

УДК 539.3.01

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ВИДЕРГАУЗ С. Б.

Задача отыскания формы полостей, вызывающей наилучшее распределение напряжений в упругом многосвязном пространстве при заданной нагрузке на бесконечности, как известно, называется обратной [1]. Она относится к минимаксным задачам оптимизации с локальным критерием качества. Ниже вводится условие на неизвестной границе, эквивалентное условию глобального оптимума. На этой основе доказано, что оптимальными являются полости с равнонапряженными границами. Для одиночной полости найдено замкнутое решение. В предположении осевой симметрии аналогичные результаты получены ранее в [2].

1. Пусть однородное и изотропное линейно-упругое пространство S ослаблено конечной совокупностью замкнутых непересекающихся полостей. На их гладких поверхностях Γ_m ($m=1, n$) действует нормальное давление постоянной интенсивности p , а на бесконечности задано однородное поле растягивающих напряжений с компонентами в декартовой системе координат XYZ :

$$\sigma_x = q_1, \quad \sigma_y = q_2, \quad \sigma_z = q_3 \quad (q_1 \geq q_2 \geq q_3 > 0) \quad (1.1)$$

Обозначим через Γ совокупность Γ_m , t — произвольную точку на Γ , Q — величину $q_1 + q_2 + q_3$.

Оптимизация заключается в отыскании такой границы Γ , для которой максимум по $(S+\Gamma)$ функции F от первых двух инвариантов I_1, I_2 тензора напряжений достигает минимально возможного значения [3]:

$$f = \min_{\Gamma} F_0 = \min_{\Gamma} \max_{xyz} F \quad (1.2)$$

где F определена соотношением, отвечающим критерию пластичности Мизеса

$$F(I_1, I_2) = I_1^2 + 3I_2, \quad I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (1.3)$$

$$I_2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \sigma_z$$

Трудность задачи (1.1) — (1.3) заключается в том, что положение максимума $F(x, y, z)$ заранее неизвестно, к тому же оно, вообще говоря, зависит от формы Γ . В этом случае приходится искать условие оптимальности, эквивалентное (1.2), но выставленное на характерном множестве точек области S — ее границе.

Таким условием является тождество на Γ

$$I_1 = (2G + 3\lambda) \phi = Q \quad (1.4)$$

где ϕ — относительное объемное расширение, G, λ — упругие коэффициенты.

Для доказательства представим напряженное состояние в $(S+\Gamma)$ как сумму однородного поля, отвечающего нагрузке (1.1) с компонентами смещения ($u_x = u_1, u_y = u_2, u_z = u_3$):

$$2Gu_i = q_i - \frac{\lambda}{3\lambda + 2G} Q \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.5)$$

и поля возмущений, вносимого полостями. Инвариант I_1° для однородного поля, очевидно, всюду равен Q . Параметры возмущенного состояния отмечаются индексом (+). Оно удовлетворяет граничному условию на Γ [4]:

$$-nT = 2G \left(\frac{\lambda}{2G} n\theta^+ + n\nabla u^+ + \frac{1}{2} n \operatorname{rot} u^+ \right) \quad (1.6)$$

Здесь n — внешняя нормаль к Γ , $T = \mathbf{i}i q_1 + \mathbf{j}j q_2 + \mathbf{k}k q_3$ — заданный тензор, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты, $u^+ = u_x^+ \mathbf{i} + u_y^+ \mathbf{j} + u_z^+ \mathbf{k}$ — вектор смещений точек среды.

Если на область $(S+\Gamma)$ действуют только поверхностные силы, то функция $I_1^+ = (2G+3\lambda)\theta^+ = I_1 - Q$ гармонична и убывает на бесконечности [4]; тогда из (1.4) и принципа максимума следует, что в $(S+\Gamma)$ объемное расширение $\theta^+ = 0$.

Это позволяет интерпретировать возмущенное состояние как возникающее в среде вокруг n односвязных включений, ограниченных поверхностями Γ_m , при условии, что включения подвергаются температурной деформации (в отсутствие среды эта деформация свободная и описывается шаровым тензором bE [4, гл. V, § 1], E — единичный тензор, b — постоянная). Тензор T задает в этом случае усилия, действующие на границу среды со стороны включений.

Такая аналогия основана на граничных свойствах ньютоновского потенциала $\phi(x, y, z)$ притягивающих масс постоянной плотности в объеме включений. Функция ϕ убывает на бесконечности, гармонична в S , непрерывна всюду и связана с вектором u^+ : $u^+ = -\operatorname{grad} \phi$. Найдём теперь значения u^+ на Γ , определяемые нагрузкой (1.1) и условием (1.4):

Обозначив величины, относящиеся к включениям, индексом (—), имеем всюду внутри Γ_m [4]:

$$\theta^- = \operatorname{div} u^- = \frac{3\lambda+2G}{3(\lambda+2G)} b = b_0 \quad (1.7)$$

Для вектора u^- в левой части граничного условия (1.6) надо добавить слагаемое $-nT_0$, где T_0 — шаровой тензор, формально связанный с bE законом Гука [4].

