МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1983

УДК 534.1

О КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМ С БОЛЬШИМИ УПРУГИМИ СИЛАМИ ПОРОГОВОГО ТИПА

КРУПЕНИН В. Л.

При расчете колебательных систем с упругими силами, включающимися лишь при достижении координатами системы заданных пороговых значений, необходимо рассматривать уравнения движения с пороговыми нелинейностями, описываемыми функциями, отличными от нуля, начиная с некоторого значения независимой переменной. Примерами служат, как известно, системы цикловой автоматики, виброударные системы, в которых соударения происходят немгновенно (см., например, [1, 2]). В силу физического смысла задач уравнения движения могут содержать большой параметр при пороговой нелинейности, время действия которой мало, и это не дает возможности использовать методы анализа квазилинейных систем.

В публикуемой работе изучаются системы с большими нелинейными консервативными членами порогового типа и показывается, что для широкого класса таких систем виброударное приближение, предполагающее мгновенность взаимодействия, хорошо описывает их динамику. Это дает возможность построить асимптотические разложения решений при наличии в системе малых неконсервативных нелинейностей. Далее анализируются консервативные и квазиконсервативные системы с одной степенью свободы в приближениях, предполагающих мгновенность и немгновенность взаимодействия. В последнем случае рассмотрена кусочно-линейная характеристика восстанавливающей силы. Изучены некоторые конкретные системы. Ряд результатов обобщается на многомерные случаи.

1. Порождающие решения. Рассмотрим колебательную систему, описываемую уравнением движения

$$x^{\cdot\cdot}+\Omega^2x+c\Phi(x)=\varepsilon g(t,\ x,\ x^{\cdot};\ \varepsilon) \tag{1.1}$$

где c и ε — большой и малый параметры, g — гладкая функция, описывающая неконсервативные силы, а потенциальная сила $\Phi(x)=U'(x)$ принадлежит к классу непрерывных пороговых функций $\{\Phi\}_\Delta$, состоящего из функций, тождественно равных нулю при $x\leqslant\Delta$ и монотонно возрастающих при $x>\Delta$. Предполагается, что при $x\geqslant\Delta$ каждая функция из этого класса — гладкая, а при $x=\Delta$ — непрерывная [1].

Изучим порождающую систему. Будем считать в (1.1) и далее $\varepsilon=0$. В силу определения класса $\{\Phi\}_\Delta$ общее решение уравнения движения дается $T(E)$-периодической функцией (E — полная энергия). Вводя T-периодическую функцию Грина как установившееся решение уравнения $\chi^{\cdot\cdot}+\Omega^2\chi=\delta^T(t)$; ($\delta^T(t)=T^{-1}\sum e_k(t)$; $e_k(t)=\exp(ik\omega t)$; $i^2=-1$; $\omega=2\pi T^{-1}$; $k\in\mathbf{Z}$; $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел; сходимость ряда понимается в обобщенном смысле), найдем, что общее решение консервативной системы удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t)=-c\int\limits_0^T\chi(t-s)\,\Phi[x(s)]\,ds \tag{1.2}$$

[1] Проводимые ниже построения можно с рядом оговорок перенести и на системы с симметричными нелинейностями. Кроме того, класс $\{\Phi\}_\Delta$ можно расширить за счет некоторого ослабления требований гладкости.

$$T(E)=\int\limits_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{E-\Pi(x)}},\quad \Pi(x)=\frac{\Omega^2x^2}{2}+cU(x),\quad \Pi[x_{1,2}(E)]\equiv E$$

причем в силу своего определения [3]

$$\chi(t;\omega)=L_ke_k(t)=(2\Omega\sin{}^1/_2\Omega T)^{-1}\cos\Omega(t-{}^1/_2T),\qquad t\in[0,T] \tag{1.3}$$

где $L_k\equiv T^{-1}(\Omega^2-k^2\omega^2)^{-1}$ и по всем $k\in\mathbf{Z}$ ведется суммирование.

Ввиду автономности системы за период движения координата x лишь дважды может принимать значение Δ; фаза решения произвольна, поэтому можно считать $x(0)=x(\tau_c)=\Delta$, $\tau_c\in[0,T]$.

Пусть при заданном значении c и при $t\in[0,\tau_c]$ известен закон движения $x_c^+(t;J_c)$, удовлетворяющий начальным условиям $x_c^+(0;J_c)=\Delta$, $x_c^{\cdot+}(0,J_c)=v_{0c}\equiv{}^1/_2J_c$.

