МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1983

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ВАРИАЦИОННЫХ ИТЕРАЦИЙ

УШАКОВ А. И.

Метод вариационных итераций представляет последовательное приближение в среднем функции нескольких переменных произведениями функций одного и более переменных. Впервые разложение функций в билинейный ряд в среднеквадратичной норме было сделано таким методом, по-видимому, в работе Шмидта [1] в 1907 г. Затем этот метод был надолго забыт, хотя в начале тридцатых годов был предложен известный метод Власова – Канторовича [2, 3], представляющий один шаг метода [1] в энергетической метрике. В последнее время в связи с развитием вычислительной техники метод вариационных итераций получает все более широкое распространение при решении задач механики деформируемого твердого тела (см., например, [4–8] и др.[1]). Причем в [4–7] он был вновь открыт. Подобная ситуация существует и в других областях[2].

В данной работе применительно к решению систем линейных алгебраических уравнений с симметричными положительно-определенными операторами, к которым сводятся задачи теории упругости при их численной реализации, рассматриваются основные особенности сходимости варианта метода вариационных итераций с последовательным исключением найденных произведений, а также особенности его практического применения. Решение уравнений таким методом представляет и определенный самостоятельный интерес.

1. Итак, решение задач теории упругости сводится к решению уравнения:

$$A\mathbf{u}=\mathbf{f} \tag{1.1}$$

где A — симметричный положительно-определенный матричный оператор, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{f}$ — n-мерные векторы (n может быть как угодно велико).

Для решения этого уравнения рассматриваемым методом вариационных итераций введем p- и q-мерные пространства P и Q, причем $pq=n$, $p\leqslant q<n$. Введем также пространство V, такое, что, если $\mathbf{x}\in P$, $\mathbf{y}\in Q$ и $\mathbf{v}\in V$, то вектор $\mathbf{v}$ равен прямому произведению векторов $\mathbf{v}=\mathbf{x}\times\mathbf{y}$.

Решение уравнения (1.1) в i-м приближении ($i=1, 2, 3, \ldots$) представляется в виде

$$\mathbf{u}^i=\mathbf{u}^{i-1}+\mathbf{v}^i, \quad \mathbf{v}^i=\mathbf{x}^i\times\mathbf{y}^i \tag{1.2}$$

где вектор $\mathbf{v}^i$ отыскивается из условия минимума функционала энергии

$$J_i(\mathbf{v}^i)=(\mathbf{v}^i, A\mathbf{v}^i)-2(\mathbf{v}^i, \mathbf{f}^i), \quad \mathbf{f}^i=\mathbf{f}-A\mathbf{u}^{i-1} \tag{1.3}$$

следующим образом. Задаются, например, элементом $\mathbf{x}_0^i$ и находят элемент $\mathbf{y}_1^i$. Затем, на втором шаге, имея элемент $\mathbf{y}_1^i$, определяют элемент $\mathbf{x}_2^i$ и т. д. Таким образом, имеется два итерационных процесса: по прибли-

---

[1] *Викторов Е. Д.* Обобщенный метод Канторовича в расчетах на прочность.— В кн.: Тез. докл. Всес. конф. «Автоматизация исследований несущей способности и длительной прочности летательных аппаратов». Харьков, 1975, с. 207—208.

[2] *Поспелов В. В.* О приближении функции нескольких переменных произведениями функций одного переменного.—Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1978, № 32. 75 с.

жениям, обозначаемым верхним индексом, и внутри каждого такого приближения — по итерациям или шагам, обозначаемым нижним индексом. Такова общая идея метода как в векторных, так и в функциональных пространствах.

Следует отметить, что в [1, 4, 6—8] (см. также сноску [1]) предлагается отыскивать сразу несколько произведений. Однако этот путь не рационален, так как требует соответствующего увеличения памяти ЭВМ. Поэтому не случайно во всех указанных работах реализовано практически только одно произведение. В этой связи заметим также, что решение нелинейных задач в [7] с одним искомым произведением на каждом шаге линеаризации представляется недостаточно обоснованным.