Подстановка в это условие и в соотношение (1.7) вектора u^- , записанного в форме $u^- = a_1 x \mathbf{i} + a_2 y \mathbf{j} + a_3 z \mathbf{k} + \mathbf{r}_m$, где \mathbf{r}_m — произвольный постоянный вектор, вообще говоря, свой для каждой полости, дает для определения постоянных a_l и b_0 систему линейных алгебраических уравнений $a_1 + a_2 + a_3 = b_0$, $2G(a_l - b_0) = -q_l + p$ ($l=1, 2, 3$), откуда следует, что $a_l = \frac{1}{4}(Q+p-2q_l)/G$.

Из непрерывности смещений на Γ будем иметь

$$4Gu^+ = 4Gu^- = (Q+p-2q_1)x\mathbf{i} + (Q+p-2q_2)y\mathbf{j} + (Q+p-2q_3)z\mathbf{k}$$

а также с точностью до постоянного слагаемого

$$2\phi(t) = (Q+p-2q_1)x^2 + (Q+p-2q_2)y^2 + (Q+p-2q_3)z^2, \quad (1.8)$$

$$t = (x, y, z) \in \Gamma$$

Возвращаясь к исходному напряженному состоянию, получаем на Γ_m с учетом (1.5):

$$u(t) = \frac{aQ+p}{4G} \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}_m, \quad a = \frac{\lambda+2G}{3\lambda+2G} \quad (1.9)$$

Здесь $u(t)$ — вектор смещений в точке t на Γ , $\mathbf{R}(t)$ — радиус-вектор той же точки в системе координат XYZ .

Введем на Γ локальную систему ортогональных криволинейных координат ρ, μ, ν вдоль внутренней нормали к поверхности и по линиям кривизны на ней. Непосредственная проверка показывает, что и из (1.9)

следует (1.4). Таким образом, условия (1.4), (1.9) для нагрузки (1.1) эквивалентны.

Кроме того, после громоздких преобразований из (1.9) следует, что компоненты $t_{\mu\mu}$, $t_{\nu\nu}$, $t_{\mu\nu}$ тензора напряжений на Γ имеют вид

$$t_{\mu\mu} = t_{\nu\nu} = 1/2(Q+p), \quad t_{\mu\nu} = 0 \quad (1.10)$$

Отметим, что по условию $t_{\rho\rho} = -p$, $t_{\rho\mu} = t_{\rho\nu} = 0$.

При выводе (1.10) использованы выражения для операторов поля в ортогональных координатах [4] и разложения Вейнгартена [5]:

$$\mathbf{R}_{\mu\mu}'' = h_{\mu} \frac{\partial H_{\mu}}{\partial \mu} \mathbf{R}_{\mu}' - H_{\mu} h_{\nu}^2 \frac{\partial H_{\mu}}{\partial \nu} \mathbf{R}_{\nu}' + L h_{\rho} \mathbf{R}_{\rho}'$$

$$\mathbf{R}_{\mu\nu}'' = h_{\mu} \frac{\partial H_{\mu}}{\partial \nu} \mathbf{R}_{\mu}' + h_{\nu} \frac{\partial H_{\nu}}{\partial \mu} \mathbf{R}_{\nu}'$$

$$\mathbf{R}_{\nu\nu}'' = h_{\mu}^2 H_{\nu} \frac{\partial H_{\nu}}{\partial \mu} \mathbf{R}_{\mu}' - h_{\nu} \frac{\partial H_{\nu}}{\partial \nu} \mathbf{R}_{\nu}' + N h_{\rho} \mathbf{R}_{\rho}'$$

где L , N — отличные от нуля коэффициенты второй дифференциальной формы Гаусса, h_{μ} , h_{ν} , h_{ρ} — величины, обратные коэффициентам Ламе H_{μ} , H_{ν} , H_{ρ} .

Первое условие в (1.10) обобщает понятие равнонапряженности, введенное в плоском случае в [1], а второе связывает силовые и геометрические характеристики оптимальной границы; при выполнении (1.9) система координат (ρ, μ, ν) определяет главные направления тензора напряжений на Γ .

Из условия (1.4) следует, что функция F супергармонична по пространственным переменным [2] и, значит, не принимает экстремальных значений во внутренних точках области. Доказательство оптимальности границы, на которой соблюдается (1.4), завершается теперь с использованием (1.10) по схеме, предложенной для двумерного случая в [3], и здесь не приводится. При этом $f = (Q+p)/4$.

Так же рассматривается обратная задача, когда полости подкреплены абсолютно жесткими накладками ($\mathbf{u} = \mathbf{r}_m$ на Γ_m). Действительно, из (1.9) в этом случае определяется величина усилий между накладками и поверхностью полостей $p = -(\lambda + 2G)Q / (3\lambda + 2G)$. Аналогичная двумерная задача поставлена и решена в [6].