Из (1.2) для всех $t\in[0,T]$ находим

$$x_c(t;J_e)\}\equiv-c\int\limits_0^{\tau_c(J_c)}\chi(t-s)\,\Phi[x_c^+(s,J_c)]\,ds \tag{1.4}$$

где зависимость $J_c(\omega)$ определим из условия совместности $x_c(0;J_c)=\Delta$. Учитывая (1.2), получим

$$x_c(t;J_c)=-cL_ke_k(t)F\{\varphi_c(-ik\omega;J_c)\} \tag{1.5}$$

$$F\{\varphi_c(p_1;J_c)\}\equiv\int\limits_0^{\tau_c}\varphi_c(t;J_c)\exp(ip_1t)\,dt,\quad \varphi_c(t;J_c)\equiv\Phi[x_c^+(t;J_c)]$$

Спектр взаимодействия $F\{\varphi_c\}$ зависит только от вида силы $c\Phi(x)$ и энергии системы (скорости начала взаимодействия). Для изучения асимптотических (при $c\to\infty$) свойств данных систем рассмотрим виброударную систему [2]:

$$x^{\cdot\cdot}+\Omega^2x=-J_\infty\delta^T(t);\qquad x(0)=\Delta,\quad J_\infty=2v_{0\infty} \tag{1.6}$$

закон движения которой дается формулой $x(t)\equiv x_\infty(t)=-J_\infty\chi(t,\omega)=[\Delta\chi^{-1}(0,\omega)]\chi(t)$. Будем предполагать, что уровень энергии E достаточен для появления режимов с соударениями. Тогда в системах с силами из $\{\Phi\}_\Delta$ будут существовать режимы со взаимодействиями. Пусть при $E\in[E_0,\infty)$ такие решения возможны.

Докажем, что для всех $\Phi(x)\in\{\Phi\}_\Delta$ и $E\in[E_0,\infty)$ по равномерной норме всегда найдется такое значение c, что

$$\|x_\infty(t;J_\infty)-x_c(t;J_c)\|=O(\varepsilon)\qquad(-\infty<t<\infty) \tag{1.7}$$

где ε — малый параметр. Зафиксировав $\Phi(x)\in\{\Phi\}_\Delta$ и $E\in[E_0,\infty)$, в силу консервативности найдем для правого корня уравнения $\Pi_c(x)=E$: $\lim x_{2c}(E)=\Delta$ при $c\to\infty$. Таким образом, в пределе, при достижении координатой x значения Δ, потенциал скачком возрастает на величину кинетической энергии подхода к ограничителю: $\Pi_\infty(x)={}^1/_2\Omega^2x^2+{}^1/_2v_{0\infty}{}^2\eta_+(x-\Delta)$, $x\leqslant\Delta$ ($\eta_+(x)$ — непрерывная справа функция Хевисайда). Время взаимодействия и импульс силы $c\Phi(x)$ за время взаимодействия имеют оценки

$$\tau_c=2\int\limits_\Delta^{x_2(E)}\sqrt{2}[E-\Pi_c(x)]^{-1/2}dx=O(\varepsilon)\qquad(c\to\infty)$$

$$J_c=\int\limits_0^{\tau_c}\{\Omega^2x_c^+(t,J_c)+c\Phi[x_c^+(t,J_c)]\}\,dt=O(J_\infty)\qquad(c\to\infty) \tag{1.8}$$

поэтому последовательность $\{c\varphi(t, J_c)\}$ — δ-образная и в норме пространства обобщенных функций $\|c\varphi_c(t, J_c) - J_\infty \delta^{T_\infty}(t)\| = O(\varepsilon)$, $c \to \infty$, так как период движения допредельной системы $T_c = T_\infty + \tau_c = O(T_\infty)$, $c \to \infty$, где T_∞ — период движения виброударной системы. Воспользовавшись (1.4), (1.8) и непрерывностью периодической функции Грина, получаем после выполнения очевидных выкладок (1.7), что и требовалось.

Сравнивая (1.5) с предельным решением, находим, что при $c \to \infty$ спектр взаимодействия выравнивается во всем диапазоне частот. Гладкость решения в точках $t = kT_\infty$ при этом нарушается.

Можно показать, что резонансный период T_c^*, отвечающий появлению бесконечных амплитуд при $E = \infty$, также отвечает оценке $T_c^* = T_\infty^* + O(\varepsilon)$ ($T_\infty^* = \pi\Omega^{-1}$, см. [2]).

Ввиду скачков производной предельного решения сходимость $x_c^{\cdot}(t)$ к $x_\infty^{\cdot}(t)$ следует понимать в среднем. Доказывается, в частности, что если $f(t, x, y)$ — гладкая функция своих аргументов, то при $c \to \infty$ имеем

$$T_c^{-1} \int_0^{T_c} f[t, x_c(t), x_c^{\cdot}(t)]\, dt = T_\infty^{-1} \int_0^{T_\infty} f[t, -J_\infty \chi(t), -J_\infty \chi^{\cdot}(t)]\, dt + O(\varepsilon) \tag{1.9}$$

На основании изложенного можно утверждать, что при больших c решения рассматриваемых уравнений в качестве главных негладких членов содержат виброударное решение. Это решение, однако, не дает информации о поведении системы при $t \in [lT, \tau_c + lT]$ ($l \in \mathbf{Z}$). Улучшить его можно за счет интегрирования уравнений с конкретно заданными силами $\Phi(x) \in \{\Phi\}_\Delta$.

Изучение быстро взаимодействующих систем ($c \gg 1$) связано с одним предположением физического характера.