Для реализации этого метода в векторных пространствах введем следующие выражения и преобразования. Выражение вектора v всегда можно привести к формам:

$$\mathbf{v}=X\mathbf{y}=Y\mathbf{x},\quad X=\mathbf{x}\times E_q,\quad Y=E_p\times\mathbf{y} \tag{1.4}$$

где X и Y — матрицы размера $n\times q$ и $n\times p$, E_p и E_q — единичные матрицы размера $p\times p$ и $q\times q$. Столбцы матриц X и Y взаимноортогональны, т. е. $X^TX=|\mathbf{x}|^2E_q$, $Y^TY=|\mathbf{y}|^2E_p$.

Если U — матрица размера $p\times q$, элементами которой являются координаты n-мерного вектора $\mathbf{u}$ по правилу

$$U=\left\|\begin{matrix} u_1, & u_2, & \ldots, & u_q \\ u_{q+1}, & u_{q+2}, & \ldots, & u_{2q} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ u_{n-q+1}, & u_{n-q+2}, & \ldots, & u_n \end{matrix}\right\| \tag{1.5}$$

то справедливы следующие равенства:

$$U\mathbf{y}=Y^T\mathbf{u},\qquad U^T\mathbf{x}=X^T\mathbf{u} \tag{1.6}$$

2. Без потери общности рассмотрим первое приближение, опуская верхний индекс номера приближения. Используя условия минимума функционала энергии (1.3) и соотношения (1.4)—(1.6), получим расчетную систему уравнений

$$X_{i-1}^TAX_{i-1}\mathbf{y}_i=F^T\mathbf{x}_{i-1},\quad Y_i^TAY_i\mathbf{x}_{i+1}=F\mathbf{y}_i \quad {\scriptstyle (i=1,2,3,\ldots)} \tag{2.1}$$

в которой матрица F образована по правилу (1.5). Задавая вектор $\mathbf{x}_0$ при условии $F^T\mathbf{x}_0\neq 0$, в силу строгой выпуклости функционала энергии получим сходящиеся и, притом, единственные для данного $\mathbf{x}_0$ последовательности $\{\mathbf{x}_j\}$ и $\{\mathbf{y}_k\}$, т. е. точку экстремума $\mathbf{v}_*$ или решение системы (2.1). Начальный вектор $\mathbf{x}_0$ или $\mathbf{y}_0$ может быть определен, по крайней мере, тремя путями: используя либо априорную информацию о задаче и ее физический смысл, либо комбинации строк матрицы F или F^T, либо собственные векторы F.

При точном решении исходного уравнения (1.1) данным методом число ненулевых точек экстремума не превышает p. Векторы r-го приближения $\{\mathbf{v}_*^j\}_{j=1}^r$, являясь элементами наилучшего в энергетической метрике приближения к решению уравнения (1.1), взаимно A ортогональны:

$$(\mathbf{v}_*^i,\ A\mathbf{v}_*^j)=0 \quad {\scriptstyle (i\neq j=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,r\leqslant p)} \tag{2.2}$$

Отметим, что на каждом шаге решения системы (2.1) реализуется дискретный вариант вариационного метода Ритца или моментного метода Бубнова — Галеркина. При этом выбор координатных векторов — взаимноортогональных столбцов матриц X и Y — производится автоматически, за исключением первого шага. Изложенный метод представляет также процесс покоординатного спуска. В этой связи для минимизации функционала энергии (1.3) могут быть использованы различные градиентные методы.

3. По данным [4–8] и др.[3], полученным при решении конкретных задач в функциональных пространствах, процесс (2.1) сходится быстро. Для более полного суждения о характере сходимости данного метода рассмотрим случай, когда $A=B\times C$, где B и C — симметричные положительно-определенные матрицы размера $p\times p$ и $q\times q$.