2. Из тождества $\Phi = 0$ в $(S+\Gamma)$ следует аналогия [1, 2] с обратной задачей динамики идеальной жидкости: найти форму поверхностей системы твердых тел, обтекаемых безвихревым потоком с заданными условиями (1.1) (1.10) скоростью на бесконечности и на Γ .

С другой стороны, соотношение $\mathbf{u}^+ = -\text{grad } \varphi$ устанавливает аналогю с обратной задачей теории гармонических функций: найти границу Γ , на которой потенциал $\varphi(x, y, z)$, заданный в $(S+\Gamma)$, удовлетворяет одновременно условию Дирихле (1.8) и условию Неймана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = (Q+p-2q_1)x \frac{\partial x}{\partial n} + (Q+p-2q_2)y \frac{\partial y}{\partial n} + (Q+p-2q_3)z \frac{\partial z}{\partial n}$$

непосредственно следующему из (1.9). Возможны и другие аналогии.

Построение оптимальных поверхностей в общем случае весьма сложно, но при $n=1$ задача доводится до конца способом, предложенным в [2] для варианта с осевой симметрией.

Именно, рассмотрим прямую задачу для внешности произвольного трехосного эллипсоида под нагрузкой (1.1). Ее решение дано в [4].

В частности, на поверхности эллипсоида $\rho = \rho_0$ имеем

$$\mathbf{n}^+ = \lambda [x\omega_1(\rho_0)\mathbf{i} + y\omega_2(\rho_0)\mathbf{j} + z\omega_3(\rho_0)\mathbf{k}] + \kappa \mathbf{b}_1 + C\mathbf{b}_2$$

где \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 — определенные вектора, λ , κ , C — постоянные.

Функции $\omega_l(\rho)$ ($l=1, 2, 3$) имеют вид

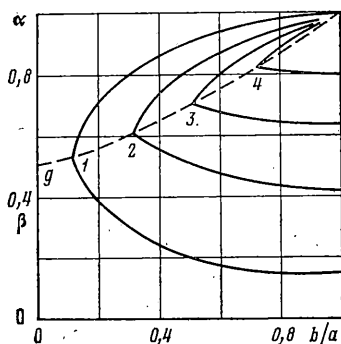
$$\begin{aligned}\omega_1(\rho) &= \frac{1}{e} \left[\frac{1}{e} E(\varphi, e) - F(\varphi, e) \right] \\ \omega_2(\rho) &= \frac{1}{1-e^2} \left[E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E(\psi, e) \right] \\ \omega_3(\rho) &= (\rho \sqrt{(\rho^2-1)(\rho^2-e^2)})^{-1} \omega_1(\rho) - \omega_2(\rho) \\ \varphi &= \arccos \frac{1}{\rho}, \quad \psi = \arccos \sqrt{(1-e^2)/(\rho^2-e^2)} \\ \rho_0 &= a/\sqrt{a^2-c^2}, \quad e/\rho_0 = \sqrt{a^2-b^2}/a\end{aligned}$$

где F, E — эллиптические интегралы первого и второго рода, e, ρ_0 — параметры, связанные с осями эллипсоида $a \geq b \geq c > 0$.

Можно проверить, что u^+ удовлетворяет соотношению (1.9) лишь при условии $\kappa = C = 0$. Величины λ, κ, C являются решением линейной алгебраической системы с матрицей, зависящей от ρ_0, e и имеющей правую часть $(q_i + p)$. Данное условие дает поэтому два трансцендентных уравнения, относительно ρ_0, e , определяющих связь между параметрами оптимального эллипсоида и заданной нагрузкой

$$\begin{aligned}[\omega_2(\rho_0) + \omega_3(\rho_0)] / [\omega_1(\rho_0) + \omega_3(\rho_0)] &= \\ &= (q_1 + p) / (q_2 + p) \quad (2.1) \\ [\omega_1(\rho_0) + \omega_3(\rho_0)] / [\omega_1(\rho_0) + \omega_2(\rho_0)] &= \\ &= (q_2 + p) / (q_3 + p)\end{aligned}$$

Результаты решения (2.1) при $p=0$ представлены на фигуре. Для значений $c/a=0,1; 0,3; 0,5; 0,7$ верхние кривые 1–4 дают зависимость $\alpha = q_2/q_1$ от b/a , а нижние — зависимость $\beta = q_3/q_1$. Пунктирная кривая gh , отвечающая случаю осевой симметрии, аналогична приведенной в [2].



ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости. — ПММ, 1974, т. 38, вып. 6, с. 963–979.
2. Вигдергауз С. В. Условия оптимальности в осесимметричных задачах теории упругости. — ПММ, 1982, т. 46, вып. 2, с. 278–282.
3. Баничук Н. В. Условия оптимальности в задаче отыскания форм отверстий в упругих телах. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 920–925.
4. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
5. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1968. 175 с.
6. Космодамианский А. С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. К.: Вища школа, 1975. 227 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
17.VII.1981