При нахождении закона движения во время взаимодействия можно пренебречь малым потенциальным членом $\Omega^2 x$ по сравнению с большим, т. е. можно считать, что функция $x_c^+(t; J_c)$, фигурирующая в (1.4), удовлетворяет уравнению

$$x_c^{\cdot\cdot +} + c\Phi[x_c^+] = 0, \quad x_c^+(0) = \Delta, \quad x_c^{\cdot +}(0) = {}^1/_2 J_c \tag{1.10}$$

Пусть $x_c^+(t, J_c)$ — решение (1.10). Подставив его в (1.4), получим приближенное решение исходной задачи $x_c(t; J_c)$, где импульс взаимодействия определяется из условия $x_c(0; J_c) = \Delta$. Доказывается, что при больших c; $t \in \mathbf{R}^1$ и $E \in [E_0, \infty)$ решение $x_c(t; J_c)$ удовлетворяет (1.7) и отличается от точного на величину малого порядка. Получаемые значения импульса взаимодействия также хорошо аппроксимируют точные. Аппроксимация оказывается тем лучше, чем больше полная энергия системы. Обозначая τ_{1c} приближенное значение времени взаимодействия ($\tau_{1c} \to 0$, $c \to \infty$), можно (как и для точного решения) получить, что $x_c(0; J_c) = x_c(\tau_{1c}; J_c)$ и $x_c^{\cdot}(0; J_c) = -x_c^{\cdot}(\tau_{1c}; J_c)$.

Докажем, например, первое равенство. Для этого рассмотрим при $t \in [0, \tau_{1c}]$ функции $\varphi_c^{(1)}(t; J_c) \equiv c\Phi[x_c^+(t; J_c)$, образующие δ-образную последовательность. Из (1.10) следует, что графики этих функций симметричны относительно прямой $t = {}^1/_2 \tau_{1c}$ и, значит, функции $\varphi_c^{(1)}(t + {}^1/_2 \tau_{1c}; J_c)$ четны. Отсюда видно, что величина $W = \exp(-{}^1/_2 i\omega\tau_{1c}) \times F\{\varphi_c^{(1)}(i\omega; J_c)\}$ вещественна, так как

$$\operatorname{Im} W = \int_0^{\tau_{1c}} \sin\omega \left(t - \frac{1}{2}\tau_{1c}\right) \varphi_c^{(1)}(t; J_c)\, dt = 0$$

Следовательно $\exp(-ik\omega\tau_{1c}) F\{\varphi_c^{(1)}(ik\omega; J_c)\} = F\{\varphi_c^{(1)}(-ik\omega; J_c)\}$.

Величины L_k, входящие в ряд (1.5), также вещественны, поэтому при замене здесь значения $t = 0$ на $t = \tau_{1c}$ член $L_k F\{\varphi_c^{(1)}(-ik\omega, J_c)\}$ перейдет в член $L_k \exp(ik\omega\tau_{1c}) \cdot F\{\varphi_c^{(1)}(-ik\omega;\ J_c)$, который в силу последнего равенства принимает вид $L_k F\{\varphi_c^{(1)}(ik\omega;\ J_c)\}$, но так как $k\in\mathbf{Z}$, то $x_c(0;\ J_c)=x_c(\tau_{1c},\ J_c)$, что и требовалось доказать.

2. Кусочно-линейная восстанавливающая сила. Пусть в уравнении (1.1) по-прежнему $\varepsilon=0$, а нелинейность имеет вид $\Phi_0(x)=c(x-\Delta)\eta(x-\Delta)$, где $\eta(x)$ — функция Хевисайда. Уравнение движения можно записать так: $\ddot{x}_c^- + \Omega^2 x_c^- = 0$ $(x\leqslant\Delta)$, $\ddot{x}_c^+ + \Omega^2 x_c^+ - c\Delta = 0$ $(x\geqslant\Delta)$.

Пренебрегая во втором уравнении членом $\Omega^2 x$ и, действуя согласно методике п. 1, получим $x_c^+(t)={}^1/_2 J_c(\sqrt{c})^{-1}\sin\sqrt{c}t+\Delta$, $t\in[0,\ \tau_c]$.

Из условия $\dot{x}_c^+({}^1/_2\tau_c)=0$ следует $\tau_c=\pi(\sqrt{c})^{-1}$. Тогда $c\varphi_c^{(1)}(t;\ J_c)={}^1/_2 J_c\sqrt{c}\sin\sqrt{c}t$, $t\in[0,\ \tau_c]$.

Подставив эту функцию в (1.4) и вычисляя $F\{c\varphi_c^{(1)}(p_1,\ J_c)\}={}^1/_2 c(p_1^2+1)^{-1}[\exp(p_1\tau_c)+1]$, составим ряд (1.5):

$$x_c(t)=-J_c L_k(c)\,e_k(t),\quad L_k(c)=T^{-1}\frac{{}^1/_2 c[\exp(-ik\omega\tau_c)+1]}{(\Omega^2-k^2\omega^2)(c-k^2\omega^2)} \tag{2.1}$$

Записывая (2.1) в форме $x_c(t;\ J_c)=-J_c\chi^c(t)$, где $\chi^c(t)=L_k(c)e_k(t)$, находим $J_c=-\Delta[\chi^c(0)]^{-1}$ $(\Delta\neq0)$ или

$$J_c=-\Delta\left\{T^{-1}\frac{{}^1/_2 c[\exp(-ik\omega\tau_c)+1]}{(\Omega^2-k^2\omega^2)(c-k^2\omega^2)}\right\}^{-1} \tag{2.2}$$

При $\Delta=0$, в зависимости от начальных условий, импульс может принимать произвольное значение, но колебания могут происходить на единственной частоте ω_c^* (см. ниже).