Введем новые переменные: $\mathbf{x}^\circ=B^{1/2}\mathbf{x}$, $\mathbf{y}^\circ=C^{1/2}\mathbf{y}$, $\mathbf{v}^\circ=A^{1/2}\mathbf{v}$, $\mathbf{u}^\circ=A^{1/2}\mathbf{u}$. При такой замене переменных задача приближения вектора $\mathbf{u}$ векторами $\mathbf{v}$ в энергетической метрике преобразуется в задачу приближения вектора $\mathbf{u}^\circ$ векторами $\mathbf{v}^\circ$ в евклидовой метрике. Действительно, используя соотношения (1.4)–(1.6), систему (2.1) в данном случае можно привести к следующему виду:

$$\mathbf{x}^\circ=U^\circ\mathbf{y}^\circ/(\mathbf{y}^\circ,\ \mathbf{y}^\circ),\quad \mathbf{y}^\circ=U^{\circ\mathrm{T}}\mathbf{x}^\circ/(\mathbf{x}^\circ,\ \mathbf{x}^\circ),\quad U^\circ=B^{-1/2}FC^{-1/2} \tag{3.1}$$

где матрицы U°, F соответствуют векторам $\mathbf{u}^\circ$, $\mathbf{f}$ и образованы по правилу (1.5).

Система (3.1) представляет обычную проблему сингулярных значений оператора U° с нормировкой сингулярного вектора v° по условию

$$|\mathbf{v}^\circ|=|\mathbf{x}^\circ|\,|\mathbf{y}^\circ|=|\mathbf{v}|_A=\lambda \tag{3.2}$$

где λ — сингулярное число оператора U° (т. е. энергетическая норма искомого элемента $\mathbf{v}$ равна сингулярному числу λ).

Нетрудно заметить, что метод вариационных итераций здесь является степенным методом Люстерника определения наибольшего сингулярного числа и соответствующего сингулярного вектора. Следовательно, в этом случае особенности сходимости рассматриваемого метода такие же, как и в методе Люстерника. Например, если $\lambda_1>\lambda_2\geqslant\ldots\geqslant\lambda_p$, то на k-м шаге будет

$$|\mathbf{v}_k^\circ|=\lambda_1+o[(\lambda_2/\lambda_1)^{2k}] \tag{3.3}$$

если $\mathbf{x}_0$ не ортогонален подпространству собственных векторов оператора $U^\circ U^{\circ\mathrm{T}}$, соответствующих собственному числу λ_1^2, что выполняется обычно в численных расчетах.

Можно заметить, что система (3.1) представляет обобщенную проблему сингулярных значений матрицы F. А общая система (2.1) представляет, хотя и более сложную, но ту же проблему. Поэтому можно утверждать, что особенности сходимости данного варианта метода вариационных итераций определяются, прежде всего, отношением неравенства энергетических норм векторов $\mathbf{v}_*$ различных приближений. Причем обусловленность оператора A не имеет определяющего значения для скорости сходимости.

4. Поскольку достигнуть точных значений $\mathbf{v}_*^i$, вообще говоря, практически невозможно, то решение $\mathbf{u}^i$ в форме (1.2) может даже расходиться. Для обеспечения наилучшей сходимости вместо (1.2) необходимо принять

$$\mathbf{u}^i=\sum_{j=1}^{i}\alpha_j\mathbf{v}^j \tag{4.1}$$

где постоянные α_j в каждом i-м приближении определяются из условия минимума функционала энергии $J(\mathbf{u})=(\mathbf{u},\ A\mathbf{u})-2(\mathbf{u},\ \mathbf{f})$, соответствующего исходному уравнению (1.1). Однако эта полная форма неудобна для практической реализации на ЭВМ.

Опыт расчетов показывает, что можно ограничиться следующей более простой, алгоритмичной и экономичной по памяти ЭВМ формой

$$\mathbf{u}^i=\beta_1\mathbf{u}^{i-1}+\beta_2\mathbf{v}^i \tag{4.2}$$

[3] См. также Поспелов В. В. Указ. публ. с. 85.

в которой постоянные β определяются аналогично α_j, что дает

$$\beta_1=1-a_{12}a_{22}/\Delta, \quad \beta_2=1+a_{12}^2/\Delta$$
$$\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2, \quad a_{11}=(\mathbf{u}^{i-1}, \mathbf{f}), \quad a_{22}=(\mathbf{v}^i, \mathbf{f}^i), \quad a_{12}=(\mathbf{v}^j, \mathbf{f})-a_{22} \tag{4.3}$$

Отличие постоянных β от единицы может служить критерием для выбора рационального числа итераций процесса (2.1), сходимость которого при приближении к точке экстремума естественно замедляется. Следует подчеркнуть, что время решения исходного уравнения (1.1) в значительной мере определяется этим процессом.

