}_x + (\kappa^* - 3)\bar{\sigma}_y] + \frac{\kappa^* + 1}{2} f \left(\frac{2}{\kappa^*} \operatorname{Re} F_1 + E_1 \right) \quad (4.2)$$

$$B = \frac{1}{2\mu} \bar{\tau}_{xy}, \quad C = \frac{1}{8\mu} [(\kappa^* - 3)\bar{\sigma}_x + (\kappa^* + 1)\bar{\sigma}_y] + \frac{\kappa^* - 3}{2} f \left(\frac{2}{\kappa^*} \operatorname{Re} F_1 + E_1 \right)$$

где $f = \pi/ab$, μ — модуль сдвига материала пластины.

5. В качестве примера приведем результаты расчета напряжений σ_ϕ на контурах отверстий в случаях всестороннего растяжения ($\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_y = 1, \bar{\tau}_{xy} = 0$; фиг. 2), растяжения — сжатия ($\bar{\tau}_{xy} = 0, \bar{\sigma}_x = -\bar{\sigma}_y = 1$; фиг. 3), одноосного растяжения ($\bar{\sigma}_y = 1, \bar{\sigma}_x = \bar{\tau}_{xy} = 0$;

фиг. 4) и чистого сдвига по площадкам, перпендикулярным к осям x и y ($\bar{\tau}_{xy}=1$, $\bar{\sigma}_x=\bar{\sigma}_y=0$; фиг. 5).

Рассматривались перфорированные пластины с параметрами $2R/a=0,8$; $\alpha=\pi/3$, $7\pi/18$, $8\pi/18$, $\pi/2$ (на графиках фиг. 2–5 индексы 1, 2, 3, 4). При этом считалось $a=b/\cos \alpha$. Такой выбор параметров обеспечивал переход от гексагонального расположения отверстий к тетрагональному с двумя промежуточными структурами ($\alpha=7\pi/18$, $8\pi/18$). Как видно из графиков, характер изменения σ_φ для этих структур также оказывается переходным. При этом разность значений σ_φ в различных точках одного контура оказывается весьма значительной и становится наибольшей в условиях сдвига и наименьшей для всестороннего растяжения. Кроме того, на всех рассматриваемых графиках распределение напряжений вдоль контура для пластин с гексагональным расположением отверстий наиболее неравномерно. Это связано с тем [5], что такое расположение отверстий обуславливает сильный изгиб (в плоскости пластины) криволинейного элемента решетки, заключенного между смежными отверстиями.

Приведенные выше количественные результаты получены при удерживании в бесконечной системе (4.1) не более девяти пар комплексных уравнений. Количество уравнений зависит от заданного напряженного состояния. Так, в случае всестороннего растяжения было достаточно пяти пар уравнений. Ошибка выполнения граничных условий не превышала при этом 1%. С уменьшением величины $2R/a$ для достижения такой же точности порядок системы можно уменьшить.

Сравнение полученных напряжений для частных значений параметров структуры (гексагональное и тетрагональное расположение отверстий) с представленными в работах [5, 9] обнаружило хорошее совпадение. Исключение составляет лишь один случай ($\bar{\sigma}_x=\bar{\tau}_{xy}=0$, $\bar{\sigma}_y=1$, $\alpha=\pi/3$, $\varphi=\pi/2$ (фиг. 4)), когда полученное значение соответствует результату [9] и не совпадает с [5].

Таким образом, предлагаемый подход позволяет определять характеристики напряженного состояния перфорированных пластин без каких-либо ограничений на характер периодичности структуры и является, вероятно, наиболее простым из возможных строгих методов исследования плоских задач для упругих перфорированных пластин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bailey R., Hicks R. Behaviour of perforated plates under plane stress. — J. Mech. Eng. Sci., 1960, v. 2, No. 2, p. 143–161.
2. Космодамианский А. С. Распределение напряжений в изотропных многосвязных средах. Донецк: Изд-е Донец. ун-та, 1972. 266 с.
3. Saito H. Stress in a plate containing infinite parallel rows of holes. — Z. Angew. Math. und Mech., 1957, B. 37, H. 3–4, S. 111–115.
4. Натанзон В. Я. О напряжениях в растягиваемой пластинке, ослабленной одинаковыми отверстиями, расположенными в шахматном порядке. — Матем. сб., 1935, т. 42, № 5, с. 617–636.
5. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и обложки. М.: Наука, 1970. 556 с.
6. Ван Фо Фы Г. А. Про один з розв'язків плоскої двоякоперіодичної задачі теорії пружності. — Доп. АН УРСР, 1965, № 9, с. 1152–1156.
7. Dvorak Jan. Stress concentration in a perforated plate. — Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. techn., 1964, v. 12, No. 4, p. 237–244.
8. Koiter W. T. Stress distribution in an infinite elastic sheet with a doubly-periodic set of equal holes. — In: Boundary Problems Different. Equat. Madison: Univ. Wisconsin Press, 1960, p. 191–213.
9. Porowski J. S., O'Donnell W. J. Elastic design methods for perforated plates. — Trans. ASME. J. Eng. Power, 1978, v. 100, No. 2, p. 356–362.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.
11. Савин Г. Н. Механика деформируемых тел. Избр. тр. К.: Наук. думка, 1979. 466 с.

Киев

Поступила в редакцию
12.11.1981