Асимптотические $(c\to\infty)$ свойства решения (2.1), (2.2) следуют из доказанного. При помощи методов, предложенных в [3], представления (2.1), (2.2) можно записать в конечной форме.

Вводя функции

$$\chi_{1,2}^c(t)=\frac{c}{4(c-\Omega^2)}\left[\frac{\cos\Omega(t-\tau_c\pm{}^1/_2 T)}{\Omega\sin{}^1/_2\Omega T}-\frac{\cos\sqrt{c}(t-\tau_c\pm{}^1/_2 T)}{\sqrt{c}\sin{}^1/_2\sqrt{c}\,T}\right]$$

$$\chi_3^c(t)=\frac{c}{4(c-\Omega^2)}\left[\frac{\cos\Omega(t-{}^1/_2 T)}{\Omega\sin{}^1/_2\Omega T}-\frac{\cos\sqrt{c}(t-{}^1/_2 T)}{\sqrt{c}\sin{}^1/_2\sqrt{c}T}\right]$$

(2.1), (2.2) запишем так:

$$x_c(t)=\begin{cases}-J_c[\chi_1^c(t)+\chi_3^c(t)], & t\in[0,\tau_c]\\ -J_c[\chi_2^c(t)+\chi_3^c(t)], & t\in[\tau_c,T]\end{cases}$$

$$J_c=-\Delta\left\{\frac{c}{4(c-\Omega^2)}\left[\frac{1}{\Omega}\left(\frac{\cos\Omega(\tau_c-{}^1/_2 T)}{\sin{}^1/_2\Omega T}+\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Omega T\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\sqrt{c}}\left(\frac{\cos\sqrt{c}(\tau_c-{}^1/_2 T)}{\sin{}^1/_2\sqrt{c}\,T}+\operatorname{ctg}\frac{\sqrt{c}\,T}{2}\right)\right]\right\}^{-1},\quad \tau_c=\pi(\sqrt{c})^{-1} \tag{2.4}$$

Ряд, определяющий $\chi^c(t;\ \omega)$, в силу свойств преобразования Фурье финитных функций имеет смысл всегда при $\omega>\Omega$ и $c>0$, поэтому при этих условиях имеет смысл и конечная форма (2.3), (2.4). При $\Omega=\omega$ (и, вообще, при $\Omega=k\omega$) в формулах (2.1), (2.3) происходит стирание особенностей, так что решения (по крайней мере формально) определены и в этом случае. Исключение при $(\Delta\neq0)$ составляют предельные резонансные частоты ω^*, такие, что $\chi^c(0;\ \omega^*)=0$.

Собственные частоты рассматриваемой системы удовлетворяют оценке $\omega_c \geqslant \Omega$, и при этом условии можно принять $T_c = T_\infty + \pi(\sqrt{c})^{-1}$:

$$\omega_c = \frac{2\omega_\infty \sqrt{c}}{2\sqrt{c}+\omega_\infty} \approx \omega_\infty \left(1 - \frac{\omega_\infty}{2\sqrt{c}}\right) \tag{2.5}$$

Единственная резонансная частота, обращающая в нуль знаменатель (2.4)

$$\omega_c^* = 2\Omega\sqrt{c}(\Omega+\sqrt{c})^{-1} \tag{2.6}$$

Если $\Delta=0$, система изохронна и движение может происходить только с частотой ω_c^*. Если $\Delta>0$ $(\Delta<0)$, имеем жесткий (мягкий) анизохронизм. Интервалы собственных частот: (Ω, ω_c^*) – при $\Delta>0$; (ω_c^*, ∞) – при $\Delta<0$. Если $\omega_c=\Omega$, то из (2.2) следует $J_c=0$, что соответствует режиму касания или линейным режимам.

Формулы (2.2) или (2.4) определяют взаимно однозначные гладкие зависимости $\omega_c(J_c)$, которые при больших c хорошо аппроксимируются виброударными.

Как указывалось, предложенная аппроксимация особенно точна при больших энергиях.

Ниже рассматриваются виброударное приближение к классу $\{\Phi\}_\Delta$ и найденные в п. 2 решения для системы с силой $\Phi_0(x)$.

3. Системы, близкие к порождающим. Полученные представления удобно использовать для построения асимптотических разложений решений полного уравнения (1.1).

Пусть $X^c[J, t+\varphi_1; \omega_1(J)]$ (J и φ_1 – импульс и фаза взаимодействия, $\omega_1(J)$ – частота колебаний) – решение порождающего уравнения. Пользуясь тем, что J и φ_1 независимые интегралы движения, совершим в (1.1) замену фазовых координат: $x=X^c(J; \psi; \omega_1)$, $x^\cdot=X_\psi{}^c(J, \psi; \omega_1)$ (нижний индекс означает частное дифференцирование). Предполагая, что частота свободных колебаний $\omega_1(J)$ дается гладкой функцией, после стандартных преобразований ([4]) из (1.1) получаем систему с двумя быстрыми фазами:

$$\begin{gathered} J^\cdot = -\varepsilon d_0^{-1} g[t, X^c, X_\psi{}^c, \varepsilon] X_\psi{}^c, \quad t^\cdot = 1 \\ \psi^\cdot = 1 + \varepsilon d_0^{-1} g[t, X^c, X_\psi{}^c, \varepsilon]\,[X_J{}^c + \omega_1'(J) X_\omega{}^c] \end{gathered} \tag{3.1}$$

причем штрих означает дифференцирование по аргументу, а величина d_0 не зависит от ψ ([4]) и легко вычисляется при получении (3.1): $d_0 = (X_J{}^c + X_\omega{}^c \omega_1') X_{\psi\psi}{}^c - (X_{J\psi}{}^c + X_{\omega\psi}{}^c \omega_1') X_\psi{}^c$.