Заметим также, что минимальное число операций на каждом шаге решения системы (2.1) соответствует случаю $p=q$. По мере увеличения n время формирования матриц X^TAX и Y^TAY растет пропорционально n^2 и становится доминирующим в процессе численного решения при $n\geqslant 100$. Для сравнения напомним, что время решения уравнения (1.1) методом Гаусса растет пропорционально n^3.

При решении задач теории упругости разделение переменных рационально делать на континуальном уровне до получения уравнения (1.1) каким-либо методом дискретизации. Это позволяет не иметь матрицу A и, таким образом, существенно сэкономить память ЭВМ. Для решения большого ряда современных прикладных задач данным методом практически оказывается достаточной оперативная память ЭВМ ЕС. Возможности использования только быстрой оперативной памяти и назначения рациональной точности расчетов позволяют также заметно сократить время решения задач механики сплошной среды данным итерационным методом по сравнению с известными прямыми методами дискретизации.

Наконец, отличие формы тела, краевых условий и т. д. от канонических не является существенной помехой. В таких случаях можно использовать параметризацию области, метод фиктивных областей, методы расчленения конструкции и др.

5. Рассмотрев основные особенности сходимости и применения итерационного метода разделения переменных с последовательным исключением найденных приближений, приведем некоторые результаты примеров расчета данным методом.

Решение уравнений при $n\geqslant 100$ с плохо обусловленной матрицей A привело к ошибке евклидовой нормы известного решения в доли процента за время работы метода Гаусса. Метод Зейделя за увеличенное в десять раз время не дал практически приемлемых результатов — ошибка составила десятки процентов.

При решении задачи кручения стержней квадратного поперечного сечения относительные ошибки величин крутящего момента и максимального касательного напряжения составили 0,11 и 4,5% в первом приближении, 0,03 и 0,55% — во втором.

Рассчитывалось напряженно-деформированное состояние неравномерно нагретых рабочих лопаток турбомашин как упругих тонких оболочек произвольной формы с использованием косоугольной системы сопутствующих координат. Для интерполяции исходных данных и аппроксимации искомых перемещений использовались бикубические и кубические сплайны. Для числа узлов 10×15 требуется не более 30 килослов оперативной памяти и 30 мин работы БЭСМ-6 при ошибке в наибольших напряжениях не более 1%. При прямом подходе требуется около четырех часов работы в 200 килословах оперативной памяти. При конечно-элементной аппроксимации такими же полиномами память в обоих подходах сокращается примерно в полтора раза, а время работы не превышает получаса и часа.

Во всех примерах проявляется замедление сходимости во втором и последующих приближениях, а также при приближении к точке экстремума.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Teil 1. — Math. Ann., 1907, v. 63, p. 433–476.
2. *Власов В. З.* Новый практический метод расчета складчатых перекрытий и оболочек. — Строит. пром-сть, 1932, № 11, с. 33–38; № 12, с. 21—26.
3. *Канторович Л. В.* Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла. — Изв. АН СССР. Отд. матем. и естеств. н., 1933, № 5, с. 647—652.

4. *Фролов В. М.* О применении вариационного метода Л. В. Канторовича к задачам прикладной теории упругости. – Инж. сб. АН СССР, 1956, т. 24, с. 174—182.
5. *Фролов В. М.* Применение метода корректирующей функции в расчетах деформаций консольных пластин. – Тр. ЦАГИ, 1957, вып. 705. 36 с.
6. *Амельченко В. В., Неверов И. В., Петров В. В.* Решение нелинейных задач теории пологих оболочек путем вариационных итераций. — Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3, с. 62—68.
7. *Матвеев Н. П., Мальцев Л. Е., Нетребко В. П.* Напряженное состояние при изгибе консоли в форме параллелепипеда. — Прикл. механика, 1974, т. 10, вып. 9, с. 85—91.
8. *Костров В. И., Трапезин И. И.* Исследование тонкостенных конструкций методом Власова – Канторовича в сочетании с методом последовательных приближений.– В кн.: Расчеты на прочность. Вып. 20. М.: Машиностроение, 1979, с. 183—192.

Москва

Поступила в редакцию
4.III.1981