В рассмотренном в п. 2 случае $\Phi(x)=\Phi_0(x)$ замена координат имеет вид

$$x = -J\chi^c[\psi; \omega_c(J)], \qquad x^\cdot = -J\chi_\psi{}^c[\psi; \omega_c(J)] \tag{3.2}$$

где функция $\omega_c(J)$ получается в результате обращения (2.2) или (2.4) (при $\Delta=0$ $\omega_c=\omega_c^*=\mathrm{const}$).

Система (3.1) преобразуется к виду

$$\begin{gathered} J^\cdot = -\varepsilon d_{0c}^{-1} g[t, \ldots] \chi_\psi{}^c[\psi; \omega_c(J)], \quad t^\cdot = 1 \\ \psi^\cdot = 1 + \varepsilon (d_{0c} J)^{-1} g[t, \ldots] \{\chi^c[\psi; \omega_c(J)] + J\omega_c'(J)\chi_\omega{}^c[\psi; \omega_c(J)]\} \\ d_{0c} = -[\chi^c + J\omega_c'\chi_\omega{}^c]\chi_{\psi\psi}{}^c + (\chi_\psi{}^c + J\omega_c'\chi_{\omega\psi}{}^c)\chi_\psi{}^c \end{gathered} \tag{3.3}$$

При $c=\infty$ (3.2) принимает вид $x=-J\chi[\psi; \omega_\infty(J)]$, $x^\cdot=-J\chi_\psi[\psi; \omega_\infty(J)]$, зависимость $\omega_\infty(J)$ дается обращением функции $J_\infty = -\Delta\chi^{-1}(0, \omega)$ (1.6), а $d_{0\infty} = {}^1/_4$, в чем можно убедиться при помощи вычислений по формуле для d_{0c} при $c=\infty$, учитывая (1.3) и то, что член, содержащий δ-функцию и входящий сюда через $\chi_{\psi\psi}$, домножается на нуль.

Системы (3.1), (3.3) можно исследовать методом усреднения [2]. Урав-

[2] При построении высших приближений указанная замена нуждается в модификации (*замечание В. Ф. Журавлева*).

нения первого приближения определяются видом силы g. В любом случае выполняется усреднение правых частей уравнений для медленных переменных по быстрым и отбрасываются члены $O(\varepsilon^2)$ [4, 5].

Учитывая результаты п. 1, можно доказать, что при $\Phi(x)\in\{\Phi\}_\Delta$ и достаточно больших c уравнения первого приближения для системы (3.1) и системы (3.3) при $c=\infty$ совпадают (при доказательстве можно использовать (1.9)). Таким образом, асимптотические разложения решений уравнений (1.1) в качестве главного негладкого члена будут содержать виброударные решения.

Данная методика остается справедливой, когда $g(p;\ t,\ x,\ \varepsilon)$ — некоторая оператор-функция ($p\equiv d/dt$), описывающая, например, слабые влияния дополнительных степеней свободы и др. [5].

Рассмотрим ряд примеров.

1. Пусть в (1.1) $g(t,\ x,\ x^\cdot,\ \varepsilon)=-2bx^\cdot$, $b>0$. В первом приближении для $\Phi(x)=\Phi_0(x)$:

$$J^\cdot=-[8\varepsilon b d_{0c}^{-1}\pi^2T_c^{-2}(J)](|L_k(c)|^2k^2)J \tag{3.4}$$

откуда, учитывая ограниченность d_{0c}^{-1}, из условия $J^\cdot=0$ усматривается стационарное значение импульса $J=0$, соответствующее переходу системы на режимы без взаимодействия.

При $\Delta>0$ значению $J=0$ соответствует частота $\omega_c=\Omega$ при $\Delta<0$ — $\omega_c=\infty$ (см. п. 2). Выражение для скорости убывания полной энергии системы E_c получаем домножением правой части (3.4) на величину $dE_c/dJ=d_{0c}J$ (см. [4]).

В виброударном приближении

$$J^\cdot=-\frac{\varepsilon bJ}{4\sin^2[{}^1/{}_2\Omega T_\infty(J)]}\left[1-\frac{\sin[T_\infty(J)\Omega]}{T_\infty(J)\Omega}\right] \tag{3.5}$$

причем из (1.6) следует

$$\omega_\infty(J)=2\pi T_\infty^{-1}(J)=\begin{cases}\pi\Omega[\pi-\operatorname{arctg}(J/(2\Omega\Delta))]^{-1}, & \Delta>0\\ 2\Omega, & \Delta=0\\ \pi\Omega[\operatorname{arctg}(J/(2\Omega\Delta))]^{-1}, & \Delta<0\end{cases}$$

После линеаризации (3.5) вблизи стационарного значения получим уравнение в вариациях: $J^\cdot=-{}^1/{}_6\varepsilon bJ$, откуда $J=\varepsilon J_0\exp(-{}^1/{}_6\varepsilon bt)$, $\varepsilon J_0=J(0)$.

2. Пусть $g(t,\ x,\ x^\cdot,\ \varepsilon)=-2b(\varepsilon t)x^{\cdot 2q+1}x^{2n}$ ($q,\ n\in\mathrm{N}$), где $b(\varepsilon t)>0$ — гладкая функция и система близка к изохронной: $\Delta=\varepsilon\Delta_1(\varepsilon t)$, где $\Delta_1(\varepsilon t)$ — также гладкая функция; здесь и ниже N означает натуральный ряд чисел.

Производя в уравнении (1.1) замену $y=x-\Delta$, получим, учитывая изохронность порождающей системы

$$J^\cdot=-\frac{4\varepsilon J^{2(q+n)+1}\pi b(\varepsilon t)}{d_{0c}\omega_c^*}\int\limits_0^{T_c^*}[\chi^c(\psi)]^{2n}[\chi_\psi^c(\psi)]^{2q+2}\,d\psi+\varepsilon^2\ldots$$

$$\psi^\cdot=1+\frac{4\varepsilon J^{2(q+n)}\pi b(\varepsilon t)}{d_{0c}\omega_c^*}\int\limits_0^{T_c^*}[\chi^c(\psi)]^{2n+1}[\chi_\psi^c(\psi)]^{2q+1}\,d\psi-\frac{\varepsilon\Omega^2\Delta_1(\varepsilon t)L_0(c)}{d_{0c}J}+\varepsilon^2\ldots \tag{3.6}$$

Причем частота ω_c^* дается (2.6), а величина $d_{0c}=\mathrm{const}$. Интегрируя (3.6) и обозначая интегралы в правых частях соответственно Λ_1 и Λ_2, находим при условиях $J(0)=J_0$, $\psi_0=\psi(0)$:

$$J(t)=\left[J_0^{-2(q+n)}+\frac{2\varepsilon\pi\Lambda_1(q+n)}{d_{0c}\omega_c^*}\int\limits_0^t b(\varepsilon t)\,dt\right]^{-{}^1/{}_2(q+n)}$$

$$\psi(t)=t+\psi_0+\frac{4\varepsilon\pi\Lambda_2}{d_{0c}\omega_c^*}\int\limits_0^t J^{2(q+n)}(t)\,b(\varepsilon t)\,dt-\frac{\Omega^2L_0(c)}{d_{0c}}\int\limits_0^t\frac{\Delta(\varepsilon t)\,dt}{J(t)}$$

что и определяет главный член искомого асимптотического разложения.

3. Исследуя неавтономное уравнение (1.1), при усреднении необходимо рассматривать полную систему (3.3) и изучать отдельно резонансный и нерезонансный ([4, 5]) случаи.

Для описания резонансных режимов можно воспользоваться упрощенной схемой, приведенной, например, в [6].

Пусть в (1.1) $g(t, x, x^\bullet, \varepsilon) = g_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0) - 2bx^\bullet$, где φ_0 — подлежащая определению фаза. Резонансное периодическое решение частоты $\omega=\omega_0 l^{-1}$ ($l\in\mathbb{N}$) ищем в виде $x_c^*(t) = -J_c\chi^c(t, \omega)$, считая, что при $\Delta\neq 0$ импульс дается (2.4), а условие существования резонансного режима следует из уравнения баланса работ неконсервативных сил на решении $x_c^*(t)$:

$$E_0(\varphi_0) \equiv \int\limits_0^{lT_0} g(t, x_c^*, x_c^{\bullet *}, \varepsilon)\,dx_c^* = 0 \tag{3.7}$$

В данном случае (3.7) имеет вид

$$(g_0 \sin\varphi_0)\,|\,L_l(c)\,|\,l^2 = T_0^{-1}\, 4\pi b J_c \sum_l (|\,L_k(c)\,|^2 k^2) \tag{3.8}$$

откуда условие существования резонансного режима

$$T_0 l^2 g_0 |L_l(c)| > 4\pi b J_c \sum_l |L_k(c)|^2 k^2 \tag{3.9}$$

Из (3.9) можно получить два значения фазы: $\varphi_{01}\in(0, \pi/2]$; $\varphi_{02}\in[\pi/2, \pi)$. При исследовании этой системы на устойчивость в виброударном приближении [2] оказывается, что при $\Delta>0$ фазе φ_{01} соответствует устойчивый, а фазе φ_{02} — неустойчивый режимы. При $\Delta<0$ ситуация обратная.

При $\Delta=0$ резонансные режимы могут существовать, только если $\omega_0 = l\omega_c^*$.

Примеры построения асимптотических разложений в виброударном приближении даны в [7, 8].

4. Некоторые обобщения на многомерные системы. Полученные выше представления могут оказаться полезными при анализе ряда многомерных систем.

1. Рассмотрим в длинноволновом приближении [8] задачу о распространении периодического волнового пакета в сильно нелинейной среде, описываемой нелинейным уравнением Клейна — Гордона

$$\mu u_{tt} - S_0 u_{yy} + \alpha^2 u + c\Phi(u) = 0 \tag{4.1}$$

где $u(y, t)$ — перемещение точек среды с координатами y в момент времени t, нижние индексы означают частные производные, $\mu>0$, $S_0>0$, α^2 — параметры системы, c — большой параметр, $\Phi(x)\in\{\Phi\}_\Delta$. Описывая бегущие волны в виде $u=W_0(\xi)$, $\xi=Ky-\omega t$, $V=\omega K^{-1}$ — фазовая скорость волны; предполагаем, что $V>\sqrt{S_0\mu^{-1}}$ — скорости звука в линейной среде, из (4.1) получаем

$$W_0'' + \Omega^2 W_0 + c\Phi(W_0) = 0 \tag{4.2}$$

$$\Omega^2 = \alpha^2(\mu\omega^2 - S_0K^2)^{-1}, \qquad c_1 = c(\mu\omega^2 - S_0K^2)^{-1}$$

Полагая $\Phi(W_0) = \Phi_0(W_0)$ и записывая решение в виде $W_0(\xi) = -J_c\chi^c(\xi)$, где J_c и χ^c вычисляются исходя из (2.1) и (2.2), получаем представление для искомой волны. В виброударном приближении

$$u(x, t) = -J_\infty \frac{\cos\Omega(K_y - \omega t - \pi\omega_\infty^{-1})}{2\Omega\sin(\Omega\pi\omega_\infty^{-1})}, \quad J_\infty = -2\Delta\Omega\,\mathrm{tg}\frac{\Omega\pi}{\omega_\infty}$$

где ω_∞ — частота колебаний нелинейного осциллятора (4.2) в сопровождающей системе координат, определяемая полной энергией системы. На основании найденных решений можно строить более сложные представления для волн, описываемых уравнением (4.1) [9].

2. Рассмотрим резонансные колебания в системе с n степенями свободы и одной нелинейностью с большим параметром. Пусть уравнение движения имеет вид: $\mathbf{A}\mathbf{x}^{\bullet\bullet} + \mathbf{D}_1\mathbf{x} + c\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \varepsilon\mathbf{G}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}^\bullet, \varepsilon)$, где вектор $x\in\mathbf{R}^n$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}_1$ — симметричные, положительно-определенные матрицы, $\varepsilon\mathbf{G}_1$ — вектор T_0-периодических неконсервативных сил, а $\mathbf{F}(x) = (0, \ldots, \Phi(x_n))$,

причем $\Phi(x_n)\in\{\Phi\}_\Delta$. Переписав последнее уравнение в виде

$$\mathbf{x}^{\cdot\cdot}+\mathbf{D}\mathbf{x}+\mathbf{A}^{-1}c\mathbf{F}(\mathbf{x})=\varepsilon G(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{x}^{\cdot},\ \varepsilon);\quad \mathbf{D}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}_1,\ \mathbf{G}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{G}_1 \tag{4.3}$$

построим его приближенное решение при $\varepsilon=0$ [3].

Линейная часть невозмущенной системы определяет матрицу операторов динамической податливости [2] $\mathbf{L}(p)=[L_{qj}(p)]$ $(q,\ j=1,\ldots,\ n)$, причем

$$L_{qj}(p)=\sum_{m=1}^{n}\frac{A_{qm}A_{jm}}{p^2+\Omega_m{}^2},\quad p\equiv\frac{d}{dt},$$

где $\{\Omega_m\}_1{}^n$ — спектр собственных частот линейной системы, $[A_{jm}]$ — ортогональная матрица нормированных коэффициентов форм колебаний. Операторы $L_{ij}(p)$ определяют T-периодические функции Грина

$$\chi_{qj}(t)=L_{qjk}e_k(t)=\sum_{m=1}^{n}\frac{A_{qm}A_{jm}}{2\Omega_m}\frac{\cos\Omega_m(t-{}^1/{}_2T)}{\sin{}^1/{}_2\Omega_mT},\quad t\in[0,T]$$

$$L_{qjk}=T^{-1}\sum_{m=1}^{n}A_{qm}A_{jm}(\Omega_m{}^2-k^2\omega^2)^{-1}$$

В предположении существования T-периодических режимов консервативной системы ($T=lT_0$, $l\in\mathbf{N}$) для компонент вектора x_c, определяющего закон движения, можно записать интегральные уравнения

$$x_{ck}(t)=-c\sum_{q=1}^{n}a_{qn}\int_0^T\chi_{qk}(t-s)\,\Phi[x_{cn}(s)]ds,\quad (k=1,\ldots,n) \tag{4.4}$$

где a_{qn} — компоненты n-го столбца матрицы $\mathbf{A}^{-1}$.

Следуя п. 1, можно из законов сохранения энергии и импульса вывести, что для всех $\Phi(x_n)\in\{\Phi\}_\Delta$ (при $c\to\infty$) $x_{cn}\to\Delta$ (в зоне взаимодействия) и время взаимодействия $\tau_c\to0$. Таким образом, в пределе из (4.4) получаем lT_0-периодическое решение ($\Delta\neq0$):

$$x_{\infty k}(t)=-J_\infty\sum_{q=1}^{n}a_{qn}\chi_{qn}(\omega;t),\quad J_\infty=-\Delta\left[\sum_{q=1}^{n}a_{qn}\chi_{qn}(\omega,0)\right]^{-1},\quad \omega=\omega_0l^{-1} \tag{4.5}$$

Пренебрегая в зоне контакта всеми потенциальными силами, кроме силы взаимодействия, можно получить достаточно легко вычисляемые решения x_{ck} типа приближенных решений п. 1. Их свойства во многом схожи со свойствами найденных ранее представлений. Например, учитывая, что $\operatorname{Im}L_{qj}(i\omega)=0$, легко проверить выполнение равенств типа $x_{ij}(0)=x_{ij}(\tau_c)$ $(j=1,\ldots,n)$ и т. д.

Аналогично (2.1) и (2.2) для $\Phi(x_n)=\Phi_0(x_n)$ получим из (4.4):

$$x_{ij}(t)=-J_c\sum_{q=1}^{n}a_{qn}\chi_{qj}{}^c(\omega;t),\quad \chi_{qj}{}^c(\omega,t)=L_{qjk}\varphi_k{}^ce_k(t)$$

$$J_c=-\Delta\left[\sum_{q=1}a_{qn}L_{qjk}\varphi_k{}^c\right]^{-1}, \tag{4.6}$$

$$\varphi_k{}^c=\frac{0{,}5c[\exp(-ik\omega\tau_c)+1]}{(c-k^2\omega^2)}$$

[3] Математические аспекты проблемы – интегрируемость, оценка числа периодических режимов и др.— здесь не рассматриваются.

причем $\tau_c = \pi c^{-1/2}$. Эти выражения можно переписать в конечной форме, аналогичной (2.3), (2.4). Полученные решения должны проверяться на выполнение условий $J_c \geqslant 0$, $x_{cn}(t) \leqslant \Delta$ при $t \in [\tau_c, T]$. Эти условия, вообще говоря, можно проверить лишь численно. Практически проще проверять условия $J_\infty \geqslant 0$, $x_{\infty n}(t) \leqslant \Delta$ $(t \in [0, T])$ для решения (4.5).

При исследовании резонансных режимов периода $T = lT_0$ $(l \in N)$ в случае возмущенного уравнения (4.3) достаточно составить уравнение баланса работ неконсервативных сил на движение $x_c(t)$:

$$\int\limits_0^{lT_0} (\mathbf{G}(t, \mathbf{x}_c, \dot{\mathbf{x}}_c), d\mathbf{x}_c(t)) = 0 \qquad \left((\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \tag{4.7}$$

и определить из него предельные значения параметров системы, при которых внешние источники могут восполнить потери энергии.

Полученными решениями удобно пользоваться, когда уравнения движения заданы в операторной форме [2].

Пусть закон движения имеет вид: $x(t) = L(p)\{\varepsilon G_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - c\Phi_0(x)\}$, $\Delta \neq 0$, где $L(p) = O(p^{-(1+\lambda)})$, $\lambda > 0$, $L(i\omega) = P(\omega) + i\varepsilon Q(\omega)$. Найдем условие существования резонансных режимов частоты $\omega_0 l^{-1}$.

Составляя консервативное решение периода $T = lT_0$ (4.6) $x_c(t) = -J_c \chi^c(t) = -J_c T^{-1} P(k\omega) \varphi_k^c e_k(t)$, $J_c = -\Delta[\chi^c(0)]^{-1}$ и вычисляя (4.7), из условия $|\sin \varphi_0| \leqslant 1$ находим

$$\omega J_c \{(2\pi l^2)^{-1} k Q(k\omega) |L_k(c)|^2\} \leqslant G_0 |L_1|$$

причем $L_k(c)$ — коэффициенты Фурье функции $\chi^c(t)$. Полученное условие аналогично соответствующему условию в виброударном случае [2].

Используя методику, данную в [2], можно также легко построить оценки продолжительности существования резонансного режима, поддерживаемого стационарным случайным процессом, удовлетворяющим некоторым условиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабицкий В. И., Крупенин В. Л.* К анализу моделей виброударных систем. — Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 6, с. 29—37.
2. *Бабицкий В. И.* Теория виброударных систем. М.: Наука, 1978. 352 с.
3. *Розенвассер Е. Н.* Колебания нелинейных систем. М.: Наука, 1969. 576 с.
4. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 379 с.
5. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. К.: Наук. думка, 1971. 440 с.
6. *Коловский М. З.* Системы с внешним возбуждением. – В кн.: Вибрации в технике. Т. 2. М.: Машиностроение, 1979, с. 156—170.
7. *Журавлев В. Ф.* Уравнения движения механических систем с идеальными односторонними связями. — ПММ, 1978, т. 42, вып. 5, с. 781—788.
8. *Бабицкий В. И., Ковалева А. С., Крупенин В. Л.* Исследование квазиконсервативных виброударных систем методом усреднени. — Изв. АН СССР. МТТ, № 1, 1981, с. 41—49.
9. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

Москва

Поступила в редакцию 5.I.1981